IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

N.B. Divers additifs et correctifs pourront être apportés aux résumés ci-après, en fonction notamment des observations qui seront faites sur leur contenu et leur organisation.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 1: mardi 2 septembre 2008

Programme de la séance. 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. Forum des questions // 3. Observation & analyse

1. Problématique et fonctionnement du Séminaire

1.1. Le document de présentation de la formation et de sa validation comporte les précisions suivantes.

> 3.1. La rubrique Problématique et fonctionnement, comporte trois sous-rubriques, intitulées respectivement Le programme d'études, Questions de la semaine et Faisons le point.
>
> – La sous-rubrique Le programme d'études a pour objet de préciser les questions à étudier (elle prend place éventuellement dans le cadre des séances d'explicitation). Le programme du Séminaire inclut notamment quatre questions qui traversent tous les dispositifs de formation : évaluation, gestion de la diversité, éducation à la citoyenneté et travail en équipe.
>
> – La sous-rubrique Questions de la semaine requiert de chaque participant au Séminaire, chaque semaine ouvrable, qu'il consigne par écrit – au démarrage de la séance de GFP du mardi matin – une difficulté rencontrée dans le cadre de sa formation au métier de professeur de mathématiques, y compris bien sûr dans les stages de terrain, c'est-à-dire à l'occasion des enseignements qu'il assure ou auxquels il est associé. Les questions ainsi formulées sont regardées, sauf exception, comme des questions qui se posent à la profession à travers l'un de ses nouveaux membres, et non comme l'affaire personnelle de tel ou tel. Leur étude éventuelle dans le cadre de la formation concerne donc tout professionnel de l'enseignement des mathématiques, et pas seulement celui qui, ayant porté témoignage de la difficulté rencontrée, aura ainsi contribué au développement de la profession que cette année de formation doit promouvoir. Le contenu de ces questions sera présenté la semaine suivante dans la rubrique Question de la semaine du Séminaire de façon à dégager les problèmes de la profession rencontrés et soumis à l'étude par la classe.
>
> – La sous-rubrique Faisons le point permet de faire un bilan de tout ou partie du travail réalisé au cours des séances précédentes ainsi que des difficultés sur lesquelles un travail complémentaire apparaît utile ou nécessaire.

1.2. Le ***programme d'études*** se dessinera peu à peu, en relation étroite avec la rubrique des ***Questions de la semaine*** : *a priori*, il inclut en effet ***toute question professionnelle*** (en un sens très large de l'expression) qui peut se poser à un professeur de mathématiques, débutant ou non.

1.3. Pour commencer de repérer ce qui fait le « territoire » du professeur de mathématiques, territoire où vont se poser les questions que nous étudierons, nous nous référerons aux dix compétences professionnelles des maîtres explicitées dans le *Cahier des charges de la formation des maîtres en institut universitaire de formation des maîtres* publié au Bulletin Officiel n°1 du 4 janvier 2007. Nous les mettrons en relation avec un texte toujours en vigueur (il date de 1997) présentant la ***Mission du professeur exerçant en collège, en lycée d'enseignement général et technologique ou en lycée professionnel*** : on trouvera ces textes sur la partie ***Mathématiques*** du site de l'IUFM, sous la rubrique ***Documents / 2^nd^ degré*** (http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2008-2009/documents_09.html).

a) Le texte sur la mission du professeur indique que celle-ci « et la responsabilité qu'elle implique se situent dans le triple cadre du ***système éducatif***, des ***classes*** qui lui sont confiées et de son ***établissement*** d'exercice ». Il propose donc une description en ***trois volets*** des exigences qui s'imposent au professeur : ***Exercer sa responsabilité au sein du système éducatif*** ; ***Exercer sa responsabilité dans la classe*** ; ***Exercer sa responsabilité dans l'établissement***. Dans le discours par lequel il présentait le cahier des charges de la formation des maîtres en décembre 2006, le ministre de l'éducation nationale d'alors, Gilles de Robien, présentait les dix compétences professionnelles des maîtres en trois ensembles : « Les deux premières compétences énoncent ***ce qui est requis de tout enseignant***, quels que soient sa discipline et son niveau d'enseignement, à savoir : agir de façon éthique et responsable ; maîtriser la langue française » ; « Les six compétences suivantes touchent à ***l'enseignement de la discipline dans le contexte de la classe***. Il faut que le jeune professeur sache : maîtriser sa ou ses disciplines, tout en ayant une bonne culture générale ; concevoir et mettre en œuvre son enseignement ; gérer la classe ; prendre en compte la diversité des élèves ; les évaluer ; maîtriser les technologies de l'information et de la communication » ; « Les deux dernières compétences concernent ***le rapport du professeur avec le contexte plus général de son enseignement*** : tout d'abord, il doit savoir travailler en équipe avec tous les membres de la communauté éducative : ses collègues bien sûr, mais aussi les parents et les associations péri scolaires ; ensuite, il doit savoir entretenir un rapport vivant et évolutif avec son champ disciplinaire : il doit savoir se former et innover tout au long de son parcours professionnel ». Le cœur du travail du professeur a ainsi peu varié, et c'est dans la présentation du travail extérieur à la classe, mais en relation avec elle bien entendu, qu'il semble y avoir quelques évolutions. Voyons cela.

1.4. On examinera d'abord le premier ensemble de compétences. On notera au préalable que les dix compétences sont présentées suivant le même schéma : une description suivie de trois rubriques : connaissances, capacités et attitudes.

Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable
Tout professeur contribue à la formation sociale et civique des élèves. En tant qu'agent de l'État, il fait preuve de conscience professionnelle et suit des principes déontologiques : il respecte et fait respecter la personne de chaque élève, il est attentif au projet de chacun ; il respecte et fait respecter la liberté d'opinion ; il est attentif à développer une attitude d'objectivité ; il connaît et fait respecter les principes de la laïcité, notamment la neutralité ; il veille à la confidentialité de certaines informations concernant les élèves et leurs familles.
Il exerce sa liberté et sa responsabilité pédagogique dans le cadre des obligations réglementaires et des textes officiels ; il connaît les droits des fonctionnaires et en respecte les devoirs.
L'éthique et la responsabilité du professeur fondent son exemplarité et son autorité dans la classe et dans l'établissement.
Connaissances
Le professeur connaît :
– les valeurs de la République et les textes qui les fondent : liberté, égalité, fraternité ; laïcité ; refus de toutes les discriminations ; mixité ; égalité entre les hommes et les femmes ;
– les institutions (État et collectivités territoriales) qui définissent et mettent en œuvre la politique éducative de la nation ;
– les mécanismes économiques et les règles qui organisent le monde du travail et de l'entreprise ;
– la politique éducative de la France, les grands traits de son histoire et ses enjeux actuels (stratégiques, politiques, économiques, sociaux) en comparaison avec d'autres pays européens ;

– les grands principes du droit de la fonction publique et le code de l'éducation : les lois et textes réglementaires en relation avec la profession exercée, les textes relatifs à la sécurité des élèves (obligations de surveillance par exemple) et à la sûreté (obligation de signalement par exemple) ;

– le système éducatif, ses acteurs et les dispositifs spécifiques (éducation prioritaire, etc.) ;

– la convention internationale des droits de l'enfant ;

– ses droits et recours face à une situation de menace ou de violence ;

– l'organisation administrative et budgétaire des écoles et des établissements publics locaux d'enseignement ;

– les règles de fonctionnement de l'école ou de l'établissement (règlement intérieur, aspects budgétaires et juridiques) ;

– les caractéristiques et les indicateurs de l'école ou de l'établissement d'exercice ;

– le projet de l'école ou de l'établissement d'exercice ;

– le rôle des différents conseils (conseil d'école, conseil des maîtres, conseil de cycle, d'une part, conseil d'administration, conseil pédagogique, conseil de classe, conseil de discipline, d'autre part).

Capacités

Le professeur est capable :

– d'utiliser ses connaissances sur l'évolution et le fonctionnement du service public d'éducation nationale pour recourir aux ressources offertes ;

– de se situer dans la hiérarchie de l'institution scolaire ;

– de participer à la vie de l'école ou de l'établissement ;

– de repérer les signes traduisant des difficultés spécifiques des élèves dans le domaine de la santé, des comportements à risques, de la grande pauvreté ou de la maltraitance ;

– de contribuer, en coopérant avec des partenaires internes ou externes à l'institution, à la résolution des difficultés spécifiques des élèves ;

– de se faire respecter et d'utiliser la sanction avec discernement et dans le respect du droit.

Attitudes

Agir de façon éthique et responsable conduit le professeur :

– à faire comprendre et partager les valeurs de la République ;

– à intégrer, dans l'exercice de sa fonction, ses connaissances sur les institutions, sur l'État (son organisation et son budget), sur ses devoirs de fonctionnaire ;

– à respecter dans sa pratique quotidienne les règles de déontologie liées à l'exercice du métier de professeur dans le cadre du service public d'éducation nationale ;

– à respecter les élèves et leurs parents ;

– à respecter et faire respecter le règlement intérieur, les chartes d'usage des ressources et des espaces communs ;

– à collaborer à la réalisation d'actions de partenariat engagées entre l'établissement et son environnement économique, social et culturel ;

– à prendre en compte la dimension civique de son enseignement.

Maîtriser la langue française pour enseigner et communiquer

Dans son usage de la langue française, tant à l'écrit qu'à l'oral, le professeur doit être exemplaire quelle que soit sa discipline. Il est attentif à la qualité de la langue chez ses élèves. Qu'il présente des connaissances, fournisse des explications ou donne du travail, il s'exprime avec clarté et précision, en tenant compte du niveau de ses élèves. Il sait décrire et expliquer simplement son enseignement à la diversité de ses interlocuteurs, en particulier les parents.

Connaissances

Tout professeur possède les connaissances attendues d'un diplômé de l'enseignement supérieur, dans la maîtrise de la langue écrite et orale (vocabulaire, grammaire, conjugaison, ponctuation, orthographe).

Le professeur des écoles connaît en outre :

> – les mécanismes d'apprentissage du langage en maternelle et le développement des capacités d'expression orale tout au long de la scolarité primaire ;
>
> – les mécanismes d'apprentissage de la lecture et ses obstacles ;
>
> – les méthodes d'enseignement de la lecture et de l'écriture ;
>
> – les règles fondamentales de l'orthographe et de la grammaire.
>
> *Capacités*
>
> Le professeur est capable :
>
> – de repérer les obstacles à la lecture, les déficiences du langage oral et écrit en identifiant les difficultés que peuvent rencontrer les élèves ;
>
> – de construire des séquences d'enseignement qui visent des objectifs de développement de l'expression orale et écrite des élèves ;
>
> – de communiquer avec clarté et précision et dans un langage adapté à l'écrit comme à l'oral :
>
> – avec les élèves, au cours des apprentissages (transmission des connaissances, organisation du travail en classe et du travail personnel à fournir...) ;
>
> – avec les parents, au cours des échanges personnalisés ou collectifs.
>
> *Attitudes*
>
> Le souci d'amener les élèves à maîtriser la langue conduit le professeur :
>
> – à intégrer dans les différentes situations professionnelles l'objectif de maîtrise de la langue orale et écrite par les élèves ;
>
> – à veiller dans toutes les situations d'enseignement ou éducatives au niveau de langue des élèves, à l'écrit et à l'oral.

Commentaire 1 – Des notations relatives à la première compétence sont présentes dans la ***description de la mission du professeur***, de façon certes moins détaillée comme en témoigne par exemple les deux extraits suivants extraits respectivement du premier et du troisième volet du texte.

> Le professeur doit être à même de mesurer les enjeux sociaux de l'éducation et de son action au sein du système. Il doit également connaître les textes essentiels concernant l'organisation du service public de l'éducation, ses évolutions et son fonctionnement. Il pourra ainsi se comporter en acteur du système éducatif et favoriser son adaptation en participant à la conception et la mise en œuvre d'innovations, de nouveaux dispositifs, de nouveaux programmes et diplômes.
>
> (...)
>
> Il connaît l'importance du règlement intérieur de l'établissement et sait en faire comprendre le sens à ses élèves. Il est capable de s'y référer à bon escient. De même, il connaît et sait faire respecter les règles générales de sécurité dans l'établissement.

Commentaire 2 – La description détaillée des compétences fait une différence entre des ***connaissances*** que le professeur doit posséder (par exemple « les valeurs de la République et les textes qui les fondent : liberté, égalité, fraternité ; laïcité ; refus de toutes les discriminations ; mixité ; égalité entre les hommes et les femmes » ou encore « – les règles de fonctionnement de l'école ou de l'établissement (règlement intérieur, aspects budgétaires et juridiques) ») ; des capacités qui sont des ***types de tâches*** que le professeur doit être capable d'accomplir en mobilisant notamment les connaissances citées (par exemple « se faire respecter et utiliser la sanction avec discernement et dans le respect du droit ») ; des attitudes, qui sont à peu de chose près des ***pratiques*** que l'on doit observer dans l'activité du professeur et qui témoignent que les connaissances et capacités sont acquises (par exemple, « à respecter dans sa pratique quotidienne les règles de déontologie liées à l'exercice du métier de professeur dans le cadre du service public d'éducation nationale ») .

Commentaire 3 – Pour être en accord avec les prescriptions précédentes, le professeur doit donc se tenir informé de « la ***politique éducative*** de la France, les grands traits de son histoire et ses ***enjeux*** actuels (stratégiques, politiques, économiques, sociaux) en comparaison avec d'autres pays européens ». Dans ce contexte, les professionnels de l'enseignement doivent par exemple prendre connaissance de la ***circulaire de rentrée*** qui, chaque année, prépare la rentrée scolaire. On trouvera sur le site Internet de l'IUFM, sous la rubrique déjà indiquée plus haut et sous le titre ***Rentrée 2008***, la circulaire concernant la présente rentrée. »). ☝

Commentaire 4 – La maîtrise de la langue était également mentionnée dans le texte de la mission des professeurs comme en témoigne les extraits suivants du deuxième volet.

> Quelle que soit la discipline qu'il enseigne, il a une responsabilité dans l'acquisition de la maîtrise orale et écrite de la langue française et dans le développement des capacités d'expression et de communication des élèves.
>
> Il sait choisir le registre de langue approprié ; ses modalités d'intervention et de communication sont ajustées en fonction des activités proposées et de la réceptivité des élèves.

On notera qu'elle constitue également un des objectifs du concours de recrutement du CAPES, et notamment des épreuves orales :

> Ces épreuves visent enfin à évaluer les capacités du candidat dans le domaine de l'expression orale : qualité de l'élocution et de la langue, précision et clarté, gestion du tableau, aptitude au dialogue au cours des entretiens. Étant donné la nature de la profession d'enseignant, ces capacités sont d'une importance capitale. (BO du 1er janvier 2004)

Venons-en maintenant au deuxième ensemble de compétences, qui constitue – on l'a dit – le cœur du travail du professeur.

> **Maîtriser les disciplines et avoir une bonne culture générale**
>
> Une bonne maîtrise des savoirs enseignés est la condition nécessaire de l'enseignement. Le professeur a une connaissance approfondie et élargie de sa ou de ses disciplines et une maîtrise des questions inscrites aux programmes. Il connaît les composantes du socle commun de connaissances et de compétences, les repères annuels de sa mise en œuvre, ses paliers et ses modalités d'évaluation. Il aide les élèves à acquérir les compétences exigées en veillant à la cohérence de son projet avec celui que portent les autres enseignements.
>
> Il possède aussi une solide culture générale qui lui permet de contribuer à la construction d'une culture commune des élèves. Il pratique au moins une langue vivante étrangère.
>
> *Connaissances*
>
> Le professeur des écoles connaît :
>
> – les objectifs de l'école primaire et du collège ;
>
> – les concepts et notions, les démarches et les méthodes dans chacun des champs disciplinaires enseignés à l'école primaire.
>
> Le professeur des lycées et collèges :
>
> – connaît les objectifs de l'école primaire, du collège et du lycée ;
>
> – maîtrise l'ensemble des connaissances dans sa ou ses disciplines et élargit sa culture aux disciplines connexes ;
>
> – situe sa ou ses disciplines, à travers son histoire, ses enjeux épistémologiques, ses problèmes didactiques et les débats qui la traversent.
>
> *Capacités*
>
> Le professeur des écoles est capable :
>
> – d'organiser les divers enseignements en les articulant entre eux dans le cadre de la polyvalence ;
>
> – de profiter de la polyvalence pour construire les apprentissages fondamentaux ;
>
> – d'insérer dans les apprentissages les exercices spécifiques et systématiques pour développer les automatismes (lecture, écriture, calcul, grammaire, orthographe, éducation physique, etc.).
>
> Le professeur du second degré est capable d'organiser l'enseignement de sa discipline en cohérence avec les autres enseignements.
>
> *Attitudes*

La maîtrise scientifique et disciplinaire du professeur le conduit à :

– une attitude de rigueur scientifique ;

– à participer à la construction d'une culture commune des élèves.

Concevoir et mettre en œuvre son enseignement

Le professeur est un spécialiste de l'enseignement de sa ou de ses disciplines, c'est-à-dire qu'il est capable d'assurer, sur la durée d'une année scolaire, l'apprentissage effectif de ses élèves dans le cadre d'un enseignement collectif. Pour cela, il maîtrise la didactique de sa ou de ses disciplines, et il est capable de mettre en œuvre des approches pluridisciplinaires ; il connaît les processus d'apprentissage et les obstacles que peuvent rencontrer les élèves et la manière d'y remédier ; il est capable d'élaborer des programmations et de répartir les apprentissages dans le temps. Il sait prendre en compte ce qui a été réalisé précédemment.

Le professeur peut être appelé à participer aux actions de formation continue des adultes et aux formations par apprentissage et être formé en conséquence.

Connaissances

Le professeur connaît :

– les objectifs à atteindre pour un niveau donné, dans le cadre de son enseignement ou de son domaine d'activité ;

– les programmes d'enseignement et documents d'accompagnement qui le concernent à tous les niveaux d'enseignement des premier et second degrés ;

– les fondements de la psychologie de l'enfant, de l'adolescent et du jeune adulte, les processus d'apprentissage des élèves et les obstacles possibles à ces processus ;

– les différents supports et les outils (tableau, manuels, documents...) nécessaires à la conception et à la mise en œuvre des apprentissages.

Capacités

Le professeur est capable :

– de définir des objectifs d'apprentissage à partir des références des textes officiels ;

– de raisonner en termes de compétences, c'est-à-dire déterminer les étapes nécessaires à l'acquisition progressive des connaissances, des capacités et des attitudes prescrites à partir des acquis et des besoins identifiés en mettant en œuvre :

– une progression et une programmation sur l'année et sur le cycle ;

– une progression différenciée selon les niveaux des élèves ;

– de s'appuyer sur ses connaissances des processus d'apprentissage des élèves et de la psychologie de l'enfant, de l'adolescent et du jeune adulte ;

– de prendre en compte les résultats des évaluations dans la construction d'une progression pédagogique ;

– d'intégrer dans son enseignement la prévention des risques professionnels.

Attitudes

Le professeur est conduit :

– à développer des approches pluridisciplinaires et transversales fondées sur les convergences et les complémentarités entre les disciplines :

– il construit des activités permettant d'acquérir la même compétence par le biais de plusieurs disciplines ;

– il met sa discipline au service de projets ou dispositifs pluridisciplinaires ;

– à apprécier la qualité des documents pédagogiques (manuels scolaires et livres du professeur associés, ressources documentaires, logiciels d'enseignement...).

Organiser le travail de la classe

Le professeur sait faire progresser une classe aussi bien dans la maîtrise des connaissances, des capacités et des attitudes que dans le respect des règles de la vie en société ; ses exigences portent sur les comportements et il fait en sorte que les élèves attachent de la valeur au travail personnel et collectif.

Connaissances

Le professeur maîtrise des connaissances relatives à la gestion des groupes et des conflits.

Capacités

Le professeur est capable :

– de prendre en charge un groupe ou une classe, de faire face aux conflits, de développer la participation et la coopération entre élèves ;

– d'organiser l'espace de la classe et le temps scolaire en fonction des activités prévues ;

– d'organiser les différents moments d'une séquence ;

– d'adapter les formes d'interventions et de communication aux types de situations et d'activités prévues (postures, place, interventions, vérification des consignes, etc.).

Attitudes

Dans toute situation d'enseignement, le professeur veille à instaurer un cadre de travail permettant l'exercice serein des activités.

Prendre en compte la diversité des élèves

Le professeur met en œuvre les valeurs de la mixité, qu'il s'agisse du respect mutuel ou de l'égalité entre tous les élèves. Il sait différencier son enseignement en fonction des besoins et des facultés des élèves, afin que chaque élève progresse. Il prend en compte les différents rythmes d'apprentissage, accompagne chaque élève, y compris les élèves à besoins particuliers. Il sait faire appel aux partenaires de l'école en tant que de besoin.

Il connaît les mécanismes de l'apprentissage dont la connaissance a été récemment renouvelée, notamment par les apports de la psychologie cognitive. Il amène chaque élève à porter un regard positif sur l'autre et sur les différences dans le respect des valeurs et des règles communes républicaines.

Connaissances

Le professeur connaît :

– les éléments de sociologie et de psychologie lui permettant de tenir compte, dans le cadre de son enseignement, de la diversité des élèves et de leurs cultures ;

– les dispositifs éducatifs de la prise en charge de la difficulté scolaire et des élèves en situation de handicap.

Capacités

Le professeur est capable :

– de prendre en compte les rythmes d'apprentissage des élèves ;

– de déterminer, à partir des besoins identifiés, les étapes nécessaires à l'acquisition progressive des savoirs et des savoir-faire prescrits ;

– de mettre en œuvre des dispositifs pédagogiques visant à adapter la progression à la diversité des élèves (pédagogie différenciée, programme personnalisé de réussite éducative) ;

– de participer à la conception d'un projet individualisé de scolarisation pour les élèves à besoins particuliers et les élèves handicapés.

Attitudes

Le professeur veille :

– à préserver l'égalité et l'équité entre élèves ;

– à ce que chaque élève porte un regard positif sur lui-même et sur l'autre.

Évaluer les élèves

Le professeur sait évaluer la progression des apprentissages et le degré d'acquisition des compétences atteint par les élèves. Il utilise le résultat des évaluations pour adapter son enseignement aux progrès des élèves. Il fait comprendre aux élèves les principes d'évaluation et développe leurs capacités à évaluer leurs propres productions. Il communique et explique aux parents les résultats attendus et les résultats obtenus.

Connaissances

Le professeur connaît les différentes évaluations qu'il peut être amené à pratiquer (diagnostique, formative, sommative, certificative).

Capacités

Le professeur est capable :
– de comprendre les fonctions de l'évaluation ;
– de concevoir des évaluations aux différents moments de l'apprentissage, c'est-à-dire :
– définir le niveau d'exigence de l'évaluation ;
– adapter le support et le questionnement en référence aux objectifs et au type d'évaluation que l'on souhaite mener ;
– expliciter les consignes, guider les élèves dans la préparation de l'évaluation ;
– expliciter les critères de notation ;
– analyser les résultats constatés et déterminer les causes des erreurs ;
– concevoir des activités de remédiation et de consolidation des acquis (exercices d'entraînement, exercices de mémorisation oraux ou écrits, activités d'aide, de soutien et d'approfondissement, etc.) ;
– de développer les compétences des élèves dans le domaine de l'autoévaluation ;
– de pratiquer l'évaluation certificative (examens, contrôle en cours de formation, compétences linguistiques incluses dans le cadre européen commun de référence pour les langues...).

Attitudes

Le professeur pratique l'évaluation dans le cadre d'une relation claire et de confiance et pour cela :
– il mesure ses appréciations ;
– il valorise l'exercice et le travail personnel des élèves ;
– il veille à ce que chaque élève soit conscient de ses progrès, du travail et des efforts qu'il doit produire.

Maîtriser les technologies de l'information et de la communication

Tout professeur est concerné par l'usage des outils propres à ces technologies et leur intégration dans les pratiques pédagogiques. Au sortir de sa formation professionnelle il doit avoir les compétences d'usage et de maîtrise raisonnée des technologies de l'information et de la communication dans sa pratique professionnelle.

Les connaissances et les capacités attendues sont celles du certificat informatique et internet de niveau 2 "enseignant", requis en fin de formation professionnelle. Il est intégré au dossier de compétences du professeur stagiaire.

Connaissances

Le professeur maîtrise :
– les connaissances explicitées dans le référentiel du C2I de niveau 2 "enseignant" ;
– les droits et devoirs liés aux usages des TIC.

Capacités

Le professeur est capable de :
– concevoir, préparer et mettre en œuvre des contenus d'enseignement et des situations d'apprentissage ;
– participer à l'éducation aux droits et devoirs liés aux usages des technologies de l'information et de la communication ;
– s'impliquer dans l'éducation aux risques encourus dans l'utilisation des réseaux numériques ouverts sur l'internet ;
– utiliser les TIC et les outils de formation ouverte et à distance pour actualiser ses connaissances ;
– travailler en réseau avec les outils du travail collaboratif.

Attitudes

Le professeur observe une attitude :
– critique vis-à-vis de l'information disponible ;
– réfléchie et responsable dans l'utilisation des outils interactifs exigée des élèves.

Il actualise ses connaissances et compétences au cours de son exercice professionnel.

Commentaire 5 – La compétence principale est la compétences ***Concevoir et mettre en œuvre son enseignement***, les autres permettant de la réaliser : ainsi, par exemple, pour concevoir son enseignement, faut-il ***Maîtriser les disciplines et avoir une bonne culture générale, organiser le travail de la classe, Prendre en compte la diversité des élèves***, et ***Maîtriser les technologies de l'information et de la communication*** ; ou encore pour mettre en œuvre son enseignement a-t-on à ***évaluer les élèves***, à ***agir en fonctionnaire de l'état de façon éthique et responsable*** (notamment en respectant le programme), etc.

Commentaire 6 – On notera qu'une préparation sérieuse des épreuves du concours du CAPES doit assurer la maîtrise de certains aspects de ces compétences. On indiquera par exemple que « les épreuves orales visent d'abord à évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement sur un thème donné » (BO du 1er janvier 2004).

Commentaire 7 – On notera encore que, comme il est habituel dans ce type de description, le travail d'identification des connaissances, capacités et attitudes n'est pas complet – loin s'en faut – et non fonctionnel. Par exemple, on attend dans une des compétences citées que le professeur soit capable d'organiser l'espace de la classe et le temps scolaire en fonction des activités prévues ; ou encore d'organiser les différents moments d'une séquence, sans pour autant citer des connaissances pertinentes qui permettent que le professeur s'en rende capable : certaines figurent bien sûr dans d'autres compétences, puisqu'on a vu qu'elles n'étaient pas indépendantes (par exemple, l'évaluation est un moment d'une séquence) mais pas toutes. ***Un des buts premiers du Séminaire est d'apporter et de travailler les principales connaissances permettant au professeur de se rendre capable d'accomplir les types de tâches explicités dans le cahier des charges***.

Commentaire 8 – Le deuxième volet du texte sur la mission du professeur, intitulé ***Exercer sa responsabilité dans la classe***, est lui-même subdivisé en trois grands ensembles d'exigences professionnelles : le professeur doit ***connaître sa discipline***, ***savoir construire des situations d'enseignement et d'apprentissage***, et ***savoir conduire sa classe***. Il comprend, de façon synthétique, les six compétences précédentes. Il porte cependant davantage la trace d'une articulation des compétences ou de certaines « manières de faire ». On peut lire par exemple :

> Pour chaque séquence, il définit, dans le cadre de sa progression, le (ou les) objectif(s) à atteindre, sélectionne les contenus d'enseignement, prévoit des démarches et situations variées favorables à l'apprentissage, adaptées aux objectifs qu'il s'est fixés et à la diversité de ses élèves.
>
> Il prévoit la succession des différents moments d'une séquence et en particulier l'alternance des temps de recherche, de tri et de synthèse d'informations en utilisant, de manière appropriée, les différents supports, outils et techniques qu'il a choisis.

Venons-en au troisième et dernier ensemble de compétences.

> **Travailler en équipe et coopérer avec les parents et les partenaires de l'école**
>
> Le professeur participe à la vie de l'école ou de l'établissement. Il contribue également à la vie de l'institution scolaire à l'échelle de la circonscription du premier degré, du département, de l'académie ou même à celle du territoire national en participant à la formation initiale et continue des professeurs.
>
> Il travaille avec les équipes éducatives de l'école et de ses classes ainsi qu'avec des enseignants de sa ou de ses disciplines. Le conseil des maîtres à l'école, le conseil pédagogique au collège ou au lycée constituent des instruments privilégiés du travail en équipe.
>
> Le professeur coopère avec les parents et les partenaires de l'école.
>
> Il aide l'élève à construire son projet d'orientation.
>
> *Connaissances*
>
> Le professeur connaît :
>
> – le rôle et la fonction des associations de parents d'élèves ;

– les partenaires et les interlocuteurs extérieurs à l'école avec lesquels il est amené à travailler ;

– pour ce qui le concerne, les conventions et protocoles liant le ministère de l'éducation nationale à d'autres ministères ou organismes ;

– les dispositifs d'aide à l'insertion des élèves ;

– les procédures d'orientation et les différentes voies dans lesquelles les élèves peuvent s'engager.

Capacités

Le professeur est capable :

– d'inscrire sa pratique professionnelle dans l'action collective de l'école ou de l'établissement, notamment :

– dans le domaine de la programmation des enseignements ;

– dans le domaine de l'évaluation (supports et échelles d'évaluation harmonisés, livrets scolaires, bulletins trimestriels...) ;

– dans le domaine de l'orientation ;

– dans le domaine de l'aide et de l'insertion des élèves, en collaboration avec les autres personnels (professeurs principaux, conseillers principaux d'éducation, enseignants du réseau d'aide spécialisée aux élèves en difficulté (RASED), personnels d'orientation et du secteur médico-social...) ;

– dans le domaine de l'éducation artistique et culturelle par la connaissance des principaux partenaires (professionnels et établissements relevant du ministère chargé de la culture, collectivités territoriales, associations) ;

– dans le domaine des partenariats éducatifs avec les services de l'État (culture, emploi, justice, police, environnement et développement durable, défense...) ;

– de communiquer avec les parents :

– en contribuant à l'établissement d'un dialogue constructif dans le but de les informer sur les objectifs de son enseignement ou de son activité, de rendre compte des évaluations dans un langage adapté, d'examiner les résultats, les aptitudes de leurs enfants, les difficultés constatées et les possibilités d'y remédier ;

– en mobilisant ses connaissances dans le domaine de l'orientation pour aider l'élève et ses parents dans l'élaboration d'un projet professionnel ;

– de contribuer, en coopérant avec des partenaires internes ou externes à l'institution, à la résolution des difficultés spécifiques des élèves dans le domaine de la santé, des comportements à risques et de la grande pauvreté ou de la maltraitance ;

– d'utiliser les possibilités offertes par les services éducatifs installés auprès des musées et autres institutions culturelles, notamment dans le cadre de l'éducation artistique et culturelle ;

– de favoriser l'engagement des parents dans la vie de l'établissement comme dans la valorisation des savoirs ;

– de s'impliquer dans des tâches de formation.

Attitudes

Le professeur observe, dans l'exercice de son activité professionnelle, une attitude favorisant le travail collectif, le dialogue avec les parents et la dimension partenariale.

Se former et innover

Le professeur met à jour ses connaissances disciplinaires, didactiques et pédagogiques, il sait faire appel à ceux qui sont susceptibles de lui apporter aide ou conseil dans l'exercice de son métier. Il est capable de faire une analyse critique de son travail et de modifier, le cas échéant, ses pratiques d'enseignement.

Connaissances

Le professeur connaît l'état de la recherche :

– dans sa discipline ;

– dans le domaine de la didactique, de la pédagogie et de la transmission de savoirs (processus d'apprentissage, didactique des disciplines, utilisation des technologie de l'information et de la communication...).

Le professeur connaît la politique éducative de la France.

Capacités

Le professeur est capable de tirer parti des apports de la recherche et des innovations pédagogiques pour actualiser ses connaissances et les exploiter dans sa pratique quotidienne. *Attitudes* Le professeur fait preuve de curiosité intellectuelle et sait remettre son enseignement et ses méthodes en question. Il s'inscrit dans une logique de formation professionnelle tout au long de la vie.

1.5. La rubrique ***Faisons le point*** n'a pas véritablement lieu d'être aujourd'hui : elle n'existera d'ailleurs que de temps en temps, lorsqu'il y aura matière à… faire le point !

a) En référence au travail de la journée de rentrée, on peut rappeler ici la diffusion de la notice intitulée ***Première rentrée des classes***.

b) Comme tous les documents qui seront diffusés et étudiés, cette notice appelait – ***et appelle !*** – un examen attentif, scrupuleux de la part de chacun : les difficultés qu'on peut y trouver peuvent bien entendu faire l'objet de « questions de la semaine » (voir *infra*), ce qui conduira alors le Séminaire à revenir sur l'étude de la notice.

1.6. Passons à la rubrique des ***Questions de la semaine*** (qui, à partir de la séance prochaine du Séminaire, ouvrira chaque séance).

a) On a vu que le programme de travail du séminaire découlera pour une part essentielle de ces questions.

• Les questions de la semaine permettent à chacun, chaque semaine, de s'exprimer en s'interrogeant et en interrogeant.

• Toute question posée est consultable par chacun des participants sur le site Internet de l'IUFM : cette consultation suppose un mot de passe qui ne doit pas être diffusé à l'extérieur de la promotion.

• Mise ainsi par écrit – et rendue publique ***à l'intérieur du Séminaire*** –, une « question de la semaine » devient *ipso facto* un ***problème*** posé devant le Séminaire, même si les dynamiques en cours conduisent à différer le travail collectif sur tel ou tel de ces problèmes.

• C'est par les questions de la semaine que passe une part fondamentale de l'apport des participants au travail du Séminaire, notamment sous la forme de « remontées du terrain », qu'il s'agisse du stage en responsabilité ou des autres stages : les prendre au sérieux est une dimension du respect que chacun doit porter à la formation, aux formateurs et aux formés. On notera à cet égard que ce dispositif qui existe depuis une dizaine d'années dans le cadre du Séminaire répond clairement à l'objectif de formation en alternance explicité dans le cahier des charges de la formation des maîtres, puisqu'il permet l'articulation entre les besoins exprimés par les élèves professeurs et les apports du Séminaire.

« Des savoirs théoriques déconnectés de la pratique sont inefficaces dans une formation professionnelle et, symétriquement, les situations rencontrées sur le terrain par les professeurs stagiaires ne sont pleinement formatrices que si elles sont analysées à l'aide d'outils conceptuels et des apports de la recherche universitaire. (...) La formation en IUFM doit être en prise sur la réalité scolaire et dispensée en fonction des situations professionnelles rencontrées par les professeurs ».

b) Chacun prend donc le mardi matin un temps de réflexion pour procéder à un examen des difficultés principales qu'il a pu rencontrer jusqu'ici, puis en sélectionne une ou deux qu'il rédige soigneusement, de façon concise, mais clairement explicite.

En séminaire, le mardi après-midi, on examine quels problèmes ont été portés devant le Séminaire la semaine précédente. Nous inaugurons ce travail ici à partir des questions qui ont été posées lors de la journée de rentrée.

Une préoccupation essentielle est d'abord la ***programmation de l'étude***. Voici les questions concernées.

1. Vous avez préconisé le travail de front. Faut-il traiter un chapitre numérique et un autre de géométrie en même temps ? (0)
2. Peut-on donner des devoirs maison assez régulièrement ? (0)
3. Dans quel ordre aborder les chapitres ? (0)
4. Peut-il être judicieux de planifier à l'avance et sur l'année les séances de statistique ? (0)
5. À propos de la progression sur l'année :
   – quels sont les critères pour choisir un ordre ?
   – est-ce qu'on peut préciser l'idée d'alterner les différents thèmes (géométrie – statistique – calcul et fonctions) ? (0)
6. Comment définir le temps que l'on doit consacrer à un thème au sein de la progression annuelle ? (0)
7. Avec une classe de seconde, je compte mener deux thèmes de front dès le début de l'année, avec trois heures consacrées au « cours » (AER, synthèse, exercices), je me pose la question suivante : est-il pertinent de proposer deux heures fixes consécutives avec un thème différent à chaque heure et faire un changement hebdomadaire sur la troisième ? (0)
8. Comment gérer la progression du programme ne sachant pas le temps de travail des élèves ? (0)
9. Comment répartir sur l'année l'ensemble du programme ? C'est à dire :
   – doit-on préparer (prévoir ?) dès maintenant les séquences ?
   – doit-on séparer les quatre branches (calcul- géométrie – données – grandeurs) ? regrouper les mêmes branches ?
10. Comment réfléchir à une progression sans savoir ni notre rythme de travail, ni celui de la classe ? (Programmation) (0)
11. Comment évaluer la durée d'une séance de sorte à ce que l'on puisse réaliser l'intégralité du programme ? (0)
12. La façon dont les chapitres sont disposés dans les livres de mathématiques a-t-elle un lien avec l'ordre dans lequel on doit traiter les chapitres (notions) ? (0)
13. Comment répartir convenablement le nombre d'heures à passer sur chaque chapitre ? (0)
14. Quelle proportion, en terme de durée, attribuer à chaque étape AER / Synthèse / Applications ?

On peut remarquer, sans anticiper sur le forum, que la programmation concerne des ***unités temporelles diverses***, allant d'une séance d'une heure à une année, en passant par une séquence ou une semaine. Dans ce cadre la question des révisions est abordée quelquefois, indirectement :

1. Peut-on proposer un DM à la première séance pour toutes les notions antérieures (vues en classe précédente) pour évaluer le niveau ? (0)
2. Est-il préférable de ne pas noter les tests d'entrée, mais simplement ajouter des remarques ? (0)

Un deuxième centre d'intérêt est constitué de la ***structure ternaire de l'étude***.

1. Comment construire une activité ? (0)
2. Comment construire une activité intéressante ? (0)
3. La structure ternaire AER – synthèse – exercices est-elle appliquée dans d'autres pays ? (0)
4. Une AER étant une activité de recherche (*i.e.* ça part dans tous les sens) sa trace écrite semble plus difficile à organiser que pour la synthèse ou les exercices : pourrait-on voir un exemple d'une bonne trace écrite d'AER ? (0)

5. Avez-vous une idée d'AER autour du thème : « Ensembles de nombres » ? (0)
6. La synthèse de cours doit se faire en une seule fois ou au fur et à mesure (après l'AER correspondante) ? (0)
7. Est-on obligé de faire diviser aux élèves les traces écrites ? (0)
8. Est-ce qu'on doit aborder chaque notion du cours par une AER ? (0)
9. Comment préparer une AER ? (0)
10. Les activités doivent-elles être résolues avant de commencer la synthèse ou la synthèse sert-elle à résoudre l'activité ? (0)
11. Comment organiser les séances d'exercices avec les élèves (les faire réfléchir puis aller au tableau…) ? (0)

Une troisième préoccupation concerne la question de ***l'autorité et des sanctions.***

1. Comment réagir face à un élève non motivé (qui ne prend pas de notes…) ? (0)
2. Que faire avec un élève qui refuserait tout travail (prise de notes, exercices à la maison,…) ? (0)
3. Doit-on parler des sanctions le premier jour ? Que sanctionner exactement (travail non fait, cahiers mal tenus ?) (0)
4. Peut-on menacer d'un zéro si le travail à la maison n'est pas fait ? (0)

Un quatrième thème de questionnement est relatif à l'***hétérogénéité supposée des classes :***

1. Comment gérer des disparités (importantes) de niveau au sein d'une même classe ? (0)
2. Comment peut-on gérer des élèves nécessitant des dispositions particulières, notamment les élèves dyslexiques pouvant bénéficier d'un tiers temps ? (0)
3 Comment peut-on gérer des élèves en difficulté ? L'objectif de l'année est-il de tous les faire progresser ? (0)
4. Comment gérer l'hétérogénéité dans une classe ? Peut-on prendre une heure dans l'emploi du temps pour faire une activité avec différents objectifs selon le niveau ? (0)

L'évaluation est également un problème posé par les questions, mais dont la pression paraît moins importante en ce début d'année :

1. Le premier jour, les élèves peuvent n'avoir pour tout matériel qu'une feuille et un stylo, et je désire les faire travailler sur cahier (suivant les conseils de Brigitte Jauffrey). Partant, je pense me contenter des présentations, puis d'interroger les élèves, tant à l'écrit qu'à l'oral. Que pensez-vous de leur attribuer une note ? (0)

Tout comme la « meilleure » ***façon d'occuper un dispositif*** (l'aide individualisée ou les modules en seconde par exemple),ou encore ***de se comporter avec les élèves.***

2. Forum des questions

2.1. Programmer l'étude

a) Plusieurs des questions de la rentrée, on l'a déjà noté, portent sur la programmation de l'étude. On les reproduit à nouveau ci-après.

1. Vous avez préconisé le travail de front. Faut-il traiter un chapitre numérique et un autre de géométrie en même temps ? (0)
2. Peut-on donner des devoirs maison assez régulièrement ? (0)
3. Dans quel ordre aborder les chapitres ? (0)
4. Peut-il être judicieux de planifier à l'avance et sur l'année les séances de statistique ? (0)

5. À propos de la progression sur l'année :
– quels sont les critères pour choisir un ordre ?
– est-ce qu'on peut préciser l'idée d'alterner les différents thèmes (géométrie – statistiques – calcul et fonctions) ? (0)
6. Comment définir le temps que l'on doit consacrer à un thème au sein de la progression annuelle ? (0)
7. Avec une classe de seconde, je compte mener deux thèmes de front dès le début de l'année, avec trois heures consacrées au « cours » (AER, synthèse, exercices), je me pose la question suivante : est-il pertinent de proposer deux heures fixes consécutives avec un thème différent à chaque heure et faire un changement hebdomadaire sur la troisième ? (0)
8. Comment gérer la progression du programme ne sachant pas le temps de travail des élèves ? (0)
9. Comment répartir sur l'année l'ensemble du programme ? C'est à dire :
– doit-on préparer (prévoir ?) dès maintenant les séquences ?
– doit-on séparer les quatre branches (calcul – géométrie – données – grandeurs) ? regrouper les mêmes branches ?
10. Comment réfléchir à une progression sans savoir ni notre rythme de travail, ni celui de la classe ? (Programmation) (0)
11. Comment évaluer la durée d'une séance de sorte à ce que l'on puisse réaliser l'intégralité du programme ? (0)
12. La façon dont les chapitres sont disposés dans les livres de mathématiques a-t-elle un lien avec l'ordre dans lequel on doit traiter les chapitres (notions) ? (0)
13. Comment répartir convenablement le nombre d'heures à passer sur chaque chapitre ? (0)
14. Quelle proportion, en terme de durée, attribuer à chaque étape AER / Synthèse / Applications ?

b) • Il faut en effet s'efforcer d'établir dès le début de l'année ***une programmation sur l'année de la matière à étudier***. Cette programmation doit être regardée – notamment lorsqu'on débute avec un type de classe donné – comme indicative et révisable : des bilans – et des ***mises à jour*** subséquentes – devront intervenir régulièrement.

• Il arrive qu'une telle programmation soit imposée, au moins partiellement, du fait de l'existence dans l'établissement d'une ***« progression commune »*** pour les classes du même niveau que celle considérée. Cette programmation n'impose véritablement, en général, que de respecter certains ***points de rendez-vous*** correspondant aux ***épreuves communes*** aux classes concernées ; mais elle constitue alors un cadre temporel dans lequel il convient de se glisser.

• S'il n'existe pas de tel cadre, il revient au professeur de le créer – éventuellement en concertation avec d'autres professeurs intervenant dans des classes de même niveau. Il va de soi que, pour cette tâche comme pour toute autre, un professeur stagiaire peut rechercher l'aide de son PCP. En revanche, il est vrai que le programme et le document d'accompagnement sont peu ou prou muets sur l'organisation d'une programmation : la raison en est, apparemment, que cela relève de la « liberté pédagogique » du professeur…

Enquête
Y a-t-il une programmation commune dans votre établissement pour la classe (les classes) que vous avez en responsabilité ?

Si oui, quelle est cette programmation ?

Si non, avez-vous établi une programmation avec votre PCP lors de la prérentrée ?

Si oui, quelle est cette programmation ?

• Comment créer un tel cadre ? Que l'on débute dans l'enseignement ou que l'on débute avec tel type de classes – à l'instar d'un professeur qui, ayant enseigné au collège pendant des années, enseigne pour la première fois en 2de par exemple –, on manque d'un certain nombre d'éléments d'analyse « clinique » qui permettraient de tenter d'élaborer *ab ovo* une programmation « personnelle ». Aussi on gagnera à se référer à des élaborations qui, implicitement ou explicitement, tirent profit d'un savoir d'observation accumulé au fil de plusieurs années d'enseignement.

N.B. : On pourra consulter le résultat de l'enquête 2007-2008 dans le fichier disponible sur la page du Séminaire ; le fichier 2008-2009 devrait être disponible d'ici une à deux semaines.

• On peut aujourd'hui trouver sur l'Internet diverses propositions, telle la suivante, qui figure sur le site *Mathadora* (dû, semble-t-il, à Pierre Amigo, ancien élève de l'IUFM d'Aix-Marseille), à l'adresse http://mathadora.free.fr/lycee/seconde.html#prog.

Chapitre 1 : Outil de calcul pour la seconde (1 sem)

- Organiser un calcul à la main ou à la machine.
- Reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés).
- Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi.
- Résoudre algébriquement une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré.

Chapitre 2 : Outil de géométrie (2 sem)

- Utiliser pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées.

Chapitre 3 : Les nombres (2,5 sem)

- Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.
- Connaître la nature et les écritures d'un nombre.
- Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées.
- Savoir donner un ordre de grandeur.
- Savoir donner la valeur absolue d'un nombre.
- Calculer la distance entre deux nombres.
- Choisir un critère adapté pour comparer des nombres.
- Caractériser des éléments d'un intervalle et le représenter.
- Organiser un calcul à la main ou à la machine.
- Limites de la calculatrice.

Chapitre 4 : Géométrie dans l'espace (2,5 sem)

Manipuler, construire et représenter des solides (patrons, perspective cavalière)
Effectuer des calculs simples de longueur, aire ou volume.
Connaître les positions relatives de droites et plans de l'espace.
Connaître et utiliser les règles d'incidences.

Chapitre 5 : Notion de fonction (2,5 sem)

Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie soit par une courbe, soit par un tableau de données, soit par une formule.
Déterminer l'image d'un nombre.
Décrire avec un vocabulaire adapté (fonction croissante, fonction décroissante, maximum, minimum) ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe.
Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.
Résoudre graphiquement des équations ou des inéquations du type : $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$.

Chapitre 6 : Statistiques (1) (2 sem)

Réfléchir sur la nature des données traitées, et s'appuyer sur des représentations graphiques pour justifier un choix de résumé.
Savoir ce qu'est la moyenne, la médiane, la classe modale, la moyenne élaguée et l'étendue d'une série statistique quantitative.

Savoir calculer de plusieurs manières la moyenne d'une série de nombres.
Utiliser les propriétés de linéarités de la moyenne d'une série statistique.

Chapitre 7 : Fonctions affines (2,5 sem)

Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est une fonction affine.
Caractériser les fonctions affines par le fait de l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable.
Connaître une représentation graphique d'une fonction affine.
Étude du sens de variation d'une fonction affine.
Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré.
Mise en équation d'un problème.
Utiliser un tableau de signe pour résoudre un inéquation ou déterminer le signe d'une fonction

Chapitre 8 : Triangles semblables (2 sem)

Reconnaître des triangles isométriques.
Reconnaître des triangles de même forme.
Construction de tels triangles.
Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.

Chapitre 9 : Fonction carré (1 sem)

Etablir le sens de variation et représenter graphiquement la fonction : $x \mapsto x^2$
Comparer a, a^2 et a^3 lorsque a est positif.
Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé.
Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule.

Chapitre 10 : Statistique (2) (2 sem)

Simulation et fluctuation d'échantillonnage.
Concevoir et mettre en œuvre des simulations simples à partir d'échantillons de chiffres au hasard.

Chapitre 11 : Vecteurs et repérage (2,5 sem)

Multiplication d'un vecteur par un réel.
Repérer les points d'un plan, des cases d'un réseau carré ou rectangulaire, interpréter les cartes et les plans.
Un repère étant fixé, exprimer la colinéarité de deux vecteurs ou l'alignement de trois points.

Chapitre 12 : Fonction inverse et autres fonctions (2,5 sem)

Établir le sens de variation et représenter la fonction $x \mapsto 1/x$.
Connaître la représentation graphique de $x \mapsto \cos x$ et de $x \mapsto \sin x$.
Identifier l'enchaînement des fonctions de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule.
Equation et inéquations de premier degré.

Chapitre 13 : Équation de droites et systèmes (1,5 sem)

Caractériser analytiquement une droite.
Reconnaître que deux droites sont parallèles.
Déterminer le nombre de solution d'un système de deux équation à deux inconnues.
Résoudre des problèmes conduisant à de tels problèmes.

• Mais attention : même si un professeur reprend *ne varietur* une proposition de programmation trouvée ici ou là (y compris sur un site Internet « officiel », comme il en va à l'adresse http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/peda/lyc/progressions/2/prog_sec.htm), ***il reste entièrement responsable du choix qu'il fait***. En particulier, il ne saurait en rien « s'autoriser » de l'auteur, souvent anonyme, de la progression qu'il aurait ainsi reprise à son compte (voir *infra*).

• On trouve bien sûr des propositions de progression relatives aux autres classes. Ce qui suit figure ainsi sur le site d'un collège de Villeneuve d'Asq (http://collegetriolo.free.fr/) pour une classe de 4^e^.
Mais cette proposition appelle un regard critique sévère – on notera par exemple qu'on y réduit les quatre domaines composant le programme de mathématiques à deux seulement, « Algèbre » et « Géométrie » !

Algèbre	Géométrie
Statistiques Nombres relatifs Nombres relatifs Fractions Puissance * Puissance de 10 * Écriture scientifique Proportionnalité * Tableaux et graphique	Triangle rectangle * Propriétés * Cercle circonscrit * Médiatrices Pythagore * Théorème et réciproque Distance et tangente Droite des milieux Thalès Droites remarquables * Hauteur Rappels sur les aires Géométrie dans l'espace * Pyramide
Premier devoir commun de 4e **Fin janvier**	
Calcul littéral * Simplification * Valeur d'une expression Équation et inégalité	Trigonométrie * Cosinus Droites remarquables * Médianes et bissectrices
Deuxième devoir commun de 4e **Fin mars**	
Puissance Proportionnalité * Pourcentages et indice * Vitesse moyenne	Translation Géométrie dans l'espace * Cône

• Pour bâtir « sa » propre programmation, on peut aussi se référer au manuel de la classe, ou, mieux peut-être, à un ouvrage d'exercices (d'où sont éliminées les surcharges cosmétiques qui prolifèrent dans certains manuels). Supposons ici un ouvrage de ce type qui, pour la classe de 2de, propose un découpage en 10 « chapitres ». Si l'on compte prudemment 30 semaines (la progression de 2de reproduite plus haut ne compte que sur… 27,5 semaines), on aboutit, pour chacun des « chapitres », à une durée ouvrable de 3 semaines, c'est-à-dire en l'espèce à 9 heures en classe entière et 3 heures en module : c'est à l'intérieur de ce « budget temps » que l'on situera d'abord chacun des « chapitres » considéré. On ajoutera pour terminer une indication temporelle donnée par le programme de seconde :

> À titre indicatif, le temps à consacrer aux différents chapitres pourrait être de 1/8 pour les statistiques, le reste se répartissant équitablement entre les deux autres chapitres.

Si l'on se fixe 32 semaines de travail, on obtient ainsi 4 semaines pour la statistique et 14 semaines pour chacun des deux autres domaines Géométrie et Calculs et fonctions.

• Il faut noter que toute programmation doit être confrontée au programme de la classe, pour s'assurer qu'elle en respecte les contraintes. Par exemple, pour la classe de seconde et la programmation citée précédemment, la confrontation au programme de seconde montre d'emblée quelques problèmes. En effet, voici ce qu'indique le programme de la classe de seconde à propos de la Géométrie :

> Deux objectifs principaux sont assignés à cette partie du programme :
> – développer la vision dans l'espace ;
> – proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes faits au collège. Pour dynamiser la synthèse et éviter les révisions systématiques, trois éclairages nouveaux sont proposés : les triangles isométriques, les triangles de même forme et des problèmes d'aires.

Or, dans la progression proposée, on voit scindé en deux chapitres séparés de quelques 7 semaines le secteur de la géométrie plane :

> **Chapitre 2 : Outil de géométrie (2 sem)**
> Utiliser pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées.
> **Chapitre 8 : Triangles semblables (2 sem)**
> Reconnaître des triangles isométriques.
> Reconnaître des triangles de même forme.
> Construction de tels triangles.
> Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.

L'évitement des révisions systématiques n'est donc pas empêché par la programmation de l'étude.

De même, le domaine d'étude ***Calcul et fonctions*** est présenté ainsi dans le programme de seconde :

> **Objectifs :**
> – Approfondir la connaissance des différents types de nombres.
> – Expliciter, sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction.
> – Étudier quelques fonctions de références, préparant à l'analyse.
> – Progresser dans la maîtrise du calcul algébrique, sans recherche de technicité, toujours dans la perspective de résolution de problèmes ou de démonstration.
> – Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques.
>
> La plupart de ces objectifs concernent les trois années de lycée.
> Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions. Comme la géométrie, les activités de calcul doivent être l'occasion de développer le raisonnement et l'activité de démonstration.
> Lors de la résolution de problèmes, on dégagera, pour certains exemples étudiés, les différentes phases du traitement : mathématisation et mise en équation, résolution, contrôle de la cohérence des résultats et exploitation.
> On exploitera les possibilités offertes par les tableurs, par les grapheurs et par les logiciels de géométrie.

Le document d'accompagnement renforce le passage précédent :

Le programme rassemble sous un titre unique un bilan sur les ensembles de nombres, les problèmes de calcul numérique et algébrique et l'étude des fonctions. C'est une invitation forte à chaque enseignant pour qu'il construise son cours en faisant interagir ces divers éléments : calcul numérique ou littéral et recherche d'images, résolution d'équations par le calcul ou dans un environnement graphique, de façon approchée ou exacte, ordre entre les nombres et variations de fonctions, etc. On veillera, en particulier, à choisir des problèmes se prêtant à plusieurs approches et admettant des types de résolution variés.

Là encore, la programmation de l'étude observée encourage la révision systématique puisque l'on trouve deux chapitres (chapitres 1 et 3) sur les nombres et le calcul algébrique non reliés à l'étude des fonctions, débutée plus tard, au chapitre 4.

Il est donc ***indispensable de mettre à l'épreuve la programmation envisagée***, et de le faire régulièrement, de manière à faire profiter la programmation de l'étude de sa progression dans la science didactique...

• La programmation interne à un « chapitre », c'est-à-dire à un thème (voire un secteur) composant le programme, est plus délicate : c'est là un problème sur lequel on reviendra quand nous aurons davantage d'outils à notre disposition. Signalons seulement qu'il faut éviter, autant que faire se peut, d'imposer d'emblée des contraintes trop fortes tout en se fixant des bornes temporelles à ne pas dépasser : les structures adoptées doivent être adaptées aux fonctions de l'étude qu'elles doivent permettre de remplir, fonctions qui sont encore trop peu précises lorsque l'on débute pour mettre au point des structures « ajustées ».

Reprise orale des questions pour déterminer les éléments de réponses apportés par ce qui précède. Débat autour de la différence entre les programmations existant en moyenne dans les classes de seconde et ce qui est préconisé par le programme.

c) Certaines questions ont trait à la ***structure ternaire*** de l'étude On les cite à nouveau ci-après.

1. Comment construire une activité ? (0) 2. Comment construire une activité intéressante ? (0) 3. La structure ternaire AER - synthèse – exercices est-elle appliquée dans d'autres pays ? (0) 4. Une AER étant une activité de recherche (*i.e.* ça part dans tous les sens) sa trace écrite semble plus difficile à organiser que pour la synthèse ou les exercices : pourrait-on voir un exemple d'une bonne trace écrite d'AER ? (0) 5. Avez-vous une idée d'AER autour du thème : « Ensembles de nombres » ? (0) 6. La synthèse de cours doit se faire en une seule fois ou au fur et à mesure (après l'AER correspondante) ? (0) 7. Est-on obligé de faire diviser aux élèves les traces écrites ? (0) 8. Est-ce qu'on doit aborder chaque notion du cours par une AER ? (0) 9. Comment préparer une AER ? (0) 10. Les activités doivent-elles être résolues avant de commencer la synthèse ou la synthèse sert-elle à résoudre l'activité ? (0) 11. Comment organiser les séances d'exercice avec les élèves (les faire réfléchir puis aller au tableau…) ? (0)

On rappellera d'abord à ce propos un passage de la notice Première rentrée des classes :

3.3. À l'ancienne opposition binaire Cours / Exercices s'est ainsi substituée une structure ***ternaire***, Activités / Synthèses / Exercices (& problèmes), qui doit elle-même trouver une traduction appropriée dans l'organisation des ***traces écrites***. À nouveau, même dans les classes ayant adopté une organisation ternaire du travail mathématique – elles sont la majorité –, on trouve encore trop souvent une organisation ***binaire*** des traces écrites, incongruité qui diminue l'efficacité du travail effectué avec les élèves. En rupture avec

cette tradition souvent mécaniquement poursuivie, mais en harmonie avec l'organisation de l'étude très généralement adoptée, les traces écrites doivent donc comporter les trois rubriques indiquées ci-dessus.

La « division des traces écrites » apparaît donc comme une condition essentielle de la mise en œuvre d'une organisation de l'étude ternaire demandée par les programmes. À propos de cette structure ternaire, on citera ici l'introduction du programme de mathématiques du collège :

La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, et lorsque c'est possible, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci sont bien maîtrisées, elles fournissent à leur tour de nouveaux « outils », qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. Ainsi, les connaissances peuvent prendre du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose et des problèmes qu'il résout. Les situations choisies doivent :

- prendre en compte les objectifs visés et une analyse préalable des savoirs en jeu, ainsi que les acquis et les conceptions initiales des élèves ;
- permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises par tous ;
- créer rapidement un problème assez riche pour provoquer des conjectures ;
- rendre possible la mise en jeu, puis la formulation des notions ou des procédures dont l'apprentissage est visé ;
- fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.

Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l'établissement de connaissances nouvelles, elle est également un moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles.

L'utilisation d'outils logiciels est particulièrement importante et doit être privilégiée chaque fois qu'elle est une aide à l'imagination, à la formulation de conjectures ou au calcul. Cette utilisation se présente sous deux formes indispensables, notamment dans le cadre des compétences du socle commun : l'usage d'un vidéoprojecteur en classe et l'utilisation par les élèves d'ordinateurs « en fond de classe » ou en salle informatique.

(...)

Pour être efficaces, les connaissances doivent être identifiées, nommées et progressivement détachées de leur contexte d'apprentissage.

D'une part, toute activité (qui peut s'étendre sur plusieurs séances) doit être complétée par une synthèse. Celle-ci doit porter sur les quelques notions mises en évidence (définitions, résultats, théorèmes et outils de base) que, désormais, les élèves doivent connaître et peuvent utiliser. Elle est aussi l'occasion de dégager les méthodes de résolution de problèmes qui mettent en œuvre ces notions. Il convient, en effet, de préciser à chaque étape de l'apprentissage quelles connaissances sont désormais en place et donc directement utilisables.

D'autre part, il est nécessaire de proposer des situations d'étude dont le but est de coordonner des acquisitions diverses. Dans cette optique, l'enseignant réalise, avec les élèves, des synthèses plus globales, à l'issue d'une période d'étude et propose des problèmes dont la résolution nécessite l'utilisation de plusieurs connaissances. Le traitement de ces problèmes permet de souligner le sens, l'intérêt, la portée des connaissances mathématiques, que ce soit dans d'autres disciplines ou dans la vie quotidienne (pourcentages, échelles, représentations graphiques...). Certains problèmes peuvent prendre appui sur des éléments empruntés à l'histoire des mathématiques. Les moyens modernes de communication (informatique, banques de données, audiovisuel...) sont également utilisés chaque fois que leur usage est justifié.

Examen oral des passages précédents et de la mesure dans laquelle ils apportent des éléments de réponses aux questions posées.

La question de l'autorité et des sanctions sera abordée la semaine prochaine.

3. Observation & analyse

3.1. Questions d'enseignement

a) Même si ***toutes*** les questions professionnelles sont importantes, si les réponses qu'on leur donne peuvent se révéler cruciales, le ***cœur du métier*** de professeur de mathématiques est fait de questions du type suivant : « Comment concevoir et réaliser une séance de travaux dirigés, dans une classe de terminale ES, sur la notion d'événements indépendants ? » Cette dernière question pourra par exemple surgir à l'occasion du ***stage de pratique accompagnée***, dès lors que celui-ci se déroule au lycée et que le ***professeur d'accueil*** a en responsabilité une terminale ES. Pour le moment, nous nous en tiendrons à de semblables questions, mais à propos des classes de la 5^{e} à la 2de.

b) Nous nous arrêterons ici sur la question *Q* suivante : « Comment concevoir et réaliser une séance (ou une partie de séance), en classe entière, dans une 5^{e}, sur le parallélogramme? »

• L'examen du programme de 5^{e} fait apparaître, dans le ***domaine*** de la géométrie, un ***secteur*** d'études intitulé ***Figures planes***. (Ce domaine comporte deux autres secteurs d'études : ***Prismes droits, cylindres de révolution et Symétries***.) Ce secteur *Figures planes* comporte comme premier ***thème d'étude***, le ***parallélogramme***.

• Voici ce que le programme *stricto sensu* dit du thème du parallélogramme[1] :

Connaissances
Parallélogramme.

Capacités
Connaître et utiliser une définition et les propriétés (relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles) du parallélogramme.

Exemples d'activités, commentaires
Le travail entrepris sur la symétrie centrale permet de justifier des propriétés caractéristiques du parallélogramme que les élèves doivent connaître.

Commentaires spécifiques sur le socle
Il est seulement attendu des élèves qu'ils sachent utiliser en situation ces propriétés, notamment pour la reconnaissance d'un parallélogramme, d'un rectangle, d'un losange ou pour leur tracé.

• En revanche, le programme est fort peu disert sur ***l'utilisation*** de ces notions de parallélogramme et propriétés caractéristiques que les élèves doivent apprendre à maîtriser… Dans la présentation du domaine de la Géométrie, on peut cependant lire :

> En classe de Cinquième, l'étude des figures planes se poursuit. Une deuxième transformation géométrique, la symétrie centrale, permet de réorganiser et de compléter les connaissances sur les figures, dont certaines propriétés peuvent être démontrées, mais, pour le socle commun, ces démonstrations ne sont pas exigibles. Le programme s'organise autour du parallélogramme et du triangle.
> (...)

[1]. On notera que la symétrie, que le programme dit nécessaire pour justifier des propriétés du parallélogramme, est le troisième secteur d'étude : on a ici un indice supplémentaire du fait que l'ordre de rédaction du programme n'est pas un ordre d'étude avec la classe.

Les travaux de géométrie plane prennent toujours appui sur des figures dessinées, suivant les cas, à main levée, à l'aide des instruments de dessin et de mesure, ou dans un environnement informatique. Ils sont conduits en liaison étroite avec l'étude des autres rubriques. Les diverses activités de géométrie habituent les élèves à expérimenter et à conjecturer, et permettent progressivement de s'entraîner à des justifications *au moyen de courtes séquences déductives* mettant en œuvre les outils du programme et ceux déjà acquis en classe de Sixième.

Une question surgit donc, essentielle : « À quoi sert la notion parallélogramme ou ses propriétés caractéristiques ? Quels en sont, du moins, les usages possibles, pertinents en classe de 5^e^ pour étudier les configurations ? »

• Les professeurs ont ainsi à affronter un problème clé : déterminer les ***raisons d'être*** de la notion de parallélogramme. L'enseignement doit en effet se bâtir sur une réponse à la question $Q^{\#}$ suivante : Pourquoi la notion de parallélogramme a-t-elle attiré l'attention des mathématiciens, et pourquoi demande-t-on aujourd'hui encore aux élèves de la connaître – en vue de quels usages, de quelles utilisations ?

c) La réponse qui sera apportée à la question $Q^{\#}$ précédente commandera la réponse apportée à la question Q : la rencontre effective des élèves avec la notion parallélogramme et ses propriétés caractéristiques devra se faire dans une situation où cette notion et/ou ces propriétés apparaîtront ***utiles***, voire ***indispensables***, pour résoudre un ***problème*** (de géométrie) d'un certain ***type*** qui, lui-même, puisse être regardé comme l'une des raisons d'être, l'une des utilisations significatives de la notion.

d) Mais quel type de problèmes ? Pour répondre, on peut examiner les réponses $R^{\lozenge}$ observables « autour de soi » – dans les ***archives du métier*** (au sens large) – à la question Q. C'est ce que l'on fera en allant voir, non un manuel par exemple, mais une observation effective dans une classe de 5^e^.

Distribution et examen du compte-rendu de la séance : voir le fichier

On analysera, dans un premier temps, la partie relative à l'activité proprement dite qui débute au milieu de la page 2 par le paragraphe suivant :

P : « Bon, on passe à l'activité n° 2. Vous pouvez ranger vos exercices. » Un élève distribue la feuille de travail. Une élève s'enquiert de la place à lui donner : « C'est après l'activité 2 ? » P : « Oui… » Puis un élève lit l'énoncé (voir la figure ci-après) : « Le sommet C du parallélogramme ABCD est sorti des limites de la feuille. Tracer la partie visible de la droite (AC). »

Travail individuel ou en binôme

1. Que voit-on dans la séance observée des mathématiques étudiées ? (Quelles sont les mathématiques étudiées ?)
2. Que voit-on, dans la séance observée, à propos de la réponse à la question Q « À quoi sert la notion de parallélogramme et ses propriétés caractéristiques ? »

Les élèves professeurs rendent une réponse écrite individuelle ou par binômes.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 2 : mardi 9 septembre 2008

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse // 2. Forum des questions

0. Questions de la semaine

On retrouve cette semaine des thématiques déjà abordées la semaine dernière, et en premier lieu la ***programmation de l'étude*** comme en témoigne par exemple la question suivante :

Vous nous avez conseillé d'aborder deux thèmes simultanément (Algèbre / Analyse). Quel est l'intérêt d'une telle méthode ? Avantages par rapport au cas où on traite les thèmes individuellement ? (2de, 1, FVB)

La thématique de l'***organisation de l'étude*** est également source de nombreux questionnements, avec la *conception des AER* :

Faut-il faire toutes les démonstrations en AER ou peut-on en faire dans la partie synthèse ? **(5^{e} & 4^{e}, 1, BM)**

ou bien la *constitution des groupes d'aide individualisée* en seconde

Faut-il souvent modifier les groupes d'aide individualisée ? **(2de, 1, FB)**

On citera encore l'***utilisation des TICE*** :

Est-il primordial que les supports de cours soient tapés sur ordinateur (DM, DS, cours) ou peuvent-ils être manuscrits ? **(2de, 1, NC)**

Les ***devoirs***, l'***autorité*** et la ***discipline*** ou encore les ***relations avec l'environnement proche*** (parents d'élèves par exemple).

1. Observation et analyse

On poursuit ici le travail d'observation et d'analyse de la question professionnelle suivante :

Q – « Comment concevoir et réaliser une séance (ou une partie de séance), en classe entière, dans une 5^{e}, sur le parallélogramme ? »

Nous avions vu que l'élaboration d'une réponse à cette question dépendait des ***raisons d'être*** de la notion de parallélogramme, soit de la réponse apportée à la question $Q^{\#}$ suivante : Pourquoi la notion de parallélogramme a-t-elle attiré l'attention des mathématiciens, et pourquoi demande-t-on aujourd'hui encore aux élèves de la connaître – en vue de quels usages, de quelles utilisations ? Ou encore en d'autres termes : « À quoi sert la notion parallélogramme ou ses propriétés caractéristiques ? Quels en sont, du moins, les usages possibles, pertinents en classe de 5e pour étudier les configurations ? » En effet, la rencontre effective des élèves avec la notion parallélogramme et ses propriétés caractéristiques devra se faire dans une situation où cette notion et/ou ces propriétés apparaîtront ***utiles***, voire ***indispensables***, pour résoudre un ***problème*** (de géométrie) d'un certain ***type*** qui, lui-même, puisse être regardé comme l'***une des raisons d'être***, l'une des utilisations significatives de la notion.

Pour répondre à ces questions, on peut examiner les réponses $R^\lozenge$ observables « autour de soi » – dans les ***archives du métier*** (au sens large). C'est ce que nous avons débuté en allant voir, non un manuel par exemple, mais une observation effective dans une classe de 5e (fichier disponible sur le site).

Nos analyserons, dans un premier temps, la partie relative à l'activité proprement dite qui débute au milieu de la page 2 par le paragraphe suivant :

P : « Bon, on passe à l'activité nº 2. Vous pouvez ranger vos exercices. » Un élève distribue la feuille de travail. Une élève s'enquiert de la place à lui donner : « C'est après l'activité 2 ? » P : « Oui… » Puis un élève lit l'énoncé (voir la figure ci-après) : « Le sommet C du parallélogramme ABCD est sorti des limites de la feuille. Tracer la partie visible de la droite (AC). »

Les élèves professeurs ont rendu une réponse écrite individuelle ou par binômes aux deux questions suivantes :

1. Que voit-on dans la séance observée des mathématiques étudiées ? (Quelles sont les mathématiques étudiées ?)
2. Que voit-on, dans la séance observée, à propos de la réponse à la question Q « À quoi sert la notion de parallélogramme et ses propriétés caractéristiques ? »

32 réponses ont été produites dont 11 par binôme. On notera que 4 de ces réponses ne mentionnent pas la deuxième question.

Nous analyserons d'abord les réponses à la première question. Les voici.

1. Géométrie, plus précisément une propriété relative au parallélogramme. (MB)
2. Les propriétés du parallélogramme. (SA & AD)
3. Propriété du parallélogramme (HP)
4. Les mathématiques étudiées sont le parallélogramme et ses propriétés. (DCB)
5. Géométrie plane et une propriété caractéristique du parallélogramme. Problème de construction. (FD & AM)
6. Dans cette activité, on cherche à déterminer une des propriétés du parallélogramme. Remarquons que les élèves semblent au départ, mal interpréter la question (ils cherchent à trouver le point C). (FB)
7. Les élèves sont perturbés par l'absence du point C. Pour tracer la droite (AC), ils pensent qu'il leur faut absolument le point C. La distinction entre droite et point ne semble pas totalement comprise. Ici est étudié une des propriétés du parallélogramme. (MR)
8. Les mathématiques étudiées sont certaines propriétés dans le parallélogramme en classe de 5e. Dans un premier temps on explicite la question posée. Quels sont les outils nécessaires à la résolution. On aboutit à une conjecture que l'on expérimente sur logiciel. La propriété est alors admise. On l'utilise alors pour répondre à la question posée. (LA)
9. Les mathématiques étudiées concernent le parallélogramme, et plus précisément le fait que ses diagonales se coupent en leur milieu. (BM)
10. Le but de cette activité est de déterminer une propriété géométrique du parallélogramme (les diagonales se coupent en leur milieu). Les élèves ont du mal à comprendre la question. Pour tracer la droite (AC), ils veulent utiliser le point C alors que celui-ci est inconnu. (EV)

11. Une des propriétés du parallélogramme : les diagonales se coupent en leur milieu. (BF)

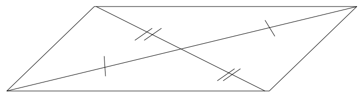
12. Les diagonales se coupent en leur milieu. (RC & YP)

13. Les mathématiques étudiées dans cette séance sont le parallélogramme et ses propriétés. Un élève conjecture que les diagonales se coupent en leur milieu, ce qui permet de résoudre le problème. On cherche les propriétés du parallélogramme à partir du problème. Les élèves ont des difficultés à différencier droites et points: conjecture, vérification. (CG)

14. Mathématiques étudiées : Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. (définition ; tracé sur cabri) ; Si un quadrilatère est un parallélogramme alors les diagonales se coupent en leur milieu (conjecturée, expérimentée, admise) (EM & DF)

15. Exo1 : Côtés opposés parallèles
Éléments d'une démonstration.
Exo 2 : diagonales se coupent en leur milieu. (SS)

16. Les mathématiques étudiées concernent dans un premier temps :
les problèmes de construction: milieu, parallèles, droites.....
une propriété du parallélogramme : les diagonales se coupent en leur milieu. (NC & VD)



17. C'est une séance d'AER qui s'inscrit dans le thème « Géométrie ». C'est un travail de recherche tout d'abord en autonomie, puis les élèves confrontent leurs résultats, tout en étant guidés ou rectifiés par le professeur. Ainsi par tâtonnement, les propriétés du parallélogramme sont découvertes, notamment grâce à l'outil informatique « Cabri Géométrie » qui aura permis aux élèves d'expérimenter par eux-mêmes ces propriétés importantes.
Ils ont aussi mis en évidence une autre technique de résolution qui sera abordée au prochain cours. (RR)

18. Durant le cours, on étudie un problème de construction. Plus précisément, il s'agit de construire une droite, en fait, une diagonale d'un parallélogramme. Il y a donc deux notions géométriques:
- la droite (pour construire une droite il faut 2 points) ;
- le parallélogramme. (NL)

19. Par deux points distincts du plan passe toujours une seule droite.
Intersection de deux droites non parallèles.
Caractérisation du parallélogramme. (HL & VB)

20. Les élèves travaillent sur une propriété relative au parallélogramme. Calculs numérique, géométrique. Propriétés géométriques, parallélisme. (SDM)

21. Bien lire un énoncé de mathématiques.
- Construction d'une droite; il faut deux points distincts.
Trouver les caractéristiques d'un parallélogramme (diagonales qui se coupent en leur milieu). (NB)

22. Le professeur rappelle que pour tracer une droite il faut deux points.
Le professeur utilise cette activité pour faire ressortir la propriété suivante des parallélogrammes. « les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu », en utilisant l'activité « où C n'est pas sur la feuille » et il vérifie la conjecture avec Cabri. (NM & FVB)

23. Ce que je vois comme mathématiques dans cette activité :
- utilisation du milieu d'un segment ;
- découverte d'une caractérisation du parallélogramme (par l'intuition, par géométrie dynamique) ;
- définition d'une droite par la donnée de 2 points ;
- rédaction d'une assertion logique ;
- notion de symétrie centrale. (PAR)

24. Dans la séance on observe comment tracer une droite grâce à deux points. On observe également une recherche d'un point par les élèves, puis une élaboration progressive du parallélogramme. (MEF)

25. Il s'agit d'une activité portant sur l'utilisation des propriétés du parallélogramme, afin de tracer une droite dont on ne connaît qu'un point. (CD)

26. Il s'agit d'une AER portant sur le problème: tracer la partie visible de la droite (AC) du parallélogramme ABCD. Elle utilise en outre: par deux points distincts passe une seule droite.

Cette activité débouche sur la propriété suivante : Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. (OD)

27. Il s'agit d'un problème de construction : trouver un deuxième point pour construire une droite. Deux points distincts caractérisent complètement une droite. On utilise le fait que cette droite recherchée est la diagonale d'un parallélogramme. (MK)
28. La séance observée est une AER qui permet d'aboutir à une propriété caractéristique du parallélogramme, dont les élèves doivent faire une formulation vers la fin de la séance. Au fur et à mesure de la séance, les prises de paroles des élèves permettent des conjectures mais aussi des erreurs rectifiées parfois par les élèves eux-mêmes. Les mathématiques: tracé d'une droite. (SB & SEK)
29. Le compte rendu de la séance fait apparaître deux éléments technologiques (essentiellement) « pour tracer une droite on a besoin de deux points » (rappelé par un élève). « Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu ». Ce dernier élément émerge avec l'activité: La tâche « tracer la droite (AC) » appelle la tâche « trouver le point d'intersection des diagonales. (AN)
30. Dans cette activité la propriété caractéristique du parallélogramme est utilisée pour finir la construction d'un parallélogramme. (NM & FVB)
31. Mise en place d'une technique pour tracer une droite (connaissance de deux points distincts). Recherche du deuxième point par les élèves. Par expérimentation sur ordinateur les élèves découvrent que le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est le milieu de ces diagonales. (RA & AC)
32. Il s'agit de tracer la diagonale d'un parallélogramme dont une des extrémités n'est pas dans la feuille. Les élèves voient la nécessité d'un second point pour tracer ce bout de segment, ils conjecturent que les diagonales se coupent en leur milieu puis ils vérifient, grâce à un logiciel de géométrie. Ils construisent le milieu de la diagonale (BD] puis tracent la diagonale [AC] (CC & AG)

On trouvera ci-dessous une brève synthèse des commentaires développés oralement.
Commentaire 1 – On notera d'abord que certaines réponses (1 à 8 ; 17, etc.) sont trop générales pour être informatives : on ne sait pas de quelle, voire quelles, propriété(s) du parallélogramme il s'agit, ou encore de quel problème de construction, ou de quelle technique
Commentaire 2 – On voit ensuite apparaître massivement des notions mathématiques, des propriétés : « les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu » (9 à 17 notamment), « la connaissance d'une droite du plan nécessite d'en connaître deux points » (18, 19, 21, 22, 23 etc.), milieu d'un segment ou symétrie centrale, etc.
Commentaire 3 – Des réponses mettent également en évidence le type de problèmes qu'il s'agit d'étudier ou de résoudre (24 à 30 notamment) : « tracer une droite », « tracer une droite dont on ne connaît qu'un point », « Trouver un deuxième point pour tracer une droite », « Trouver le point d'intersection des diagonales », etc.
Commentaire 4 – On observe également des tentatives plus ou moins abouties pour mettre en relation les notions et les propriétés observées avec le type de problèmes identifié (25, 26, 27, 29 notamment), quelques-unes s'essayant à décrire une technique de réalisation du type de problèmes (31 et 32).
Commentaire 5 – Un tiers des réponses proposées (11/32) évoquent les élèves, d'autres moins nombreuses le professeur ; même si, quelquefois, elles permettent de décrire de l'activité mathématique (réponse 32 par exemple), il faut apprendre à voir les mathématiques étudiées et à étudier de manière « objective », même si elles sont contextualisées par rapport au niveau de classe (5^e, 4^e, 2^{de}, etc.) où elles sont étudiées ou doivent l'être.
Commentaire 6 – Un certain nombre de réponses comporte des notations qui relèvent de l'organisation de l'étude, nous y reviendrons ultérieurement.

Examinons maintenant les réponses à la deuxième question, que l'on rappelle ci-après.

2. Que voit-on, dans la séance observée, à propos de la réponse à la question *Q* « À quoi sert la notion de parallélogramme et ses propriétés caractéristiques ? »

1. ? (MB)

2. Je ne comprends pas la question. (HP)

3. Dans cette activité, elle sert d'outil à la résolution d'un problème. (LA)

4. Les propriétés sont utilisées pour émettre des conjectures et faire des démonstrations. (SA & AD)

5. Élaborer des propriétés de parallélisme, de milieu. (SDM)

6. Les propriétés du parallélogramme permettent de résoudre des problèmes de construction. (NB)

7. Les propriétés du parallélogramme servent à certaines constructions géométriques. (FB)

8. Ses propriétés servent à la résolution de problèmes (construction lieux géométriques). (CG)

9. On voit que les propriétés du parallélogramme sont utiles à la construction de lieux géométriques. (EV)

10. Une propriété des diagonales permet de résoudre un problème de construction, en déterminant un point de la diagonale autre que les sommets du parallélogramme. (MK)

11. Ici, la propriété du parallélogramme concernant ses diagonales, permet de compléter une figure. On utilise donc la condition nécessaire :parallélogramme ⇒ les diagonales se coupent en leur milieu. (NL)

12. Utilisation des propriétés de certaines figures (parallélogramme) pour la construction de la partie manquante. (DCB)

13. D'après la séance observée, la notion de parallélogramme et ses propriétés caractéristiques sont utilisées pour déduire la construction de la partie cachée d'une figure, (ici une droite). (BM)

14. Ici elle sert à tracer une droite donnée. (CD)

15. Ici cela sert à tracer une droite. (LP)

16. La notion de parallélogramme sert à tracer des droites particulières, ici (AC). (RA &AC)

17. Il est curieux que les élèves utilisent une propriété alors qu'elle sera énoncée qu'à la fin de la séance (les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu). On tente ici de motiver la propriété en question dans un problème de construction.

Peut-être aurait-on pu organiser différemment : a) faire découvrir la propriété (cf. le logiciel) ; b) Montrer son intérêt dans ce cas.

Remarque : Pourquoi ne pas s'intéresser plus à la construction des angles, alternes, externes internes ? Aux autres méthodes? Le problème « tracer (AC) » semble motiver la propriété... c'est vraiment curieux. (NC & VD)

18. Tracer une droite particulière, avec des contraintes, sachant qu'elle passe par un point fixé. (BF)

19. Tracer une droite dont on ne connaît qu'un point. (RC & YP)

20. Tracer une droite (AB) par exemple, en ne connaissant que l'un des deux points nommés (A ou B). (FD & AM)

21. La notion de parallélogramme et ses propriétés caractéristiques servent à résoudre des problèmes concrets comme le tracé de la droite (AC) alors que le point C n'existe pas sur la feuille.

Cela développe l'esprit de recherche des élèves qui doivent faire face à une situation particulière, inconnue.... Cette notion et ses propriétés leur permettent de trouver une « voie », un « chemin » vers la solution. (RR)

22. La séance observée permet de tracer la partie visible d'une des deux diagonales d'un parallèlogramme dont un des deux points n'apparaît pas sur la figure.

Remarque : Il aurait peut-être été plus motivant de demander de calculer la longueur AC. (EM & DF)

23. La propriété de concours des diagonales en leur milieu a permis de tracer une diagonale en connaissant uniquement l'autre diagonale et un sommet du parallélogramme. (CC & AG)

24. On voit que les élèves aboutissent à la propriété suivante du parallélogramme: « si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu ». (MEF)

25. Quant à la notion de parallélogramme elle est visiblement, fortement liée à la notion de symétrie. (AN)

26. Elle sert à aborder les symétries centrales. (HL & VB)

27. « À quoi sert la notion de parallélogramme et ses propriétés caractéristiques » : Aborder la symétrie centrale. (OD)

28. La notion de parallélogramme permet l'introduction de la symétrie centrale. (SB & SEK)

On retrouve un élément déjà noté à propos des réponses à la première question, l'imprécision plus ou moins grande des formulations. On notera aussi la mention de « l'introduction de la symétrie centrale », qui apparaît en contradiction avec ce que mentionne le professeur dans le compte rendu « On pourrait le démontrer, mais c'est un peu long. Donc on va l'admettre. », puis avec le débat de la fin de la séance « Un débat s'esquisse : s'agit-il d'une symétrie centrale ? », ainsi qu'avec le programme que l'on avait cité :

Exemples d'activités, commentaires Le travail entrepris sur la symétrie centrale permet de justifier des propriétés caractéristiques du parallélogramme que les élèves doivent connaître.

Une bonne partie des réponses comporte cependant l'idée essentielle : c'est le fait de construire la droite (AC) dont seul le point A est sur la feuille, le point C étant « inaccessible », qui motive l'émergence de la propriété des diagonales, ou encore qui en fournit une ***raison d'être***. On notera qu'en fait, il suffit de savoir que la diagonale [AC] coupe la diagonale [BD] au milieu de [BD] ; le fait que ce point soit aussi le milieu de [AC] importe peu. Il n'en irait pas ainsi si le problème était, non de tracer la diagonale, mais de déterminer la distance AC en ne mesurant que des distances entre points de la feuille de travail comme le suggère l'une des réponses précédentes.

On voit ainsi apparaître, à travers les réponses citées, trois ingrédients pertinents permettant d'***analyser les mathématiques étudiées*** dans la séance.

Des ***types de tâches*** qu'il s'agit accomplir :

Ici c'est le type de tâches T qui est proposé à l'étude :

T : Sur une feuille où on a voulu tracer un parallélogramme ABCD, le sommet C tombe hors de la feuille ; en restant dans les limites de la feuille, tracer la partie de la diagonale [AC] qui se trouve sur la feuille.

type de tâches qui relève du type de tâches plus général suivant

T✓ : Tracer une droite, d, dont on ne connaît qu'un point.

qui vient en motiver l'étude.

Une ***technique*** relative à ce type de tâches T émerge et est mise en œuvre dans la séance :

τ : 1) on construit et on marque le point O milieu du segment [BD] ;
2) on trace la partie de la demi-droite [AO) qui figure sur la feuille de travail.

Elle est produite, justifiée, principalement par l'***élément technologique*** suivant

θ_δ. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

La ***technologie*** « complète » $\boldsymbol{\theta}$ de τ doit comporter, bien entendu, une ***justification*** de la propriété clé, θ_δ.

• Ici, cette justification ne saurait être simplement invoquée, ainsi qu'on le fait quand on suppose la propriété utilisée « bien connue » et, en particulier, ***antérieurement justifiée*** – ce qui, en fin de 4^e, devrait par exemple être le cas des deux propriétés « les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu » et « dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, elle coupe le troisième en son milieu », la première ayant été justifiée en 5^e et la seconde en 4^e.

• La justification donnée dans la séance observée est de type ***expérimental*** (et non de type ***déductif***, ainsi qu'il en irait si la démonstration évoquée par P avait été effectuée). Bien que l'expérience graphique exigée soit, dans la séance observée, simplement ***simulée*** sur un ordinateur, le discours technologique qui en découle peut être restitué ainsi :

> L'expérience montre que, lorsqu'on trace un parallélogramme ABCD ainsi que ses diagonales [AC] et [BD], celles-ci se coupent en un point I tel que l'on ait AI = IC et BI = ID ; en d'autres termes, les diagonales se coupent en leur milieu.

Il conviendra d'en ajouter un quatrième, la ***théorie Θ***, qui est un discours qui produit, justifie et rend intelligible la technologie, et sur lequel nous reviendrons, pour obtenir un modèle permettant d'analyser l'activité mathématique : ***une praxéologie mathématique*** que l'on notera $[T_i / \tau_i / \theta_i / \Theta_i]_{i \in I}$. est en effet composée d'un ou de plusieurs ***types de tâches***, d'une ou plusieurs ***techniques*** permettant d'accomplir ce ou ces types de tâches, d'une ou plusieurs ***technologies*** qui justifient, produisent, rendent intelligibles les techniques et d'une voire des ***théories*** qui justifient, produisent, rendent intelligibles les technologies.

On notera que certains ingrédients mathématiques ne font pas partie de la praxéologie mathématique à mettre en place mais en permettent la mise en place : par exemple les éléments relatifs au milieu d'un segment sont connus et le travail de la classe s'appuie sur cette connaissance pour produire la praxéologie mathématique enjeu de l'étude. On y reviendra.

Pour poursuivre le travail, on examinera la ***vidéo d'un épisode de la séance,*** qui correspond au passage du compte rendu suivant :

P s'adresse bientôt à la classe : « Bon, on va partager les solutions. » Elle sollicite un élève : « Explique-nous ce que tu as fait. » L'élève a… ajouté une feuille pour tracer le parallélogramme. Une élève, interrogée, va droit au but : « On trace le segment [DB], on prend le milieu, on le nomme, et après on trace (AI), si I est le milieu… » Plusieurs ont trouvé cette solution. Une élève a fait comme le premier élève interrogé. Un autre élève parle de l'angle . P : « Mais où le tracer l'angle ? » Un élève encore propose une tentative qui n'aboutit pas. Un autre veut faire la symétrie par rapport à (AD). P indique qu'on verra cette idée demain : pour le moment, on examine la solution par le milieu de [DB]. Après un court dialogue à ce sujet, P écrit :

> Les diagonales [AC] et [DB] se coupent,
> en un point O

P : « Il se balade sur le segment ? Il est où ? » « Au milieu », répond une voix. Un autre élève intervient ; il a compris la solution, mais il semble qu'il veuille « placer le point C », à partir de A et O. P fait reformuler le problème : il s'agit de tracer la droite (AC), pas le point C. Un élève encore parle de « trouver où est le point C ». P : « Est-ce que c'est ça le problème ? » Des élèves en chœur : « Non ! » Mais certains semblent avoir un peu de mal à l'entendre.

P : « Je vous propose d'expérimenter à l'ordinateur pour voir si on a bien les diagonales qui se coupent en leur milieu. »

Commentaires oraux

Pour clore, provisoirement, cette rubrique, on s'efforcera de répondre à la question suivante à propos de la deuxième partie du compte-rendu :

3. Que voit-on dans la séance observée de l'organisation de l'étude ? (Comment les mathématiques sont-elles étudiées ?) On s'efforcera de préciser les fonctions des différents épisodes.

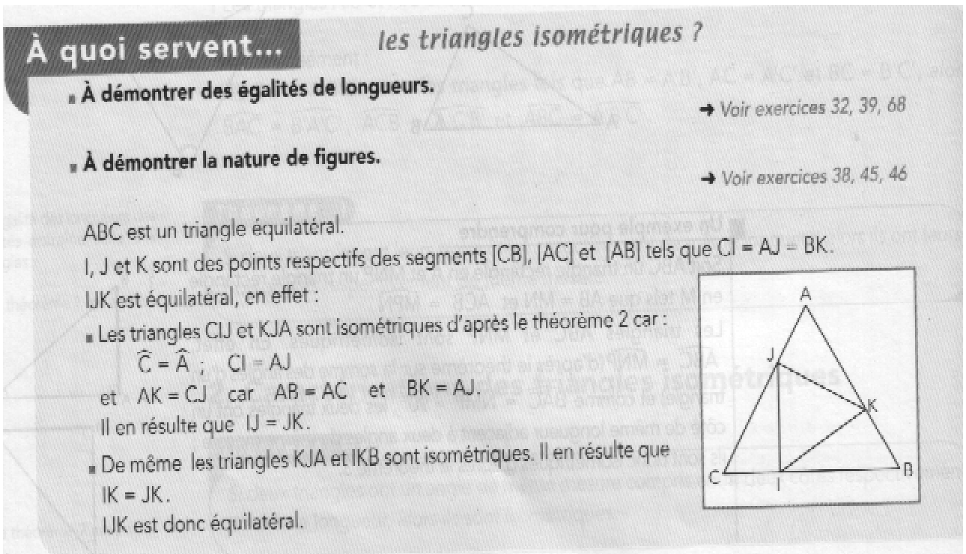
Les élèves professeurs rendent une réponse écrite individuelle ou par binômes.

2. Forum des questions

Motiver son enseignement

1. Introduire des triangles isométriques avec une configuration complexe du plan est-il pertinent ? **(2de, 1)**
2. En guise de première séquence, je compte faire étudier à mes élèves le thème : « Nature et écriture des nombres ». Je compte démarrer par une activité assurant la première rencontre avec le type de tâches : déterminer la nature d'un nombre.
a) Comment peut-on faire émerger la technique : « Pour déterminer la nature d'un nombre, on cherche le plus petit ensemble auquel il appartient » ?
b) Je pense faire émerger la technique de décomposition en facteurs premiers à l'occasion de cette même activité, car il me semble trouver la raison d'être de ce type de tâches dans la simplification des radicaux. Qu'en pensez-vous ? **(2de, 1)**
3. Comment concevoir une AER sur le thème des statistiques ? **(2de et 1re STG , 1)**
4. La section Arts Appliqués du Lycée dans lequel j'enseigne est le fleuron de l'établissement. Il m'a été conseillé d'orienter mes cours et mes activités sur cette section. Dois-je m'y résoudre ? **(2de, 1)**

1. La recherche d'***une raison d'être*** des mathématiques enseignées, soit une situation problématique pour laquelle ces mathématiques permettent de produire une réponse, est assurément le premier élément sur lequel s'appuyer pour concevoir une AER. La première question suppose ainsi qu'il y ait une raison d'être des triangles isométriques dans l'étude d'une « configuration complexe du plan ». « Étudier une configuration plane » est un type de tâches trop « vaste » pour qu'on voit se dessiner une raison d'être d'un thème : il faut préciser la nature de l'étude à mener. Pour les triangles isométriques, un ouvrage pour la classe de seconde[2] donne par exemple les deux raisons d'être suivantes :


À quoi servent... *les triangles isométriques ?*

- **À démontrer des égalités de longueurs.** → *Voir exercices 32, 39, 68*
- **À démontrer la nature de figures.** → *Voir exercices 38, 45, 46*

ABC est un triangle équilatéral.
I, J et K sont des points respectifs des segments [CB], [AC] et [AB] tels que CI = AJ = BK.
IJK est équilatéral, en effet :
- Les triangles CIJ et KJA sont isométriques d'après le théorème 2 car :
  $\widehat{C} = \widehat{A}$; CI = AJ
  et AK = CJ car AB = AC et BK = AJ.
  Il en résulte que IJ = JK.
- De même les triangles KJA et IKB sont isométriques. Il en résulte que IK = JK.
  IJK est donc équilatéral.

2. édition Bréal 2004 page 80.

Exercice : Quelle technique relative au type de tâches « Montrer une égalité de longueurs » serait justifiée par les triangles isométriques ?

On peut également penser aux égalités d'angles ou à l'obtention de la mesure un angle.

Du point de vue du degré de complexité de la figure choisie, il faut que les élèves puissent l'appréhender et démarrer fructueusement le travail tout en n'ayant pas une réponse « immédiate » avec les outils du collège : c'est entre ces deux « garde-fous » qu'il s'agit de cheminer.

2. La deuxième question fait référence à une raison d'être des nombres premiers : la simplification de l'écriture d'un radical, dont on rappelle que l'intérêt est de pouvoir comparer des nombres dont l'écriture comporte des radicaux. En revanche, l'auteur de la question est muet sur ce qui pourrait motiver le fait de « déterminer la nature d'un nombre »...

3. Un premier élément de réponse à la troisième question est donc : chercher une raison d'être de la statistique, et plus précisément des notions de statistique au programme de la classe qu'on a en responsabilité. On travaillera sur la statistique dans des séances ultérieures du Séminaire, mais on peut d'ores et déjà examiner le passage suivant, obtenu en recherchant le mot « statistique » dans le fichier du Séminaire 2006-2007 :

> À quels ***types de questions*** la statistique concourt-elle à apporter réponse ?
>
> – Une réponse qui couvre largement le cadre de l'étude à accomplir en 2de est la suivante :
>
> ***La statistique*** a pour objet d'aider à répondre aux questions qui trouvent leur origine dans le fait général de la ***variabilité***, et dont la formulation exprime la reconnaissance de ce fait. La statistique est en ce sens la ***« science de la variabilité »***.
>
> – À titre d'illustration, on a rassemblé ci-après un bref florilège de telles questions.
>
> 1. Un professeur, ça gagne combien ?
> 2. Ça pèse combien, une tomate ?
> 3. Ça gagne bien, un professeur ?
> 4. C'est gros, une tomate ?
> 5. C'est quoi une grosse tomate ?
> 6. C'est quoi, un professeur qui gagne beaucoup ?
> 7. Professeur, ça gagne mieux que commerçant ?
> 8. Une tomate, c'est plus léger qu'une pomme ?
> 9. Un rectangle, ça doit être beaucoup plus long que large ?
> 10. Le prof m'a engueulé en me disant de dessiner un rectangle "normal". C'est quoi un rectangle normal ?
> 11. C'est quoi, un gros éléphant ?
> 12. Ça pèse combien, un éléphant ?
>
> – La ***production d'une réponse*** à une telle question suppose un ensemble de moyens qu'il appartient à ***la statistique*** de fournir, de concert avec des ***savoirs (non statistiques) plus spécifiques***, qui varient avec les questions étudiées, et que, dans l'enseignement de la statistique ***en classe de mathématiques***, on s'efforcera de réduire au « strict nécessaire » ***sans pour autant chercher à les éliminer***.

On pourra ***se reporter aux archives du Séminaire*** pour de plus amples développement en attendant le travail sur ce point dans le cours de l'année. On notera que le premier réflexe dans l'élaboration et la conception d'AER est d'examiner le matériel qu'apporte une recherche dans les archives du Séminaire ; on reviendra sur ce point.

4. La quatrième question, enfin, pose le problème de l'adaptation des raisons d'être aux vœux d'orientation des élèves. Comme le rappelle l'introduction du programme, la seconde est une classe de détermination :

> La seconde est une classe de détermination. Pour que l'élève puisse définir son orientation, il doit avoir pris conscience de la diversité de l'activité mathématique. Chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, appliquer des techniques bien comprises, étudier une démonstration qu'on n'aurait pas trouvée soi-même, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis au propre, etc., sont quelques-uns des aspects de cette activité. Il importe donc que cette diversité se retrouve dans les travaux proposés à la classe ; parmi ceux-ci les travaux écrits faits à la maison restent absolument essentiels à toute progression de l'élève.

Il n'y a donc pas lieu de déroger, de quelque manière que ce soit, à l'obligation d'instruire tous les élèves dans l'ensemble des contenus du programme. Cela n'empêche pas, lorsque c'est possible, de préférer des situations qui correspondent au devenir professionnel des élèves lorsque celui-ci est connu, comme c'est le cas semble-t-il de la classe qu'à en charge l'auteur de la question dans laquelle les élèves ont dû choisir l'option Arts Appliqués (AA) pour se diriger vers une première série STI option AA. La plupart de ces élèves désirant faire des études de *design*, voire d'infographie, on pourra d'abord, avant de se pencher sur les situations proprement dites, utiliser le plus possible les outils informatiques (grapheurs et logiciels de géométrie dynamique notamment).

Structures et fonctions

1. Quel type d'activités faire en demi-groupe et en classe entière ? (ex : en première ES) (2de – ex 1re ES et STI, 1)
2. Lorsqu'on a une classe en demi-groupes et qu'on voit un groupe en semaine A et l'autre en semaine B, comment gérer le décalage ? Quels types de travaux doit-on effectuer ? **(4e + 2h d'ATP en 6e, 1)**
3. Comment gérer l'utilisation de la calculatrice ? **(5e et 6e, 1)**

Les questions précédentes relèvent d'une vision ***structurelle*** des choses de l'enseignement qu'il va falloir apprendre à remplacer par un ***abord fonctionnel*** du métier. En effet, les auteurs des questions citent un certain nombre de structures (demi-groupes, demi-groupes décalés d'une semaine, classe entière, la calculatrice) et on se demande, à peu de choses près, comment remplir ces structures : j'ai à utiliser, à faire utiliser la calculatrice en classe de 5e ; que faire avec ? Etc. Le point de vue fonctionnel qu'il s'agit d'adopter met en avant ce qu'il s'agit d'étudier (organisation mathématique) et la manière d'en diriger l'étude (organisation didactique) pour regarder en quoi les structures dont on dispose peuvent permettre, aider, favoriser l'existence de ces organisations mathématique et didactique. Ainsi, on s'interrogera plutôt sur l'opportunité, pour tel travail qu'on a prévu de faire effectuer dans le cadre de l'étude d'une organisation mathématique, d'être réalisé en demi-groupe plutôt qu'en classe entière, et encore en demi-groupe mais avec un décalage d'une semaine.

On notera que cette structure de « demi-groupes décalés d'une semaine » demande une double gestion du temps de l'étude : il y a l'avancée « hebdomadaire », rythmée par les séances qui ont lieu chaque semaine, et l'avancée « bimensuelle ou trimensuelle », qui ne peut s'accomplir qu'une fois que les deux groupes auront effectué le travail prévu. On pourra, dans un premier temps, s'en tenir prudemment à effectuer dans ces séances des travaux en lien avec le travail d'une organisation mathématique – celle en cours de construction ou une déjà construite à propos de laquelle un test d'entrée aura par exemple montré des lacunes nécessitant une reprise de l'étude collective.

Nous examinerons ci-dessous, à titre d'exemple, des fonctions que la calculatrice peut venir occuper dans les organisations mathématiques en 5e. Pour cela, comme souvent, on commencera par examiner le programme. On notera d'abord que l'introduction des programmes de mathématiques au collège signale que la calculatrice a pour objet d'enrichir la mise en œuvre des programmes :

Ces programmes sont construits de manière à permettre une acquisition et un approfondissement progressifs des notions sur toute la durée du collège. Leur mise en œuvre est enrichie par l'emploi des instruments actuels de calcul, de dessin et de traitement (calculatrices, ordinateurs).

On trouvera ci-dessous les occurrences du mot « calculatrice » dans le programme de 5^e :

En regard du contenu règle de trois, on trouve d'abord le commentaire suivant :

L'utilisation répétée du coefficient de proportionnalité est l'occasion d'exploiter certaines fonctions de la calculatrice (opérateurs constants, mémoire…) ou d'un tableur *[B2i]*.

L'introduction du domaine « Nombres et calculs » précise :

Toutes les activités numériques fournissent des occasions de pratiquer le calcul exact ou approché sous toutes ses formes, utilisées en interaction : calcul mental, automatisé ou réfléchi, calcul posé, emploi d'une calculatrice. A travers ces activités, plusieurs objectifs sont visés, en particulier ceux qui contribuent au développement des capacités à :
- prévoir des ordres de grandeur,
- opérer en conservant l'écriture fractionnaire,
- utiliser le vocabulaire approprié (terme, facteur, numérateur, dénominateur),
- contrôler ou anticiper des résultats par des calculs mentaux approchés.

Puis à propos de l'enchaînement d'opérations :

L'acquisition des priorités opératoires est un préalable au calcul algébrique. Les questions posées à propos de résultats obtenus à l'aide de calculatrices peuvent offrir une occasion de dégager les priorités opératoires usuelles.

À propos de l'addition et de la soustraction de nombres relatifs enfin :

Les élèves sont entraînés à organiser et gérer un programme de calcul mettant en jeu des additions et des soustractions avec ou sans calculatrice. Les règles de suppression de parenthèses à l'intérieur d'une somme algébrique sont étudiées en classe de Quatrième (programme de la classe de Quatrième § 2.1.).

C'est dans le document d'accompagnement du programme du collège portant sur le calcul que l'on trouve certaines fonctions que peut venir occuper la calculatrice. On peut lire par exemple :

Le calcul assisté, par une calculatrice ou un tableur, trouve naturellement sa place dans la résolution de problèmes :

- En libérant les élèves de calculs fastidieux, il leur permet de focaliser leur attention sur l'élaboration, la mise en œuvre et le contrôle d'une stratégie de résolution ;
- Dans le cas de l'exploration d'un phénomène numérique, il permet d'arriver rapidement à la formulation de conjectures qui doivent être ensuite validées ;
- Il peut être la source de problèmes[5], lorsqu'il faut déterminer par exemple, à l'aide d'une calculatrice ordinaire, en 6e le quotient et le reste d'une division euclidienne ou en 5e un produit de deux nombres comme 123 123 et 234 567. Ces deux exercices, bien qu'effectués à l'aide d'une calculatrice relèvent du calcul réfléchi. Le premier nécessite de penser le quotient euclidien comme étant la troncature à l'unité du quotient décimal affiché par la calculatrice et de concevoir le reste de la division euclidienne comme étant la différence entre le dividende et le produit du quotient euclidien et du diviseur. Pour résoudre cet exercice, l'élève est conduit à donner du sens à la division en lien avec la multiplication. La taille du calcul à effectuer dans le second exercice dépasse la capacité d'affichage d'une calculatrice ordinaire (10 chiffres) qui renvoie 28880593 E10. Néanmoins, le résultat exact peut être produit en combinant calcul machine et support écrit, en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ainsi que la multiplication d'un entier par une puissance de 10 ; comme par exemple
  $123\,123 \times 234\,567 = 123\,000 \times 234\,567 + 123 \times 234\,567$
  Des problèmes comme par exemple en 6e : *« Après avoir affiché à l'écran le nombre 142,37, que taper sur la calculatrice pour qu'elle affiche le nombre 1423,7 ? »* ou comme *« La touche* $\boxed{,}$ *de la calculatrice est bloquée, comment faire afficher le nombre 12,3 ? »* permettent un nouveau travail sur la règle de multiplication par 10, 100, 1000…, autrement qu'en effectuant des révisions, ou encore sont l'occasion de mettre en évidence qu'un décimal est un quotient d'un entier par une puissance de 10.

Comme pour les autres types de calculs, l'emploi de la calculatrice relève, selon le cas, soit :

- du calcul automatisé, lorsque l'élève a recours à des fonctions « basiques », dans le cas du calcul d'une somme, d'un produit, d'un cosinus d'un angle, d'une moyenne d'une série statistique… ;
- du calcul réfléchi, comme par exemple lorsqu'il s'agit de calculer le quotient d'une somme par un nombre qui nécessite que soit pensée l'organisation des calculs avant d'utiliser la calculatrice. Ainsi, pour effectuer le calcul de $\frac{3{,}17+2{,}5}{7}$, il est nécessaire de savoir qu'il faut commencer par effectuer 3,17 + 2,5 et que, pour qu'une calculatrice qui intègre les priorités opératoires commence par effectuer cette somme, il faut recourir à l'utilisation de parenthèses : (3,17 + 2,5) : 7. Ou encore, en trigonométrie, pour le calcul

d'une longueur comme dans l'exemple suivant : ABC étant un triangle rectangle en A, ayant déjà établi que $BC = \dfrac{5,4}{\cos(33°)}$, et ayant à calculer AC, égal à BC × cos (57°), au lieu de remplacer BC par 6,4 en tronquant grossièrement le résultat affiché (on obtient alors pour AC : 3,485689824), il convient soit d'utiliser la valeur affichée pour BC et d'enchaîner en la multipliant par cos(57°), soit d'utiliser la mémoire pour conserver la valeur de BC, ce qui pour AC donne dans les deux cas: 3,5068 01003.

L'apprentissage des différentes fonctionnalités d'une calculatrice, d'un tableur ne doit pas être laissé à la charge des élèves, il doit être intégré au cours de mathématiques. C'est le cas par exemple de l'utilisation de facteurs constants, des mémoires. Il est également important que les élèves prennent conscience de certains aspects du fonctionnement de leur calculatrice, notamment du fait que la précision de calcul dépasse la capacité d'affichage. Ainsi, le problème peut être posé de faire apparaître le chiffre suivant de la partie décimale d'un quotient pour savoir si l'arrondi affiché l'est par défaut ou par excès.
Comme tout outil, la calculatrice doit être utilisée à bon escient et l'élève doit être à même d'exercer un contrôle sur le résultat obtenu, ce qui n'est possible que s'il a construit des compétences suffisantes en calcul mental.

On notera que les ***fonctions*** citées (notamment l'exploration, l'expérimentation et le contrôle) sont à la fois ***didactiques***, pour permettre l'émergence de certaines organisations mathématiques, et ***mathématiques*** où la calculatrice doit venir s'intégrer dans certaines techniques (que le document nomme alors « techniques instrumentées », dénomination que nous ne reprendrons pas dans ce Séminaire – toute technique est instrumentée –, de la même manière que nous ne reprendrons pas « calcul automatisé » et « calcul réfléchi », la différence faite entre les deux étant trop structurelle – il existe une différence fonctionnelle liée à l'organisation de l'étude : dans un cas, on dispose d'une technique bien rodée, on a donc un type de tâches routinier alors que, dans l'autre, le type de tâches est encore problématique et il s'agit de fabriquer une technique).

Un point de vue fonctionnel permet également d'éclairer la question suivante, qui en porte certaines traces :

J'envisage d'indiquer à mes élèves, en début de chaque chapitre, une liste de types de tâches qui sont étudiés dans celui-ci. Ce dispositif a pour moi la fonction de leur (et me) permettre de situer leur savoir avant, pendant et en fin de chapitre. Cependant, certains types de tâches nécessitent un travail filé sur les chapitres du domaine (ex. :reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé – forme réduite, factorisée,…). Répéter ce type de tâches à chaque début de chapitre ne risque-t-il pas d'alourdir la liste et de donner à la classe une impression de piétinement ? Inciter les élèves à retrouver ces types de tâches, ne peut-il pas avoir une fonction didactique ? **(2de, 1)**

Une organisation de l'étude a pour fonction de produire, avec les élèves et en leur laissant le plus de place possible, une certaine organisation mathématique. Donner d'emblée les types de tâches réduit du même coup la place des élèves, le *topos* des élèves, dans la fonction de production de cette organisation mathématique. On ajoutera que c'est ***un des objets de la synthèse*** que de préciser, et donc de faire préciser aux élèves, le ou les types de tâches qui ont été étudiés (que l'on accompagnera naturellement des techniques et des éléments technologiques pertinents). En revanche, du point de vue du professeur, il est bien entendu nécessaire d'avoir analysé et conçu l'organisation mathématique qu'il doit faire étudier, et celles sur lesquelles elle s'appuie, et donc d'avoir en particulier la liste des types de tâches à étudier.

Laïcité & fonction publique

Comment aborder les questions difficiles, délicates (posées par) avec les élèves ?
Ces questions ne sont pas nécessairement à propos des matières enseignées, mais plutôt l'actualité, la religion, la politique.
Exemple : la peine de mort aux US / en Chine, un attentat, les conflits (Israël / Palestine, Russie / Géorgie), le message des « prophètes » (Moïse, Jesus, Mahomet, Boudha, …), une agression violente en ville (Incendie d'un bus), une réforme de gouvernement, l'Histoire (l'esclavage, le racisme…).
Doit-on s'en tenir au programme ?
- position officielle de la France sur son passé (esclavage, colonisation) ;
- création du monde (la Genèse VS Darwin…). (5^{e}, 1)

De quoi n'a-t-on pas le droit de parler avec les élèves ? Actualité ? Religion ? Vie personnelle ? (2de, 0)

Le professeur de mathématiques est d'abord là pour faire ***étudier des mathématiques*** : cette ***fonction*** est ***primordiale***, et c'est donc de questions de mathématiques que le professeur parlera à ses élèves. Il ne devra pas, sauf exception dûment justifiée, distraire des heures allouées à l'étude des mathématiques qui figurent au programme de la classe dont il est chargé pour aborder d'autres sujets. Il peut arriver, en cas de « crise » comme par exemple pour les professeurs du collège René Cassin d'Agde (Hérault) où des croix gammées et des « inscriptions à caractère raciste » ont été taguées sur les murs, que certains sujets non mathématiques aient à être abordés. Dans ces circonstances, comme dans toutes les composantes du métier, deux principes gouvernent l'action du professeur.

1. On se rappellera d'abord que l'on a à ***agir*** non en tant que personne mais e***n tant que « fonctionnaire de l'État »***. Dans cette perspective, on respectera les principes fondamentaux rappelés dans l'énoncé de la première compétence du cahier des charges dont on reproduit ci-dessous deux extraits :

> Tout professeur contribue à la formation sociale et civique des élèves. En tant qu'agent de l'État, il fait preuve de conscience professionnelle et suit des principes déontologiques : il respecte et fait respecter la personne de chaque élève, il est attentif au projet de chacun ; il respecte et fait respecter la liberté d'opinion ; il est attentif à développer une attitude d'objectivité ; il connaît et fait respecter les principes de la laïcité, notamment la neutralité ; il veille à la confidentialité de certaines informations concernant les élèves et leurs familles.
>
> Il exerce sa liberté et sa responsabilité pédagogique dans le cadre des obligations réglementaires et des textes officiels ; il connaît les droits des fonctionnaires et en respecte les devoirs.
>
> L'éthique et la responsabilité du professeur fondent son exemplarité et son autorité dans la classe et dans l'établissement.
>
> (...)
>
> *Attitudes*
>
> Agir de façon éthique et responsable conduit le professeur :
>
> – à faire comprendre et partager les valeurs de la République ;
>
> – à intégrer, dans l'exercice de sa fonction, ses connaissances sur les institutions, sur l'État (son organisation et son budget), sur ses devoirs de fonctionnaire ;
>
> – à respecter dans sa pratique quotidienne les règles de déontologie liées à l'exercice du métier de professeur dans le cadre du service public d'éducation nationale ;

Pour éclairer ce passage, on trouve par exemple sur le site de la documentation française (http://www.ladocumentationfrancaise.fr/dossiers/laicite/neutralite-etat.shtml) l'extrait suivant :

«La neutralité de l'État est la première condition de la laïcité. La France ainsi ne connaît pas de statut de culte reconnu ou non reconnu. Pour l'essentiel la neutralité de l'État a deux implications.
D'une part, neutralité et égalité vont de pair. Consacrée à l'article 2 de la Constitution, la laïcité impose ainsi à la République d'assurer « l'égalité devant la loi de tous les citoyens sans distinction d'origine, de race ou de religion ». Les usagers doivent être traités de la même façon quelles que puissent être leurs croyances religieuses.

D'autre part, il faut que l'administration, soumise au pouvoir politique, donne non seulement toutes les garanties de la neutralité mais en présente aussi les apparences pour que l'usager ne puisse douter de sa neutralité. C'est ce que le Conseil d'Etat a appelé le devoir de stricte neutralité qui s'impose à tout agent collaborant à un service public (Conseil d'Etat 3 mai 1950 Demoiselle Jamet et l'avis contentieux du 3 mai 2000 Melle Marteaux). Autant, en dehors du service, l'agent public est libre de manifester ses opinions et croyances sous réserve que ces manifestations n'aient pas de répercussion sur le service (Conseil d'Etat 28 avril 1958 Demoiselle Weiss), autant, dans le cadre du service, le devoir de neutralité le plus strict s'applique. Toute manifestation de convictions religieuses dans le cadre du service est interdite et le port de signe religieux l'est aussi, même lorsque les agents ne sont pas en contact avec le public. Même pour l'accès à des emplois publics, l'administration peut prendre en compte le comportement d'un candidat à l'accès au service public, s'il est tel qu'il révèle l'inaptitude à l'exercice des fonctions auxquelles il postule dans le plein respect des principes républicains».

Source : Commission de réflexion sur l'application du principe de laïcité dans la République : rapport au Président de la République

Pour en apprendre davantage, on pourra se reporter au document sur la laïcité figurant dans la rubrique Documents du site de la filière mathématique.

2. Le professeur est membre d'une collectivité : l'équipe pédagogique, et plus largement l'établissement. C'est généralement à l'échelle de cette collectivité que se traitent les questions « hors discipline ». Dans le cas évoqué plus haut, il est possible que le chef d'établissement réunisse lors d'une heure « banalisée » les professeurs et les élèves pour travailler collectivement la question du racisme. De façon générale, il ne faut pas hésiter à recourir à la collectivité dans l'abord des problèmes rencontrés. On ajoutera que certains membres de l'équipe peuvent être précieux pour aborder avec le recul nécessaire certaines questions, puisqu'elles font partie de leur discipline d'enseignement.

Autorité & discipline

a) Plusieurs questions, on l'a dit, soulèvent le problème de l'autorité du professeur : on les reproduit ci-dessous.

1. Comment réagir face à un élève non motivé (qui ne prend pas de notes…) ? (0)
2. Que faire avec un élève qui refuserait tout travail (prise de notes, exercices à la maison,…) ? (5e & 4e, 0)
3. Doit-on parler des sanctions le premier jour ? Que sanctionner exactement (travail non fait, cahiers mal tenus ?) (5e, 0)
4. Peut-on menacer d'un zéro si le travail à la maison n'est pas fait ? (5e, 0)
5. J'ai fait un remplacement pendant lequel j'ai eu trois classes de seconde pendant deux mois et il est clair que je n'ai pas su imposer mon autorité. Je tenais à être souriante mais cela n'a pas marché .
Comment imposer un climat sérieux et un peu « la crainte » du professeur afin d'avoir le pouvoir d'imposer le silence, le respect… ? Quelle attitude avoir dès le premier jour ? (2de, 1)
6. Comment réagir face à un élève très dissipé (n'écoutant aucun conseil, réfractaire au cours, arrogant) ? (4e, 1)
7. Comment faut-il expliquer aux élèves les règles de discipline ? Doit-on fixer des règles très précises ? (2de, 1)
8. Lorsqu'un DM n'est pas rendu dans les temps, peut-on réclamer une feuille avec les informations de l'élève (nom, prénom, classe, devoir) afin d'avoir une trace écrite et mettre la note appropriée ? (4e, 1)

b) Comme il en ira quasiment toujours, on apporte ci-après quelques ***matériaux pour bâtir une réponse*** – cette « réponse », elle, étant à construire concrètement dans l'organisation du travail de la classe considérée.

1. Le premier geste à faire est de se procurer et d'étudier le ***règlement intérieur*** de l'établissement. Celui-ci participe à définir les règles de vie et de travail dans l'établissement. Il doit évidemment être compatible avec la loi de la République. Mais il précise la manière par laquelle cette loi s'actualise dans le cadre d'un Établissement Public Local d'Enseignement.

2. Ce règlement intérieur est spécifique, dans une certaine mesure, de l'établissement, et il est cadré par des principes généraux que l'on trouve dans un texte paru au ***Bulletin Officiel (BO) de l'Éducation Nationale spécial nº 8 du 13 juillet 2000*** complété (et partiellement modifié) par un texte paru au ***BO n°39 du 28 octobre 2004***.

3. Voici, à titre d'indication, le plan de ce texte :

LE RÈGLEMENT INTÉRIEUR DANS LES EPLE (BO Spécial N°8 du 13 juillet 2000)

- **PRÉAMBULE**
- **I – L'OBJET DU RÈGLEMENT INTÉRIEUR**
- **II – LE CONTENU DU RÈGLEMENT INTÉRIEUR**
  - **2.1 Les principes qui régissent le service public d'éducation**
  - **2.2 Les règles de vie dans l'établissement**
    - **L'organisation et le fonctionnement de l'établissement**
    - **L'organisation de la vie scolaire et des études**
    - **La sécurité**
  - **2.3 L'exercice des droits et obligations des élèves**
    - **2.3.1 Les modalités d'exercice de ces droits**
    - **2.3.2 Les obligations**
      - **L'obligation d'assiduité**
      - **Les modalités de contrôle des absences et des retards**
      - **Le respect d'autrui et du cadre de vie**
      - **Le devoir de n'user d'aucune violence**
  - **2.4 La discipline : sanctions et punitions**
  - **2.5 La réintégration de l'élève**
  - **2.6 Le suivi des sanctions**
  - **2.7 Situations particulières**
    - **Les élèves majeurs**
    - **La conduite à tenir en cas d'incident aux entrées et aux sorties**
    - **L'internat**
    - **Les stages**
- **III – ÉLABORATION ET MODIFICATIONS DU RÈGLEMENT INTERIEUR**
  - **3.1 Élaboration et révision**
  - **3.2 Information et diffusion**

4. Cette réglementation précise doit attirer votre attention sur le fait que les règles de vie et de travail ne sauraient être simplement ***édictées unilatéralement par le professeur***, comme si elles procédaient de sa libre décision, c'est-à-dire de son ***arbitraire*** : la plupart des règles utiles ne sont en fait la création ni du professeur ni *a fortiori* des élèves, mais émanent d'une communauté ***plus large***, et doivent donc être, non pas créées *ex nihilo*, mais ***reconnues*** et ***mises en place*** dans la classe par le professeur agissant en coopération avec les élèves. L'exemple de la note zéro que certains seraient tentés d'attribuer à l'élève pour un devoir non fait est ici éclairant : il existe en France une jurisprudence constante des tribunaux administratifs et du Conseil d'État ***qui s'oppose à une telle pratique***. Ainsi un inspecteur ne peut-il assigner une note défavorable à un professeur qui

se dérobe à l'inspection. Une prestation non rendue, qui constitue une rupture de contrat et doit donc être sanctionnée, on le verra, ne peut l'être par une évaluation dépréciative : cette prestation n'existant pas, elle ne saurait être évaluée en bien ou en mal. Sauf à tomber dans ce qu'on peut appeler, de manière un peu emphatique, la « tyrannie » du professeur, parce qu'il usurpe une fonction qui n'est pas la sienne, un professeur ***n'est pas libre de fixer à volonté*** les règles qui façonneront la vie de la classe.

5. On voit que les sources de la loi qui règle la vie dans l'établissement sont multiples et c'est dans le règlement intérieur que ces principes sont mis en œuvre et précisés. Ainsi, le texte ci-dessus indique :

> « Le règlement intérieur permet la régulation de la vie de l'établissement et des rapports entre ses différents acteurs. Chacun des membres doit être convaincu à la fois de l'intangibilité de ses dispositions et de la nécessité d'adhérer à des règles préalablement définies de manière collective. »

6. À titre d'exemples des obligations des élèves, citons le passage suivant du même texte :

> « L'obligation d'assiduité consiste à participer au travail scolaire, à respecter les horaires d'enseignement, ainsi que le contenu des programmes et les modalités de contrôle des connaissances. Un élève ne peut en aucun cas refuser d'étudier certaines parties du programme de sa classe, ni se dispenser de l'assistance à certains cours, sauf cas de force majeure ou autorisation exceptionnelle. »

Ce passage s'appuie lui-même sur le décret nº 85 924 du 30 août 1985, qui indique notamment :

> « Les élèves doivent accomplir les travaux écrits et oraux qui leur sont demandés par les enseignants, respecter le contenu des programmes et se soumettre aux modalités de contrôle des connaissances qui leur sont imposées. Les élèves ne peuvent se soustraire aux contrôles et examens de santé organisés à leur intention. Le règlement intérieur de l'établissement détermine les modalités d'application du présent article. »

On voit ainsi que, en exigeant que les élèves soient présents lors des contrôles qu'il organise et fassent les travaux qu'il leur assigne, le professeur ***ne s'autorise pas de lui-même***, mais d'une règle de niveau supérieur, ***qu'il ne peut pas davantage abolir***. Comme tout détenteur d'autorité, il n'est en conséquence ***pas libre de sanctionner ou de ne pas sanctionner***, par exemple, l'élève qui n'a pas rendu son devoir. En particulier, ce n'est pas parce que tel professeur est du genre à ne pas se laisser faire qu'il sanctionnera l'élève fautif à cet égard ! C'est pour une tout autre raison, indépendante de sa « personnalité » : parce qu'il existe un contrat auquel ***lui comme l'élève*** ont souscrit en devenant sujets de l'institution scolaire, et que, en l'espèce, ce contrat précise ***en toutes lettres*** que l'élève s'engage à « accomplir les travaux écrits et oraux qui [lui] sont demandés par les enseignants ». Par là l'élève échappe à l'arbitraire, à la fantaisie, à la « tyrannie » éventuelle de ***ce*** professeur, pour ne dépendre que de la loi commune, celle de la ***res publica***, loi explicite, révisable, démocratiquement contrôlable. « Je vous sanctionne pour ce devoir non rendu », dira le professeur-tyran, ***« parce que je le veux »***. « Je vous sanctionne pour ce devoir non rendu », dit le professeur de l'État de droit, ***« parce que je le dois***, et je le dois parce que ***la société*** dont je suis le servant en a décidé ainsi ». C'est évidemment ce professeur-là que l'on s'efforcera de devenir.

7. Il est à noter que la mise en place des règles de vie et de travail ne saurait se faire ***en une fois***, et une fois pour toutes. De telles règles, en effet, doivent être ***motivées***, et, pour beaucoup d'entre elles, cela ne saurait guère se faire ***qu'en situation***, au fur et à mesure que la classe rencontrera les situations dont la bonne gestion appellent de telles règles. La chose vaut pour le règlement intérieur lui-même, qui, bien que prenant la forme d'un texte rédigé par avance, ne saurait être appréhendé d'un seul coup. Elle vaut plus encore, à l'évidence, pour les règles qui gouvernent tel ou tel genre d'activités « disciplinaires », mathématiques ici. Les règles relatives à ***l'expérimentation en***

géométrie, par exemple, ne sauraient être énoncées, ni même conçues, en ***dehors d'un travail de la classe sur cette notion même***.

8. À cet égard, une remarque doit être faite touchant le mot de ***discipline***, qui, dans le vocabulaire usuel de l'école, semble polysémique, puisqu'il désigne à la fois ***les règles de bonne conduite scolaire*** et la ***matière étudiée***. Le *Dictionnaire historique de la langue française* indique à ce propos :

« DISCIPLINE [...] est emprunté (1080) au latin *disciplina*, dérivé de *discipulus* [...] qui signifie "action d'apprendre, de s'instruire", et par suite "enseignement, doctrine, méthode", "éducation" et "formation militaire" ; enfin, par extension, le mot désigne les principes, les règles de vie. »

On notera donc précieusement que l'usage de nommer « discipline » les règles prévalant en une institution donnée ***dérive*** du sens qui nous conduit à parler de « discipline mathématique », de « discipline philosophique », etc., ***et non l'inverse***. Il y a ainsi continuité entre ***les*** disciplines scolaires (le français, les mathématiques, etc.) et ***la*** discipline qu'il convient de définir, de respecter et de faire respecter dans la classe et dans l'établissement. D'une certaine manière, ***les deux sont indissociables*** : il faut éduquer à ***la*** discipline afin de pouvoir instruire dans ***les*** disciplines scolaires.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 3 : mardi 16 septembre 2008

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse // 2. Forum des questions // 3. Problématique et fonctionnement du Séminaire

0. Questions de la semaine

On notera d'abord des questions sur ***Discipline, bavardage and co...,*** comme par exemple les deux suivantes :

Comment faire face à un problème de discipline provenant d'un élève en particulier et revenant assez souvent ? (2^{de}, 2) Lorsqu'une classe est perturbée (bavardages), vaut-il mieux hausser la voix pour leur dire de se taire ou arrêter son cours pour qu'ils le comprennent d'eux-mêmes ? Y a-t-il une autre méthode (sanction, carnet) ? (2^{de}, 2)

Puis un nombre croissant de questions sur ***l'organisation de l'étude : AER, synthèse, exercices ou devoirs*** constituent l'essentiel des préoccupation.

Pour la préparation de mon premier chapitre, j'ai sélectionné des exercices d'applications et un DM. A mon goût, cela fait trop d'exercices mais je ne sais pas comment faire diminuer cette quantité. (5^e, 2)

Un nouveau thème apparaît : ***la gestion de l'avancée du temps didactique***.

J'ai deux classes de cinquième dont une avec laquelle j'avance plus vite. Comment rattraper cette différence de vitesse ? Faire une activité supplémentaire avec la classe qui avance plus vite ? (5^e & 5^e, 2) En module, un groupe a progressé plus rapidement que l'autre. Peut-on le prévoir ? Comment anticiper ? (2^{de} et 1^{re} STG ,2) Dans une classe très dissipée d'un collège défavorisé, faut-il accepter de passer beaucoup de temps à essayer d'avoir le calme, quitte à prendre du retard dans l'avancement du programme ? (5^e et 4^e, 2) Je partage une classe avec un autre professeur, donc je n'ai ces élèves qu'une fois par semaine avec une heure en classe entière suivie directement par une heure en demi-groupe. Comment arriver à bien avancer dans mon cours avec cette configuration ? (4^e et une demi 4^e, 2) Séance d'exercices : la moitié de la classe a fini et s'ennuie, l'autre moitié cherche encore. Ce serait dommage d'interrompre la moitié qui cherche. Que faire ? (5^e & 5^e, 2)

D'autres thèmes continuent à faire problème, comme l'hétérogénéité, les relations avec l'environnement proche ou encore les TICE. Un thème commence également à se faire jour, que l'on étiquettera « ***Il y a un élève qui...*** »

Lorsqu'un élève n'a pas compris une notion, combien de temps doit-on lui consacrer pendant le cours ? Doit-on plutôt lui dire de venir nous voir à la fin du cours ? (4^e + 2h d'ATP en 6^e, 2)

Une de mes élèves pose beaucoup de questions, et m'a demandé, dès le deuxième cours, des exercices supplémentaires. Elle a, comme elle le dit, un niveau très faible (des plus bas, d'après le peu que j'ai vu) et elle pose facilement trois questions par heure. Je ne sais ce que ça va devenir, mais j'ai peur de « perdre » cette élève, ou bien qu'elle ralentisse la classe, alors que je pense qu'il doit être possible de s'appuyer sur ses interventions. Comment gérer ce « double tranchant » : beaucoup d'interventions / niveau très faible ? (2^de^, 2)
J'ai un élève dyscalculique dans ma classe de cinquième. Je ne sais pas comment gérer ce problème : comment la noter, l'évaluer, la faire participer ? (5^e^ + 4^e^ partagée + PPRE, 2)

1. Observation et analyse

1.1. Praxéologie mathématique

Nous avons mis en place la semaine dernière un modèle permettant l'analyse de l'activité mathématique selon quatre composantes :

Des ***types de tâches mathématiques*** ; dans la séance ainsi nous avons identifié le type de tâches

T : Sur une feuille où on a voulu tracer un parallélogramme ABCD, le sommet C tombe hors de la feuille ; en restant dans les limites de la feuille, tracer la partie de la diagonale [AC] qui se trouve sur la feuille.

type de tâches qui relève du type de tâches plus général suivant

T✓ : Tracer une droite, *d*, dont on ne connaît qu'un point.

qui vient en ***motiver l'étude***.

Des ***techniques*** (manières de faire) qui permettent d'accomplir les types de tâches ; la technique relative au type de tâches T qui émerge dans la séance peut s'analyser de la façon suivante :

τ : 1) on construit et on marque le point O milieu du segment [BD] ;
2) on trace la partie de la demi-droite [AO) qui figure sur la feuille de travail.

Une ou plusieurs ***technologies***, discours qui justifient, produisent, rendent intelligibles les techniques ; dans la séance observée, la technologie relative à [T / τ] peut s'exprimer de la façon suivante :

θ : L'expérience montre que, lorsqu'on trace un parallélogramme ABCD ainsi que ses diagonales [AC] et [BD], celles-ci se coupent en un point I tel que l'on ait AI = IC et BI = ID ; en d'autres termes, les diagonales se coupent en leur milieu.

Elle repose sur l'élément technologique suivant : θ_δ. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

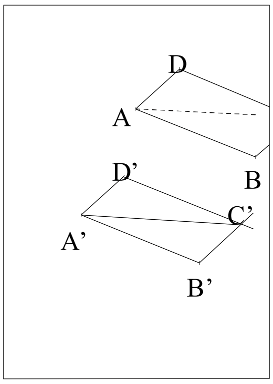
Une ***théorie***, voire plusieurs, discours qui justifie, produit, rend intelligible la ou les technologies ; dans la séance observée ainsi, la théorie contiendra au moins un élément ***théorique*** notable, sur lequel on reviendra au fil du temps :

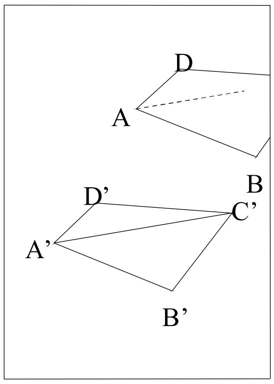
Θ : une expérience simulée sur ordinateur (à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique) qui met en évidence une certaine propriété géométrique « élémentaire » permet de conclure 1) que cette propriété est ***vraie*** dans l'espace sensible, et 2) que cette propriété est ***déductible*** dans la « théorie géométrique disponible », même si l'on ne dispose pas d'une déduction explicite.

On notera que la ou les théorie(s) constitue(nt) souvent un horizon de l'activité mathématique observée, ce qui ne veut pas dire que l'on doive s'affranchir de l'analyser.

Un tel ensemble $[T_i / \tau_i / \theta_i / \Theta_i]_{i\in I}$., on l'a dit, constitue ce que l'on appellera une ***praxéologie***, mathématique ici car le type de tâches dont il est question relève des mathématiques, mais on parlera tout aussi bien de praxéologie physique, historique, orthographique, athlétique, ou encore culinaire, informatique, de ménage, de bricolage, etc. ou encore ***didactique*** lorsque le ***type de tâches*** envisagé est un type de tâches **d'*étude ou de direction d'étude.***

Le bloc formé des types de tâches et des techniques, **[T_i / τ_i]$_{i\in I}$.**, modélise ce que l'on nomme ordinairement la ***pratique***, le ***savoir-faire***, tandis que le bloc formé de la technologie et de la théorie, **[θ_i / Θ_i]$_{i\in I}$.**, modélise ce que l'on désigne souvent par ***théorie*** ou ***savoir.*** On utilisera encore la dénomination ***organisation mathématique*** (**OM**). L'intérêt de ce modèle par rapport aux modèles binaires savoirs / savoir-faire ou théorie / pratique, c'est d'abord de ***permettre de parler***, et donc de ***penser***, le cœur de l'activité que constituent les ***techniques*** (développé oralement) ; ensuite de mettre en évidence que les techniques relatives aux types de tâches sont ***dépendantes du savoir*** dont on dispose et plus spécialement de la théorie. Nous donnerons un exemple de ce second point en considérant le type de tâches enjeu de l'étude dans la séance, T. Si l'on dispose en effet de la technologie de la translation (ce qui n'est pas le cas en 5^e), on peut envisager une autre technique, τ_δ", que résume le schéma ci-après à gauche : une fois obtenue la figure translatée, il suffit de tracer la parallèle à (A'C') passant par A.





La technique τ_δ" a, en vérité, une ***portée*** plus grande que la technique τ, du simple fait que la technologie de la translation est plus ***puissante*** que la technologie du parallélogramme : elle permet par exemple de résoudre le problème étudié même lorsqu'on ne suppose pas que ABCD est un parallélogramme (voir la figure ci-dessus à droite).

Pour terminer sur ce ce point, nous examinerons la question qui était à étudier :
Quelle technique relative au type de tâches « Montrer une égalité de longueurs » serait justifiée par les triangles isométriques ?

Travail collectif – Les propositions des participants ont conduit à la proposition suivante :

> Identifier les deux longueurs comme longueurs de côtés de deux triangles.
> Montrer que ces triangles sont isométriques et que les côtés sont homologues.

Cette formulation considère que le type de tâches « montrer que deux triangles sont isométriques » est *routinier*, c'est-à-dire que l'on dispose d'une technique pour l'accomplir. Si tel n'est pas le cas, il faut détailler la technique relative à ce type de tâches.

1.2. Praxéologie didactique

L'objet du travail est de constituer une réponse à la question suivante :

Q_π : Comment mettre en place une organisation mathématique donnée ? Ou encore comment diriger l'étude d'une OM donnée ?

Nous partirons pour cela des réponses apportées la semaine dernière à la question suivante, posée à propos de l'observation sur le parallélogramme en 5^{e}.

Que voit-on dans la séance observée de l'organisation de l'étude ? (Comment les mathématiques sont-elles étudiées ?) On s'efforcera de préciser les fonctions des différents épisodes.

On notera que 28 réponses ont été rendues, 14 étant rédigées par un binôme. On les trouvera, anonymées, dans le fichier parallélogramme_od.odt.

Un premier groupe de 5 réponses propose une description séquentielle du travail mathématique effectué pour résoudre le problème, en détaillant plus ou moins les différentes étapes. On en trouvera ci-dessous deux exemples.

Dans un premier temps le problème est posé : Tracer la droite (AC)
Ensuite, on met en évidence ce qu'il faut pour tracer une droite, à savoir deux points, et on souligne le fait que la solution « standard » utilisant les points A et C ne peut être pratiquée ici.
Ceci permet d'amener une nouvelle formulation (justifiée) du problème qui met l'accent sur la difficulté essentielle: *« Pour tracer (AC) il faut 2 points, ici, on n'en a qu'un: le point A ».* Justification: Il faudrait trouver un autre point. (nouvelle formulation du problème).
Après deux étapes supplémentaires, on arrive à la formulation plus précise suivante :
formulation ter « *Il faudrait trouver un point autre que A, se trouvant à la fois sur la droite (AC) et sur la feuille ».*
On dégage alors la propriété (élément technologique ?) qui permet de répondre à la formulation ter.
Propriété P: *« les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu O* »
Le point O répond donc à la question ; On le construit.
La propriété P est vérifiée (justifiée) expérimentalement, Cabri.

On propose aux élèves une figure (un parallélogramme) dont il manque un morceau.
On cherche à tracer une diagonale. Voici les différentes étapes.
1. une droite est entièrement déterminée par deux points ;
2. Trouver un deuxième point pour tracer la droite cherchée ;
3. Tracer l'autre diagonale (le point est dessus) ;
4. La droite cherchée passe par son milieu.
5. Conjecture: les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu; (vérification avec un logiciel de géométrie dynamique).

Si ce type de descriptions aura son intérêt, on y reviendra, il est trop contextualisé pour mettre en place une technique de réalisation d'une AER. Il convient donc d'essayer d'extraire certains éléments du contexte la situation enjeu de l'étude ici.

Un groupe de 6 réponses propose encore le même type de description, en notant cependant les rôles respectifs du professeur et des élèves dans l'accomplissement des différents types de tâches – le rôle des élèves étant parfois minimisé comme dans la première réponse suivante, la deuxième étant plus conforme à la séance observée.

Rappel : Pour construire une droite, il faut deux points.
La partie cachée du parallélogramme incite les élèves à trouver un point de (AC) qui n'est pas A et qui est sur la feuille. P. rajoute « sur la feuille » pour couper court à toute tentative de construire C,
et place le parallélogramme au bord du tableau.
P. amène l'idée d'utiliser les diagonales.
P. recentre la classe autour du problème de tracer (AC) et pas de placer C.
P. propose de placer O au milieu de [BD] !
Conjecture à l'aide de Cabri.

Le professeur met en situation un problème dont la résolution va nécessiter l'intervention d'une propriété qui doit donc être conjecturée avec les élèves.
Le professeur dessine un parallélogramme ABCB non achevé, (la partie contenant le point C manque).
Le but est de tracer la droite (AC).
Le professeur recadre toutes les propositions des élèves visant à utiliser le point C en leur montrant sur un dessin au tableau que cela n'est pas possible. Les élèves proposent des solutions non rigoureuses, c'est à dire qu'ils veulent résoudre le problème « à la main ». Le professeur leur rappelle qu'on est pas obligé d'avoir le point C pour tracer la droite (AC). On a en effet le point A et on cherche à trouver un autre point que C.
Elle fait remarquer qu'on pouvait se servir de la droite (BD).
Les élèves arrivent à conclure que les droites (AC) et (BD) sont sécantes.
Le professeur leur fait comprendre que ce point d'intersection pourrait être le point dont on aurait besoin. Elle les amène à trouver la particularité de ce point (permettant le tracé de la droite)
Les élèves finissent par trouver qu'il s'agit du milieu de [BD]. (AC) et (BD) étant des diagonales, le professeur peut ainsi leur annoncer la propriété cherchée: « Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu ».

On peut alors mettre en évidence un ingrédient qui s'avèrera important : la plupart des types de tâches d'étude, des ***types de tâches didactiques*** donc, sont ***coopératifs*** au sens où, dans l'accomplissement de ces types de tâches, et donc dans la mise en œuvre des techniques, il y aura un ***rôle*** dévolu au ***professeur*** et un ***rôle*** dévolu à l'***élève***, l'endroit où chacun d'entre eux intervient en autonomie étant nommé son ***topos*** – *les programmes demandant que le topos de l'élève soit développé le plus possible.*

Les autre réponses proposées tentent d'effectuer une décontextualisation, avec des degrés divers de réussite.

On peut citer d'abord un groupe de réponse (11 réponses) qui décrit, avec plus ou moins de référence à la situation géométrique, ce que l'on pourrait appeler une technique de résolution de problèmes, en précisant avec des degrés divers le rôle du professeur dans la production de la solution. Par exemple :

Les mathématiques sont étudiées au travers d'expérimentations pratiques, à tâtons. Le chemin à parcourir est détaillé au maximum. Problème : tracer une droite. Comment ? En trouvant 2 points qui appartiennent à cette droite, mais on n'en a qu'un d'accessible ; il en faut donc un second qui se trouve sur la feuille. Comment le trouver ?
Expérimentations, par exemple en rajoutant une feuille à côté et en prolongeant les droites, pour finir le parallélogramme. On peut maintenant tracer (AC). Il faut maintenant comprendre par où passe cette droite, car il faut trouver un point particulier qui y appartienne.
Le professeur fait toujours attention à laisser les élèves trouver des idées, il se contente de rappeler à ces derniers, s'ils sont ou non dans la bonne optique de recherche : « quelles sont les données ? Que veut-on? »
Les élèves remarquent que (AC) semble passer par le milieu O de [BD]. P confirme et énonce la propriété de manière plus précise, et propose de le vérifier graphiquement en laissant la possibilité à un élève de bouger les sommets du parallélogramme. Effectivement, (AC) passe par O= m[BD] et O=m[AC] également.

Dans un premier temps, dans le but de tracer la droite (AC), il est rappelé qu'il faut deux points pour tracer une droite. Ensuite, on collecte les données et les contraintes du problème.
On a déjà un point de cette droite, A, il faut donc en trouver un second qui vérifie les conditions.
Un temps de recherche est laissé, puis les résultats sont confrontés.
Après diverses tentatives, une solution émerge, le second point est le milieu de la diagonale[BD].
Une expérimentation à l'ordinateur est envisagée afin de confirmer la solution.

1. Lecture collective de l'activité (pour avoir l'attention) ;
2. Le but de l'activité est mis en valeur au tableau, [question: tracer (AC)], pour ne pas la perdre de vue au cours de la séance.
3. Les données de l'énoncé sont écrites au tableau (données par les élèves).
4. Débat : outils nécessaires pour répondre au problème ; des précisions sont demandées quant aux réponses (exemple : « des points », « combien »?).

5. Les bonnes étapes données par les élèves pour tracer (AC) sont répertoriées au tableau pour voir la démarche aboutissant à la résolution du problème.
6. Débat sur la recherche du point permettant de tracer (AC).
7. Expérimentation à l'aide du logiciel Cabri-géométrie pour vérifier la propriété mise en avant par cette activité: « les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu ».

Elle commence par poser l'activité puis la question plus précisément en les faisant réagir directement sur le sens de la question.
La question est : tracer la droite (AC)
1. Quelles sont les données du problème ? ABCD est un parallélogramme avec le point C hors des limites de la feuille.
2. Que faut-il pour tracer une droite ?   Deux points
3. Quels points? A et un autre.
4. Comment les trouver? Etc....
Elle les pousse à se poser les bonnes questions, elle balaie les mauvaises et reformule systématiquement en langage mathématique les propositions.
Elle leur apprend à formuler un raisonnement mathématique.

En un premier temps, elle leur demande s'ils ont des idées, sans les guider. Si les propositions sont assez éloignées de la solution (symétrique par rapport à un côté), elle leur demande de tester la solution sur leur feuille.
Petit à petit, elle les guide vers la localisation sur une diagonale en infirmant les mauvaises propositions.
Ils en arrivent à parler du milieu de (BD) et enfin, de façon très subtile, ils arrivent au fait que [AC] doit passer par le milieu de [BD].

Cinq d'entre elles n'ont quasiment aucune référence au problème géométrique posé. On en citera deux.

P. pose un problème, sans aucune indication, puis elle indique une méthodologie (quelles sont les données ?, quelle est la question posée ?).
Elle laisse les élèves réfléchir, proposer des idées, des solutions et au fur et à mesure corrige les idées fausses, valide les idées bonnes et fait apparaître le raisonnement au tableau.
Elle relance régulièrement la réflexion en posant des questions faisant progresser le raisonnement.
Elle gère la prise de parole des élèves.

L'énoncé ayant été donné, une courte période de réflexion est laissée aux élèves : ils doivent faire des essais.
À l'issue de ce travail en autonomie, un premier bilan est établi collectivement: « ... il nous faut un autre point... »
À l'issue d'un autre temps de recherche, la classe établit dans un bilan final la solution la plus satisfaisante.
L'élément technologique qui vient d'émerger est enfin mis à l'épreuve de l'expérience à l'aide d'un logiciel (manipulation par un élève, observation sur vidéo projecteur).

On voit là commencer à apparaître un certain nombre de ***types de tâches didactiques*** ; on peut citer (on est resté le plus proche possible des formulations qui sont apparues dans les réponses citées) :

Prévoir une situation, non découpée a priori, qui permet de donner lieu à des expérimentations.
Lire collectivement l'activité.
Faire formuler aux élèves le sens de la question.
Laisser un temps de recherche.
Laisser les élèves trouver des idées.
Ne pas les guider directement mais en posant des questions qui permettent d'avancer.
Collecter les données, les contraintes du problème.
Laisser des traces écrites au tableau.
Confronter les résultats. En débattre, diriger le débat et la prise de parole.
Reformuler les propositions des élèves.
Faire tester les propositions, les mettre à l'épreuve de l'expérience.
Confirmer la solution avec une expérimentation.
Faire des bilans intermédiaires.

On n'a pas cependant pas encore d'avancée substantielle dans la réponse à Q_π, si ce n'est que l'on peut avoir, à un moment donné, à accomplir ces types de tâches ; en d'autres termes, ce sont plutôt des réponses qui ne posent pas véritablement le problème des fonctions des différents épisodes à l'égard de l'avancée dans l'étude de l'OM donnée. La dernière réponse citée donne cependant un ingrédient fonctionnel, qui était apparu déjà précédemment mais peut-être moins nettement : on a fait émerger un ingrédient technologique et on l'a mis à l'épreuve, la technique permettant la mise à l'épreuve étant (rapidement) décrite.

Cinq réponses s'essaient explicitement à la production de fonctions de l'étude. On notera qu'on y retrouve certains des types de tâches précédents. Les deux premières se réfèrent à des étapes de résolution d'un problème telles qu'elles apparaissent par exemple dans les programmes.

Épisode 0 : énoncé du problème
Épisode 1 : Analyse du problème : identification des données (ce que l'on connaît au départ) ; des inconnues (ce qu'il manque pour résoudre le problème) ; des techniques susceptibles d'être utiles ; Fonction : explicite l'énoncé du problème.
Épisode 2 : Synthèse : reformulation du problème pour le réduire à un programme de résolution ; Fonction: réduire l'étendue de la recherche.
Épisode 3 : Recherche d'une solution (travail individuel des élèves) ;
Épisode 4 : énumération des tentatives de solutions trouvées par les élèves ;
Épisode 5 : énoncé d'une proposition intermédiaire (les diagonales sont sécantes) ;
Épisode 6 : conjecture d'une réponse (O est milieu de [BD]
Épisode 7 : Expérimentation: test de la conjecture sur une figure mobile. Fonction: confirmation de la conjecture.
Épisode 8 : Validation de la conjecture, énoncé du résultat observé (et obtenu) .
Épisode 9 :Retour au problème initial : Application du résultat acquis à la résolution effective du problème.
Épisode 10 :Fin de l'activité, la séance se poursuit. Le problème sera vu d'un autre point de vue la prochaine fois.

Étapes de l'étude

1) Présentation du problème / de l'activité	Introduction
2. Mise en place des éléments - connus - inconnus	Mise en équation
3. Recherche individuelle	Recherche
4. Mise en commun des solutions, discussions, choix d'une solution en particulier (par exemple celle qui utilise la propriété voulue)	Mise en commun
5. Travail sur la solution particulière (expérimentation d'une propriété sur des exemples)	Conjecture+ étude de la conjecture + rédaction de la propriété.
6. Conclusion (mise en place de la propriété, rédaction)	Réponse au problème.

Ce qui apparaît là, pour l'essentiel, c'est une fonction de conjecture du résultat technologique, que l'on avait vu déjà mentionnée précédemment, ainsi que l'étude de sa validité, et en outre la production de la technique à l'aide du résultat θ, notamment dans la première proposition.

Voici les trois autres :

1. Données de l'énoncé du problème. Fonction: prendre connaissance du problème étudié.
2. Recherche autonome. Fonction : recherche d'une solution.
3. Énoncé des différentes solutions proposées et vérification de la validité et de la pertinence de ces solutions. Fonction : recadrer l'activité.
4. Dégager une propriété du parallélogramme : ses diagonales se coupent en un point O, conjecturer que ce point O est le milieu des diagonales. Fonction : déterminer une propriété du parallélogramme.
5. Expérimentation sur ordinateur. Fonction : vérifier/valider la conjecture.

Le professeur propose aux élèves de réaliser un type de tâches « T » dont l'énoncé est parfaitement compréhensible, mais la réalisation très problématique. Les élèves sont amenés , avec l'aide du professeur, à conjecturer une propriété du parallélogramme qui permette de réaliser T.
Avec le logiciel de géométrie dynamique, le professeur « renforce » la conjecture.
La propriété est finalement admise.
PS : L'ensemble des épisodes réalise la première rencontre et l'émergence du bloc [T, R, O] où
T= Tracer une droite en utilisant la propriété des diagonales d'un parallélogramme.
R= Placer le deuxième point de la droite en utilisant cette propriété.
O= Cette propriété.

Phases didactiques et fonctions
1) Lecture de l'énoncé par un élève, explicitation des données par les élèves, remémoration de savoirs anciens (par deux points distincts passe une unique droite), reformulation de la question par les élèves et pistes de recherche. Fonction: dévolution du problème.
2) Recherche individuelle. Fonction: émergence de techniques individuelles.
3) Mise en commun, débat, élaboration d'une réponse « R 1 » ; Fonction: conjecture.
4) Test sur Cabri-géométrie. Fonction: expérimentation.
5) Formulation d'une réponse « R 2 » par les élèves. Fonction: institutionnalisation.
6) Résumé du travail par un élève. Fonction : évaluation de la compréhension du travail par la classe.

Travail sur les trois réponses.

On voit là apparaître trois fonctions : dévolution du problème [aux élèves] ; émergence de techniques ; émergence de la technologie.

La dernière réponse apportée, enfin, est quelque peu laconique. Elle donne bien deux fonctions de l'étude mais sans dire comment elles sont réalisées dans le cadre de la séance observée.

Par le biais d'une AER, la professeure organise le moment de la première rencontre d'une propriété du parallélogramme à l'issue de laquelle émerge une technique. (pas entendu énormément la bande sonore).

On le voit à travers le travail effectué précédemment, analyser l'organisation didactique mise en jeu n'est pas une affaire simple. Elle gagne à prendre appui sur quelques questions simples, auxquelles on s'efforce d'apporter réponse : ces questions et les réponses correspondantes ont trait à ce qu'on nomme les ***moments de l'étude*** ou ***moments didactiques***.

Pour disposer d'une information de base sur la notion de « moment de l'étude », on examine maintenant un extrait des notes du Séminaire 2004-2005. On y désigne par ∂O l'organisation de l'étude relative à une organisation mathématique $O = [T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{i\in I}$. Les sigles OMP et OML désignent respectivement une organisation mathématique ***ponctuelle*** (constituée autour d'un seul type de tâches) et une organisation mathématique ***locale*** (constituée autour de plusieurs types de tâches et techniques, mais justifiée par un unique bloc technologico-théorique, qui peut cependant comporter plusieurs éléments technologiques).

❷ En dépit de sa complexité, on peut aborder la description et l'analyse d'une OD ∂O donnée, où $O = [T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{i\in I}$, en examinant la manière dont elle prend en charge certaines ***fonctions didactiques clés*** appelées ***moments de l'étude*** (ou moments ***didactiques***). Le mot de « moment » par lequel on désigne ces fonctions se justifie par le fait que, quelle que soit la manière d'opérer du professeur, ***il arrive forcément un moment où***… – où, par exemple, la classe, sous la direction du professeur, ***rencontre*** pour la première fois le type de tâches T_i.

❸ De manière précise, étant donné une organisation mathématique ***ponctuelle*** $O_i = [T_i / \tau_i / \theta_i / \Theta_i] \subset O$, où θ_i et Θ_i sont les parties de θ et Θ permettant de justifier le bloc $[T_i / \tau_i]$, on distingue 6 moments :

➔ le moment ***de la première rencontre*** avec T_i ;

➔ le moment ***exploratoire***, qui voit ***l'exploration*** du type de tâches T_i et ***l'émergence de la technique*** τ_i ;

➔ le moment ***technologico-théorique***, qui voit ***la création du bloc*** $[\theta_i / \Theta_i]$;

➔ le moment ***du travail*** de l'organisation mathématique créée, et en particulier ***du travail de la technique***, où ***l'on fait travailler*** les éléments de l'OMP élaborée pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on ***travaille sa maîtrise*** de l'OMP considérée, et en particulier de la technique τ_i ;

➔ le moment ***de l'institutionnalisation***, où l'on ***met en forme*** l'organisation mathématique construite $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$, en précisant chacun de ses composants, et en l'amalgamant à l'organisation mathématique déjà institutionnalisée – que l'on peut noter, pour plus de clarté,
$\oplus_{j<i}[T_j / \tau_j / \theta_j / \Theta_j]_{j\in 1,j<i} = [T_j / \tau_j / \oplus_{j<i}\theta_j / \oplus_{j<i}\Theta_j]_{j<i}$;

➔ le moment ***de l'évaluation***, où l'on évalue sa ***maîtrise*** de l'organisation mathématique créée, mais aussi où l'on évalue ***cette organisation mathématique elle-même***.

Dans ce qui suit, on s'efforce de repérer les moments de l'étude réalisés (au moins partiellement) pendant la séance observée et la manière dont ils sont réalisés – quelles techniques didactiques sont mises en œuvre pour organiser et gérer la première rencontre avec $T_0 = T$, etc.

• On peut voir ainsi que, durant la séance, l'activité de la classe relève successivement ou simultanément des ***trois premiers moments didactiques*** : moment ***de la première rencontre*** avec T ; moment de ***l'émergence de la technique*** τ (à propos d'un unique spécimen $t \in T$) ; moment ***technologique***, de ***création de*** θ_δ.

• En revanche, le moment ***du travail*** de l'organisation mathématique créée (amorcé avec l'inscription sur l'agenda de travail de la classe de l'examen d'une possible technique alternative reposant sur la symétrie) ***est renvoyé à plus tard.*** Il en va de même du moment ***de l'institutionnalisation*** **et du moment *de l'évaluation*.**

Les types de tâches didactiques que nous avons identifiés dans le travail précédent vont intervenir dans l'élaboration de ***techniques de réalisation des moments de l'étude***.

Pour la semaine prochaine : analyser la manière dont sont réalisés chacun des trois moments de l'étude présents dans la partie du compte rendu examiné.

2. Forum des questions

2.1. *Autorité et Discipline (suite)*

1. Comment réagir face à un élève non motivé (qui ne prend pas de notes…) ? (0)
2. Que faire avec un élève qui refuserait tout travail (prise de notes, exercices à la maison,…) ? (5ᵉ & 4ᵉ, 0)
3. Doit-on parler des sanctions le premier jour ? Que sanctionner exactement (travail non fait, cahiers mal tenus ?) (5ᵉ, 0)
4. Peut-on menacer d'un zéro si le travail à la maison n'est pas fait ? (5ᵉ, 0)
5. J'ai fait un remplacement pendant lequel j'ai eu trois classes de seconde pendant deux mois et il est clair que je n'ai pas su imposer mon autorité. Je tenais à être souriante mais cela n'a pas marché .
Comment imposer un climat sérieux et un peu « la crainte » du professeur afin d'avoir le pouvoir d'imposer le silence, le respect… ? Quelle attitude avoir dès le premier jour ? (2de, 1)
6. Comment réagir face à un élève très dissipé (n'écoutant aucun conseil, réfractaire au cours, arrogant) ? (4ᵉ, 1)

7. Comment faut-il expliquer aux élèves les règles de discipline ? Doit-on fixer des règles très précises ? (2de, 1)
8. Lorsqu'un DM n'est pas rendu dans les temps, peut-on réclamer une feuille avec les informations de l'élève (nom, prénom, classe, devoir) afin d'avoir une trace écrite et mettre la note appropriée ? (4e, 1)
9. Comment faire face à un problème de discipline provenant d'un élève en particulier et revenant assez souvent ? (2de, 2)
10. Lorsqu'une classe est perturbée (bavardages), vaut-il mieux hausser la voix pour leur dire de se taire ou arrêter son cours pour qu'ils le comprennent d'eux-mêmes ? Y a-t-il une autre méthode (sanction, carnet) ? (2de,2)
11. Quelles sont les diverses méthodes pour diminuer le bavardage ? (2de, 2)
12. Comment réagir aux bavardages ? (5e et 5e, 2)
13. Comment gérer la discipline pour garder un certain silence, quelles sanctions (interro, devoir maison noté, …) ? (2de, 2)
14. Quel comportement adopter face à un élève en refus total
de l'autorité (bavarde, se retourne) ?
de travail (ne sort pas ses affaires, ne s'intéresse pas aux questions, au cours…) ?
de respect (insolent, répond, regards, comportement) ? (5e, 2)
15. Avec une classe de cinquième, assez agitée (surtout le vendredi de 15h à 16h), je voudrais savoir si ça serait utile de faire un plan de classe pour les calmer. (5e + 5e partagée, 2)
16. Quelle est la hiérarchie des sanctions à adopter en cas de bavardage ? (2de, 2)
17. Est-il mal vu, des inspecteurs ou de l'administration, de mettre des punitions (des lignes) aux élèves, pour bavardages à répétition, non écoute des consignes ? (5e &5e, 2)

Synthèse rapide de la séance précédente

9.1. L'autorité de faire respecter une discipline, des règles de vie et de travail, bref, ce qu'on appelle un ***nomos***, c'est d'abord, non l'autorité de qui doit assumer cette charge, ***mais l'autorité de ce* nomos *lui-même***. Et il est très différent, du point du ***sens*** de la situation vécue par la classe, d'imposer aux élèves, telle obligation (ou même déjà de croire et de laisser croire qu'on la leur impose de son propre mouvement, cette obligation ne paraissant reposer alors que sur l'autorité propre du professeur, et donc peut-être sur son arbitraire), ou, par contraste, de s'autoriser du règlement intérieur ou de tel autre texte réglementaire. Pour cette raison, la question de ***l'âge*** du professeur n'a guère de pertinence : pas plus que le jeune gendarme ne s'autorise de lui-même pour faire reproche au monsieur d'âge mûr de telle infraction au code de la route, de même le professeur ne tire pas de lui-même l'injonction qu'il formule à l'adresse de l'élève parfois à peine plus jeune que lui. (D'autant que, aux yeux d'élèves de lycée, même un « jeune professeur », qu'il distingue certes des « vieux » de l'établissement, n'appartient plus depuis plusieurs années à son univers d'âge…)

9.2. Si les indications qui précèdent éclairent la question de l'autorité, elles ne sauraient entièrement les résoudre. Par exemple, la question reste posée de la manière dont chaque acteur va actualiser l'autorité de l'institution dont il est le garant. Toutes les manières de faire ne sont certes pas équivalentes. Dans un ouvrage récent consacré à l'autorité, auquel on pourra plus généralement se référer[3], l'un des auteurs, Serge Héfez, psychiatre, psychanalyste, responsable de l'unité de thérapie familiale du service de psychiatrie de l'enfant et de l'adolescent à l'hôpital de la Pitié- Salpêtrière, à Paris, écrit un chapitre qui s'intitule sans ambiguïté « L'Autorité. Ce n'est pas l'ado qui décide » ; le propos est cependant plus général.

L'autorité est avant tout un processus de séparation qui permet une hiérarchie. Deux personnes peuvent se repérer à l'aide de cette frontière qui les sépare. En cela, l'autorité diffère totalement de la sévérité, de la contrainte ou encore de la violence. Elle repose sur l'acceptation intérieure, chez les deux parties, de cette hiérarchie et donc de

[3]. *Les nouveaux ados. Comment vivre avec ?* (sous la direction de Brigitte Canuel, Bayard, Paris, 2006)

cette séparation. Elle signifie : nous ne sommes pas au même niveau, nous ne sommes pas semblables, pas les mêmes.

Le point de vue précédent appelle immédiatement un commentaire : l'autorité porte sur un certain domaine d'activité ; elle ne couvre pas tous les aspects des relations entre deux personnes. La personne disposant de l'autorité a reçu cette autorité d'une puissance d'investiture, elle a été « autorisée » ; elle ne saurait légitimement en user hors de propos. Sur quoi porte l'autorité du professeur de mathématiques ? À propos de quels « gestes » peut-il assumer une autorité sur l'élève ? Ces questions sont au cœur du métier de professeur de mathématiques. Nous y reviendrons tout au long de cette formation.

10. Venons-en maintenant plus particulièrement aux moyens dont le professeur dispose pour faire respecter cette loi. Ces moyens sont eux aussi fixés par le règlement intérieur de l'établissement et s'appuient sur un texte paru au même BO que le texte sur le règlement intérieur. En voici les titres :

ORGANISATION DES PROCÉDURES DISCIPLINAIRES DANS LES COLLÈGES, LES LYCÉES ET LES ÉTABLISSEMENTS RÉGIONAUX D'ENSEIGNEMENT ADAPTÉ (BO Spécial N°8 du 13 juillet 2000)

On trouvera l'intégralité de ce texte dans les « Documents 2nd dégré » sous le titre punitions_scolaires_et_sanctions_disciplinaires.doc à l'adresse suivante :

http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2008-2009documents_09.html

11 On examine ci-après un extrait de ce texte, en mettant évidence certains passages importants.

I – Rappel des principes généraux du droit
Si la mise en œuvre de la procédure disciplinaire relève de l'organisation propre aux établissements scolaires, elle ne saurait en revanche ignorer les principes généraux du droit qui s'appliquent à toute procédure.

1.1 Principe de la légalité des sanctions et des procédures

Déterminer l'ensemble des mesures et des instances disciplinaires par voie réglementaire et fixer la liste des punitions scolaires et des sanctions disciplinaires dans le règlement intérieur de chaque établissement scolaire relèvent du principe de légalité des sanctions et des procédures. Inscrites dans un cadre légal, les sanctions ne sauraient s'appliquer de façon rétroactive et peuvent faire l'objet d'un recours administratif interne, et, pour celles qui ont pour effet d'interrompre de manière durable la scolarité de l'élève, d'un recours devant la juridiction administrative.

Le respect de ce principe général du droit met chacun en mesure de savoir ce qu'il risque lorsqu'il commet une transgression. C'est dans ces conditions seulement que l'adage « nul n'est censé ignorer la loi » peut trouver son application à l'école.

Il permet en outre de proscrire en matière de punition scolaire et de sanction disciplinaire les pratiques individuelles et marginales qui sont susceptibles de contredire le projet éducatif de l'établissement et de générer de l'incompréhension chez les élèves et leurs familles.

1.2. Principe du contradictoire

Avant toute décision à caractère disciplinaire, qu'elle émane du chef d'établissement ou du conseil de discipline, il est impératif d'instaurer un dialogue avec l'élève et d'entendre ses raisons ou arguments. La sanction doit se fonder sur des éléments de preuve qui peuvent faire l'objet d'une discussion entre les parties. La procédure contradictoire doit permettre à chacun d'exprimer son point de vue, de s'expliquer et de se défendre.

Le ou les représentants légaux de l'élève mineur concerné sont informés de cette procédure et sont également entendus s'ils le souhaitent. Il est rappelé que devant les instances disciplinaires, l'élève peut se faire assister de la personne de son choix, notamment par un élève ou un délégué des élèves.

Toute sanction doit être motivée et expliquée.

1.3. Principe de la proportionnalité de la sanction

La sanction doit avoir pour finalité de promouvoir une attitude responsable de l'élève et de le mettre en situation de s'interroger sur sa conduite en prenant conscience des conséquences de ses actes.

Il est donc impératif que la sanction soit graduée en fonction de la gravité du manquement à la règle et du fait d'indiscipline. Ainsi, le fait qu'un élève ait déjà été sanctionné ne justifie pas à lui seul qu'une sanction lourde soit prononcée pour un nouveau manquement de moindre gravité.

Il convient à cet effet d'observer une hiérarchie entre les atteintes aux personnes et les atteintes aux biens, les infractions pénales et les manquements au règlement intérieur, pour ne pas aboutir à des confusions ou des incohérences dans l'échelle des valeurs à transmettre.

Il sera utile de se référer au registre des sanctions disciplinaires qui constitue un gage de cohérence interne spécifique de l'établissement afin d'éviter des distorsions graves dans le traitement d'affaires similaires et permet de se situer dans un créneau de mesures possibles.

1.4. Principe de l'individualisation des sanctions

Toute sanction, toute punition s'adressent à une personne ; elles sont individuelles et ne peuvent être, en aucun cas, collectives.

Individualiser une sanction, c'est tenir compte du degré de responsabilité de l'élève, de son âge et de son implication dans les manquements reprochés ainsi que de ses antécédents en matière de discipline. On ne sanctionne pas uniquement en fonction de l'acte commis, mais également et surtout s'agissant de mineurs, en considération de la personnalité de l'élève et du contexte de chaque affaire.

Mais la réponse apportée en fonction de la gravité des faits reprochés ne doit pas aboutir à une « tarification » des sanctions, car il serait alors porté atteinte au principe de l'individualisation des sanctions.

La sanction doit avoir en effet pour finalité :

– d'attribuer à l'élève la responsabilité de ses actes, et de le mettre en situation de s'interroger sur sa conduite en prenant conscience de ses conséquences ;

– de lui rappeler le sens et l'utilité de la loi ainsi que les exigences de la vie en collectivité (respect de la société et des individus, nécessité de vivre ensemble de manière pacifique).

II – Les punitions scolaires et les sanctions disciplinaires

Par commodité de langage, les punitions scolaires sont distinguées des sanctions disciplinaires proprement dites.

Ainsi, dans un établissement scolaire, des faits d'indiscipline, des transgressions ou des manquements aux règles de la vie collective peuvent-ils faire l'objet soit de punitions, qui sont décidées en réponse immédiate par des personnels de l'établissement, soit de sanctions disciplinaires qui relèvent du chef d'établissement ou des conseils de discipline.

C'est pourquoi il est demandé que le règlement intérieur de chaque établissement comprenne des dispositions relatives tant aux punitions scolaires susceptibles d'être prononcées qu'aux sanctions disciplinaires proprement dites. Une telle rédaction des règlements intérieurs est susceptible de donner au régime disciplinaire la cohérence qui est indispensable à l'acceptation par les élèves des conséquences des fautes qu'ils peuvent commettre.

Les sanctions ne prennent en effet sens et efficience que lorsqu'elles s'inscrivent réellement dans un dispositif global explicite et éducatif, au travers duquel se construisent respect d'autrui, sens de la responsabilité et respect de la loi.

Il convient de prévoir également des mesures positives d'encouragement prononcées par le conseil de classe, qui pourront être définies dans le cadre du règlement intérieur.

2.1. Conditions de mise en œuvre

À toute faute ou manquement à une obligation, il est indispensable que soit apportée une réponse rapide et adaptée : par une réaction et une explication immédiates, il importe de signifier à l'élève que l'acte a été pris en compte.

Dans le même temps, le ou les responsables légaux des mineurs doivent être informés et, s'ils le demandent, pouvoir rencontrer un responsable de l'établissement.

Pour assurer cohérence et harmonisation des pratiques en matière disciplinaire, aussi bien dans la durée qu'entre les différentes classes d'un même établissement, une échelle des punitions et des sanctions figure au règlement intérieur.

Les punitions scolaires doivent être distinguées des sanctions disciplinaires :

– les punitions scolaires concernent essentiellement certains manquements mineurs aux obligations des élèves, et les perturbations dans la vie de la classe ou de l'établissement. Elles sont fixées par le règlement intérieur ;

– les sanctions disciplinaires concernent les atteintes aux personnes et aux biens et les manquements graves aux obligations des élèves. Le règlement intérieur doit reprendre la liste des sanctions fixées par les 2^e^ et 3^e^ alinéas de l'article 3 du décret du 30 août 1985 modifié.

2.2. Les punitions scolaires

Considérées comme des mesures d'ordre intérieur, elles peuvent être prononcées par les personnels de direction, d'éducation, de surveillance et par les enseignants ; elles pourront également être prononcées, sur proposition d'un autre membre de la communauté éducative, par les personnels de direction et d'éducation.

La liste indicative ci-après peut servir de base à l'élaboration des règlements intérieurs des établissements :

– inscription sur le carnet de correspondance ;

– excuse orale ou écrite ;

– devoir supplémentaire assorti ou non d'une retenue ;

– exclusion ponctuelle d'un cours. Elle s'accompagne d'une prise en charge de l'élève dans le cadre d'un dispositif prévu à cet effet. Justifiée par un manquement grave, elle doit demeurer tout à fait exceptionnelle et donner lieu systématiquement à une information écrite au conseiller principal d'éducation et au chef d'établissement ;

– retenue pour faire un devoir ou un exercice non fait.

Toute retenue doit faire l'objet d'une information écrite au chef d'établissement.

Les devoirs supplémentaires effectués dans l'établissement doivent être rédigés sous surveillance.

Les punitions infligées doivent respecter la personne de l'élève et sa dignité : sont proscrites en conséquence toutes les formes de violence physique ou verbale, toute attitude humiliante, vexatoire ou dégradante à l'égard des élèves.

Il convient également de distinguer soigneusement les punitions relatives au comportement des élèves de l'évaluation de leur travail personnel. Ainsi n'est-il pas permis de baisser la note d'un devoir en raison du comportement d'un élève ou d'une absence injustifiée. Les lignes et les zéros doivent également être proscrits.

2.3. Les sanctions disciplinaires

Les sanctions sont fixées dans le respect du principe de légalité et doivent figurer dans le règlement intérieur de l'établissement.

L'échelle des sanctions est celle prévue par le décret du 30 août 1985 modifié :

– avertissement,

– blâme,

– exclusion temporaire de l'établissement qui ne peut excéder la durée d'un mois, assortie ou non d'un sursis total ou partiel,

– exclusion définitive de l'établissement assortie ou non d'un sursis.

Le blâme constitue une réprimande, un rappel à l'ordre verbal et solennel, qui explicite la faute et met l'élève en mesure de la comprendre et de s'en excuser. Adressé à l'élève en présence ou non de son ou ses représentants légaux par le chef d'établissement, il peut être suivi d'une mesure d'accompagnement d'ordre éducatif.

Lorsque le sursis est accordé, la sanction est prononcée, mais elle n'est pas mise en exécution, dans la limite de la durée du sursis, en cas de sursis partiel. Il est précisé que la récidive n'annule pas le sursis. Elle doit donner lieu à l'engagement d'une nouvelle procédure disciplinaire.

Le chef d'établissement transmettra au recteur d'académie, sous couvert de l'inspecteur d'académie, directeur des services départementaux de l'éducation nationale, les procès verbaux des conseils de discipline et un état trimestriel des exclusions éventuellement prononcées avec leurs motifs.

Dès lors que les punitions et les sanctions qui peuvent être prononcées dans l'établissement scolaire sont clairement définies, toute mesure qui a pour effet d'écarter durablement un élève de l'accès au cours et qui serait prise par un membre des équipes pédagogique et éducative en dehors des procédures réglementaires décrites dans la présente circulaire, est assimilable à une voie de fait susceptible d'engager la responsabilité de l'administration.

12. On voit par exemple qu'il est tout à fait possible d'imposer à un élève ***une retenue pour faire un travail non fait*** (classeur non à jour, DM non rendu, etc.), en respectant certaines conditions (information écrite au chef d'établissement, surveillance). Il est de même tout à fait possible d'infliger un ***avertissement***, qui est une ***sanction*** (et non une punition), et qui, du point de vue de la gravité des sanctions, vient avant le ***blâme***. Il est également tout à fait possible de formuler un ***encouragement*** à l'égard d'un élève, mais que, en sens inverse, « le fait qu'un élève ait déjà été sanctionné ne justifie pas à lui seul qu'une sanction lourde soit prononcée pour un nouveau

manquement de moindre gravité ». D'une manière générale, on retiendra comme premier principe à mettre en œuvre sans faiblir que, ***« à toute faute ou manquement à une obligation, il est indispensable que soit apportée une réponse rapide et adaptée : par une réaction et une explication immédiates, il importe de signifier à l'élève que l'acte a été pris en compte »***. Cela ne signifie pas pour autant que l'on recoure constamment à des punitions, pour ne pas parler de sanctions proprement dites, mais que l'on n'hésitera pas, le cas échéant, à y recourir. À l'instar des règles de vie et de travail, l'ensemble des punitions et sanctions que prévoit le règlement intérieur sur la base du texte cité plus haut ne saurait bien entendu être présenté en un coup aux élèves : il le sera progressivement, autant que la chose apparaît nécessaire, en vertu du principe selon lequel « toute sanction doit être motivée et expliquée ».

13. Avant de sanctionner, il convient d'avoir rappelé ou énoncé la règle dont le manquement sera sanctionné : ainsi en va-t-il, par exemple, pour « l'oubli du manuel ». Mais la liste des sanctions elles-mêmes ne relève pas de la décision personnelle du professeur : le professeur ***n'est pas libre d'ajouter*** des sanctions de son cru à la liste prévue par les instances dont il s'autorise dans la classe.

14. En-deçà et au-delà de la punition ou de la sanction éventuelle, on s'attachera à penser le traitement des situations de manquement en termes de ***réparation***. Le texte déjà longuement cité consacre à ce sujet le développement reproduit ci-après :

2.4.2. Les mesures de prévention, de réparation et d'accompagnement

Le règlement intérieur peut prévoir des mesures de prévention, des mesures de réparation prononcées de façon autonome. Il peut également prévoir des mesures de réparation ou d'accompagnement prononcées en complément de toute sanction.

Ces mesures peuvent être prises par le chef d'établissement ou le conseil de discipline, s'il a été saisi.

Les mesures de prévention

Il s'agit de mesures qui visent à prévenir la survenance d'un acte répréhensible (exemple : la confiscation d'un objet dangereux). L'autorité disciplinaire peut également prononcer des mesures de prévention pour éviter la répétition de tels actes : ce peut être d'obtenir l'engagement d'un élève sur des objectifs précis en termes de comportement. Cet engagement donne lieu à la rédaction d'un document signé par l'élève.

Les mesures de réparation

Comme l'a précisé la circulaire du 27 mars 1997, la mesure de réparation doit avoir un caractère éducatif et ne doit comporter aucune tâche dangereuse ou humiliante. L'accord de l'élève et de ses parents, s'il est mineur, doit être au préalable recueilli. En cas de refus, l'autorité disciplinaire prévient l'intéressé qu'il lui sera fait application d'une sanction.

Le travail d'intérêt scolaire

Mesure de réparation, il constitue également la principale mesure d'accompagnement d'une sanction notamment d'exclusion temporaire ou d'une interdiction d'accès à l'établissement.

En effet, cette période ne doit pas être pour l'élève un temps de désœuvrement, afin d'éviter toute rupture avec la scolarité. L'élève est alors tenu de réaliser des travaux scolaires tels que leçon, rédaction, devoirs, et de les faire parvenir à l'établissement selon des modalités clairement définies par le chef d'établissement en liaison avec l'équipe éducative.

L'élève doit pouvoir à cette occasion rencontrer un membre de l'équipe pédagogique. En effet, un élève momentanément écarté de l'établissement reste soumis à l'obligation scolaire. Il convient donc de prévenir tout retard dans sa scolarité et de préparer son retour en classe.

L’ensemble de ces mesures place ainsi l’élève en position de responsabilité. Elles ne peuvent être prescrites que si elles sont prévues au règlement intérieur.

15. On trouvera le texte de la circulaire du 27 mars 1997, mentionnée dans ce qui précède, dans le fichier Mesures alternatives au conseil de discipline.doc. Cette circulaire rappelle notamment ceci :

Il apparaît opportun – et certains établissements l’ont déjà expérimenté – de mettre en place des formules souples, alternatives au conseil de discipline, notamment dans le cas d’attitudes et de conduites perturbatrices répétitives d’élèves qui manifestent ainsi une incompréhension, parfois un rejet des règles collectives.

Elle préconise à cet égard la création dans l’établissement d’une commission « destinée à favoriser le dialogue avec l’élève et à faciliter l’adoption d’une mesure éducative personnalisée », et ajoute à ce propos :

La nature des mesures que cette commission peut proposer implique l’engagement personnel de l’élève à l’égard de lui-même comme à l’égard d’autrui et fait appel à sa volonté de participer positivement à la vie de la communauté scolaire.

16. Cette notion « institutionnelle » de ***réparation*** doit inspirer les décisions du professeur dans le cadre moins formel et plus immédiat des manquements les plus ordinaires qui ponctuent la vie de la classe. Ainsi, ***si les dispositifs mis en place dans la classe donnent un sens à la chose***, le professeur pourra-t-il demander à l’élève ayant oublié son livre, afin de réparer le tort ainsi causé tant ***à lui-même*** qu’***à la classe*** (dans le fonctionnement de laquelle son oubli n’aura pas manqué de créer une petite perturbation), de présenter oralement, lors d’une prochaine séance, à titre de bilan ou de rappel, le contenu du travail auquel le manuel oublié avait servi de support, etc.

2.2. *Organisation de l’étude : AER*

1. AER : Activité Encadrée : OK
mais Recherche…
Placer l’élève au centre de la classe est assez difficile à gérer au niveau de la discipline et du travail individuel, c’est vite la panique !
Ne faut-il pas prendre le meilleur des deux méthodes (Traditionnelle : cours – exos et AER – Synthèse – Exos) et alterner ? **(4^e, 2)**
2. Faut-il faire toutes les démonstrations en AER ou peut-on en faire dans la partie synthèse ?**(5^e & 4^e, 1)**
3. Certaines AER peuvent-elles être données en travail à la maison ? Si oui, quels sont les critères ? **(2^{de}, 2)**
Je n’arrive pas à trouver de « bonnes » AER, situations problèmes. **(2^{de}, 2)**
4. Lors des activités, j’ai du mal à savoir le temps que je dois impartir aux élèves pour répondre aux questions. De plus quand je leur demande si ils ont fini, j’entends juste quelques « oui » timides. Comment faire pour savoir quand commencer la correction ? **(2^{de}, 2)**

① Ce qui frappe, d’abord, à la lecture des questions précédentes, c’est la ***prégnance de l’ancienne structure binaire qui, on l’a déjà dit, n’est plus de mise.***

❶ La structure ternaire est pourtant apparue dans les programmes il y a bien longtemps. Ainsi, dans le programme de sixième publié ***en 1985*** pouvait-on déjà lire, sous le titre B) Méthodes, des instructions générales :

2. On privilégiera donc l’activité de chaque élève. Mais on n’oubliera pas la nécessité d’une pédagogie n’assujettissant pas tous les élèves aux mêmes rythmes sans que soit délaissé l’objectif d’acquisitions communes.

Dès lors, les professeurs vont avoir à choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour des « outils » qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente.
Les activités choisies doivent développer la capacité à se poser des problèmes et de progresser vers leur résolution. Elles doivent aussi :
Permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne donner que des consignes très simples et n'exiger que les connaissances solidement acquises par tout le monde ;
Créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;
Rendre possible la mise en jeu des outils prévus ;
Fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement. On y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.
Le professeur doit donc procéder avec une attention particulière au choix pertinent de situations à étudier. Il doit aussi veiller à bien organiser les phases du déroulement de l'activité. Une condition première est de prévoir une durée suffisante. Pour le développement complet de l'activité formatrice, de la phase initiale à la mise en place des connaissances désormais considérées comme acquises, l'échelle des temps est en heures, voire en semaines, comme dans l'étude de la proportionnalité.
C'est à ce prix que l'on peut :
Habituer à l'art d'expérimenter et à celui de conjecturer, donc d'entraîner à chercher ;
Ménager des séquences déductives motivantes, de plus en plus prolongées, nombreuses et de difficultés progressives au long des quatre années du collège ;
Souligner le sens, l'intérêt, la portée des connaissances mathématiques en les enseignant en interaction avec les autres disciplines et avec la vie quotidienne (pourcentages, échelles, représentations graphiques...) et en utilisant les moyens modernes de communication (informatique, banques de données, audiovisuel...).

❷ Voici ce que l'on trouve, ***vingt ans après***, dans le programme de la classe de sixième actuellement en vigueur.

La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, et lorsque c'est possible, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci sont bien maîtrisées, elles fournissent à leur tour de nouveaux « outils », qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. Ainsi, les connaissances peuvent prendre du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose et des problèmes qu'il résout. Les situations choisies doivent :
– prendre en compte les objectifs visés et une analyse préalable des savoirs en jeu, ainsi que les acquis et les conceptions initiales des élèves ;
– permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises par tous ;
– créer rapidement un problème assez riche pour provoquer des conjectures ;
– rendre possible la mise en jeu, puis la formulation des notions ou des procédures dont l'apprentissage est visé ;
– fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.
Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l'établissement de connaissances nouvelles, elle est également un moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles.

❸ Ce qui vaut pour la sixième vaut pour toutes les classes du collège et du lycée. Ainsi peut-on lire dans le document d'accompagnement du programme de la classe de seconde actuellement en vigueur (publié en 2000) :

> L'organisation de la classe doit permettre aux élèves d'expérimenter les diverses facettes de l'activité mathématique décrites dans l'introduction du programme. Certaines (« chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis au propre, […] accéder au plaisir de la découverte et à l'expérience de la compréhension ») renvoient à l'étude de situations et à la résolution de problèmes : le choix de ces situations et de ces problèmes doit être fait avec attention ; ils déterminent la qualité de l'activité scientifique menée dans la classe, légitiment l'introduction de nouveaux contenus et justifient ensuite leur efficacité. D'autres (« appliquer des techniques bien comprises, étudier une démonstration qu'on n'aurait pas trouvée soi-même, […] bâtir un ensemble cohérent de connaissances ») relèvent de la découverte puis de l'assimilation d'un savoir dont les élèves doivent pouvoir sentir la cohérence et l'harmonie.
> (...)
> « Bien entendu, le choix d'une stratégie pour la mise en place de notions, de résultats et d'outils nouveaux ne saurait être uniforme : l'analyse des concepts à étudier et de leur articulation avec le champ des problèmes à résoudre, les acquis antérieurs des élèves, la simplicité, l'efficacité […] sont autant de facteurs à prendre en compte » (programme de 1990).
> Contrairement à l'image que certains manuels scolaires relatifs aux programmes de 1990 ont pu laisser transparaître, l'enseignement ne peut pas être réduit au simple énoncé de définitions et de propriétés admises, accompagné d'exercices d'applications très répétitifs.

② C'est cela dont il est rendu compte dans la notice « Première rentrée des classes », distribuée dès la rentrée, notamment dans le passage suivant.

> Dans la classe de mathématiques, ainsi, le « cours magistral » n'est aujourd'hui plus de mise, et il en va de même de cette forme adoucie qu'est le « cours dialogué », qui fait à l'élève une place souvent illusoire. L'organisation didactique, dont dépend d'une manière essentielle la ***réussite des apprentissages***, est aujourd'hui centrée sur la notion d'***activité***. Encore cette notion doit-elle être précisée ! Trop souvent, en effet, ce mot semble ne désigner – à tort – qu'une simple phase « préparatoire », voire un pur « échauffement » en début d'heure, sans lien fort avec ce qui suivra. Par contraste, l'activité que l'on qualifiera ici d'***activité d'étude et de recherche*** (AER), qui doit laisser une large place à l'action et à la réflexion ***des élèves***, est ***le cœur de la vie mathématique de la classe***. C'est là, en effet, que se construisent les mathématiques que le professeur doit enseigner et que les élèves doivent apprendre : toute AER proposée à la classe doit ainsi provoquer l'émergence de notions et outils mathématiques visés.

Une **AER** n'est donc ***pas une option***, un supplément d'âme, dont on pourrait s'exonérer mais une condition ***sine qua non*** du travail de la classe à propos d'un thème donné. Elle est constituée, on le répète, d'un problème, soit encore d'une situation assortie d'une question, et c'est le travail de cette question pour produire une réponse qui doit permettre l'émergence des mathématiques à étudier. Ainsi, on a vu plus haut, dans l'observation que nous avons commencé à analyser, une AER qui n'est sans doute pas exempte de critiques mais qui satisfait déjà à certaines des exigences de base : un problème qui permet de s'appuyer sur les acquis géométriques des élèves pour faire émerger une partie de l'organisation mathématique au programme de la classe de 5^e, celle relative à la notion de parallélogramme. Le ***travail démonstratif***, qui permet de déduire des résultats déjà disponibles le ou les résultats enjeux de l'étude, réalisant un episode du moment technologico-théorique, il devra ***prendre place dans l'AER***, même si le travail de mise en forme de la démonstration sera lui réalisé dans la synthèse – on y reviendra.

③ On ajoutera que la mise en œuvre de ce dispositif pour enseigner les mathématiques ***ne dépend pas du bon vouloir de tel professeur***, ou de tel ou tel formateur, encore moins du plaisir que l'on prendrait à le faire, mais ***elle s'impose à la profession*** par le biais des programmes, que chacun est tenu de respecter.

Agir en fonctionnaire de l'État et de façon éthique et responsable **(...)** Il exerce sa liberté et sa responsabilité pédagogique dans le cadre des obligations réglementaires et des textes officiels ; (...) **Concevoir et mettre en œuvre son enseignement** **(...)** Le professeur connaît : (...) – les programmes d'enseignement et documents d'accompagnement qui le concernent à tous les niveaux d'enseignement des premier et second degrés ;

④ Il n'en reste pas moins que l'on peut demander ce qui justifie l'existence de ce dispositif.
❶ On donnera ici quelques éléments que l'on a rencontrés dans les textes précédents, en les commentant brièvement oralement.

C'est à ce prix que l'on peut : Habituer à l'art d'expérimenter et à celui de conjecturer, donc d'entraîner à chercher ; Ménager des séquences déductives motivantes, de plus en plus prolongées, nombreuses et de difficultés progressives au long des quatre années du collège ; Souligner le sens, l'intérêt, la portée des connaissances mathématiques (...)

La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, et lorsque c'est possible, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci sont bien maîtrisées, elles fournissent à leur tour de nouveaux « outils », qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. Ainsi, les connaissances peuvent prendre du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose et des problèmes qu'il résout.

L'organisation didactique, dont dépend d'une manière essentielle la ***réussite des apprentissages***, est aujourd'hui centrée sur la notion d'***activité***.

Commentaire – On a insisté sur la ***motivation des connaissances mathématiques*** (réponse « en actes » à la question « à quoi ça sert, les mathématiques ? ») ; les ***théories didactiques*** (on apprend « en situation »).

❷ On peut ensuite mobiliser les ***moments de l'étude*** pour étudier la différence entre les deux structures envisagées. Dans la structure Cours/exercices, le cours réalise le moment de l'institutionnalisation, et c'est le professeur qui, ordinairement occupe à peu près toute la place, tandis que les exercices sont censés réaliser le moment du travail de l'organisation mathématique – la place respective du professeur et de l'élève dans la réalisation de ce moment dépendant de la technique didactique employée, même si c'est souvent le professeur qui est le principal acteur. Les trois moments de l'étude que sont le moment de la (première) rencontre, le moment exploratoire et le moment technologico-théorique sont ainsi laissés à la charge de l'élève, ce qui conduit dans la plupart des cas au fait que ces moments sont absents de l'organisation de l'étude. Dans bien des cas, il se passe que les élèves se servent des exercices pour réaliser le moment de la (première) rencontre et le moment exploratoire, voire une petite partie du moment technologico-théorique, avec une réussite très inégale – et inégalitaire – cela va sans dire ; le moment du travail de l'organisation mathématique est alors un quatrième moment laissé à leur charge. C'est dire que la structure cours/exercices demande un fort travail en complète autonomie des élèves ce qui, on le sait, dessert les élèves socio-économiquement défavorisés.

Nous poursuivrons l'étude de cette question lors du prochain séminaire.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 4 : mardi 23 septembre 2008

Informations

Stage de pratique accompagnée à l'étranger

Vacance de Séminaire le mardi 30 septembre 2008 ; les GFP ont bien lieu le matin.

Pour les CAPEP et les PSSIT, Mise à niveau TICE mardi 30 septembre 2008 de 14 h à 18 h

Mise au point
SPA : Se comporter en fonctionnaire de l'État de façon éthique et responsable

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse // 2. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 3. Forum des questions

0. Question de la semaine

Pas véritablement de thèmes nouveaux cette semaine dans les problèmes soulevés par les questions. On citera seulement cette question qui illustre exemplairement ce que nous signalions la semaine dernière à propos des différences de techniques qui surprennent lorsque l'on change d'institution :

Dans mon collège, il y a une heure par quinzaine destinée à la « préparation brevet », ce qui fait 6 heures par trimestre. Sur ces 6 heures, les professeurs ont demandé à en passer 2 pour la préparation de 2 sujets qu'ils feraient passer pendant les autres heures. Est-ce normal ? (Dans mon ancien collège, on avait de brèves concertations, un professeur préparait le sujet, à partir de là on en discutait à nouveau, il retravaillait dessus, etc. En bref, on passait les 6 heures avec les élèves) (3, 6^{e} et 4^{e})

1. Observation et analyse

Nous reprenons ici le travail d'observation et d'analyse de la séance de 5^{e} à propos de l'étude du parallélogramme. On rappelle ci-dessous le travail qu'il y avait à faire pour cette séance.

Analyser la manière dont sont réalisés chacun des trois moments de l'étude présents dans la partie du compte rendu examiné.

Travail collectif dirigé

On trouvera ci-dessous une synthèse du travail collectif mené. Les traces écrites des propositions effectuées figurent dans un encadré, et le résultat du débat est signalé avec un arrière plan de couleur, assorti de quelques commentaires ou remarques en italique.

Moment de première rencontre : lecture de l'énoncé jusqu'à ce que P demande ce que sont les données. Technique de réalisation : un élève lit l'énoncé, et le professeur fait identifier aux élèves le problème en écrivant la question au tableau et demande aux élèves ce que sont les données. Dans la réalisation de ce moment, la donnée de la figure aide à la dévolution du problème.

Autre proposition de découpage : jusqu'au temps de recherche individuel ; en effet, cela concourt aussi à circonscrire le problème de réunir les données qui vont permettre d'avancer.

Argument contre avancé : le fait d'engager la problématisation est déjà une élaboration de technique (pour tracer une droite, il faut deux points).

Défense : Prendre deux points pour tracer une droite, c'est déjà connu.

On en conclut que ça dépend du type de tâches qu'on va vouloir institutionnaliser

Autre proposition de découpage, intermédiaire : au moment où la classe aboutit au fait qu'il faut un autre point.

Le moment de première rencontre est réalisé en plusieurs épisodes (voir *infra*). L'épisode principal est celui qui part de la lecture de l'activité pour arriver au fait qu'il s'agit de trouver un deuxième point sur la feuille. En dehors des ingrédients de réalisation signalés dans l'encadré, on notera que, pour faire avancer la formulation du problème et sa dévolution, la professeur procède en relançant régulièrement la réflexion des élèves par des questions, et qu'elle note systématiquement la progression de l'étude au tableau ce qui conditionne sans doute la poursuite heureuse du processus.

Dans l'analyse des moments de l'étude, il faut voir les moments comme des dimensions du processus d'étude : en un passage du compte rendu, on est souvent à l'intersection de plusieurs moments. Le moment de première rencontre cité est ici lié au moment exploratoire qu'il prépare : la fin du travail de la formulation du problème participe également du moment exploratoire mais avec une valence faible ;on en est encore à dégager le type de tâches qu'il va falloir explorer.

Moment exploratoire : Temps de recherche individuelle des élèves et mise en commun des différentes propositions : mise à l'épreuve des différentes propositions par rapport au problème posé et à la solution qu'elles permettent d'apporter. Et le professeur procède par questions « cruciales »

Une question cruciale ici par exemple : Il est où [le point] ?

Moment exploratoire : on en voit un épisode dans le temps de recherche individuelle des élèves et la mise en commun qui suit. Pendant le travail individuel des élèves, le professeur circule dans la classe pour prendre de l'information et arrête le travail dès qu'il juge que la classe a assez avancé. La mise en commun des résultats obtenus procède par le recueil de différentes propositions et leur mise à l'épreuve : la première, obtenue par ajout d'une feuille, est écartée notamment parce qu'elle ne répond pas au problème posé et est impossible à réaliser au tableau (où le point C se situerait « dans le vide ») ; une deuxième proposition est une proposition qui n'a pas été réalisée par l'élève sur sa feuille donc on ne sait rien sur son résultat ; la troisième proposition (symétrie par rapport à (AD))est prise en considération mais son examen est repoussé. Comme précédemment, le professeur note les avancées au tableau au fur et à mesure ; et la technique émerge des propositions de la classe, dirigée par des questions du professeur.

On notera que l'épisode précédent comporte, outre un épisode du moment exploratoire, un épisode du moment de la première rencontre, la question de la détermination du point C devant être écartée au moins une fois encore à la fin de l'épisode. Et qu'il participe, avec une valence faible, du moment technologique, puisqu'il aboutit à l'émergence de l'énoncé de la propriété.

Moment technologico-théorique : expérimentation pour établir la véracité de la propriété. On a également l'énoncé de la propriété. Mise en œuvre : Logiciel de géométrie dynamique ; Ordinateur relié à un vidéoprojecteur ; c'est le professeur qui fait la figure en décrivant la construction et en ayant un élève au tableau qui prend des notes. Un élève qui vient faire l'expérimentation, au début guidé par le professeur, puis par la classe. Fait géométrique vrai dans l'espace sensible ; déduction de la TGD admise.

Le moment technologico-théorique débute par l'énoncé de la propriété et de la décision prise par le professeur d'expérimenter. Le travail de justification de la propriété est expérimental (voir technique ci-dessus), et on aboutit donc au fait que la propriété est vraie dans l'espace sensible. On admet que la propriété pourrait être déduite de la théorie géométrique dont on dispose.

La réalisation du moment technologico-théorique peut comporter deux aspects : un aspect expérimental, qui établit la véracité de la propriété (géométrique, numérique, statistique, etc) et qui la constitue comme un fait avéré de son domaine de réalité ; un aspect déductif, qui déduit des éléments déjà présents dans la théorie mathématique disponible la propriété que l'on sait vraie (ce qui constitue une démonstration). Ces deux aspects peuvent être inégalement présents dans la réalisation du moment technologico-théorique.
Nous reviendrons sur ce point dans les prochaines séances.

Pour la prochaine séance de séminaire du 7 octobre 2008 :

Analyser ce que l'on voit de l'OM et de l'OD dans la première partie du compte rendu.

Le travail sera effectué par trinôme et on rendra une mise en forme du travail effectué par courriel à m.artaud@aix-mrs.iufm.fr pour le 4 octobre.

On trouvera ci-dessous la liste des trinômes déjà constitués par GFP.

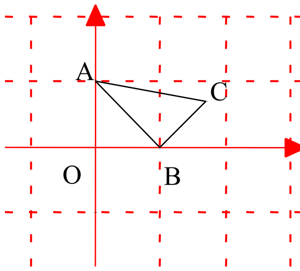
MJ : (Sylvain Astier, Alexandra Devilers, Elodie Maysou) ; (Daniela Caraffa-Bernard, Bruno Michel) ; (Christophe Coupard, Alain Gleyze) ; (Olivier Dumont, Marianne Kiledjian, Nicolas Laurent) ; (Anne Martinet, Marion Rubin, Elodie Vadé).

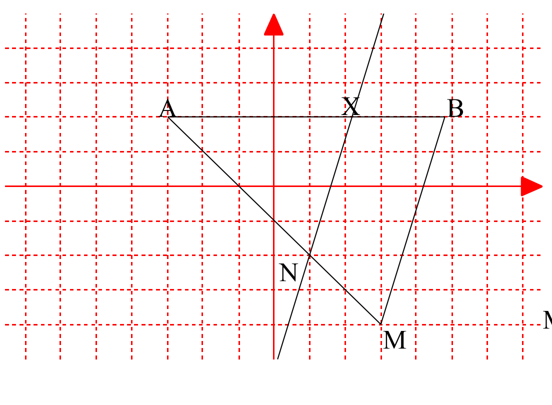
OS : (Rodolphe Arnaud, Arnaud Combes, Mounir El Farri) ; (Nelly Bofelli, Samuel Der Monsessian) ; (Nicolas Chekroun, Vincent Dambreville, Céline Goujon) ; (Nicolas Mizoule, Raphaël Rigaud, Florian van Becelaere).

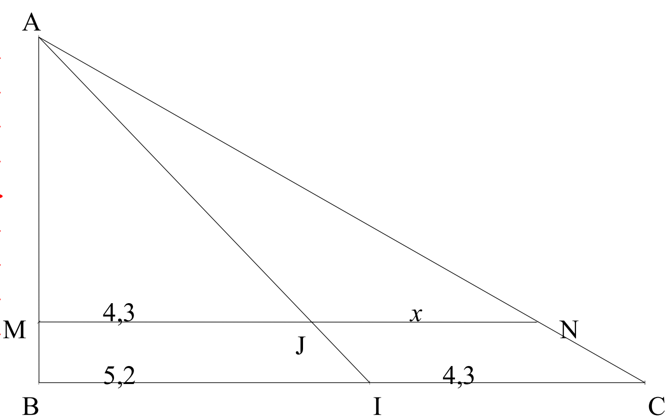
CR : (Souaad Benhadi, Sihame El Khaine) ; (Francine Bert, Yanna Pons et Benjamin Faure) ; (Vincent Boilard, Hamdoune Lazrek) ; (Renaud Cortinovis, Matthieu Bruno, Sylvain Samat).

Le travail précédent a mis en évidence que le moment de la première rencontre peut être difficile à réaliser et peut parasiter quelquefois durablement le travail à mener (ce qui n'est pas le cas dans la séance considérée). Pour aider notamment à la dévolution du problème que ce moment permet de réaliser, on a avantage à ***penser les AER*** non isolées mais ***dans le cadre d'un parcours d'étude et de recherche (PER)*** comme le signalait la notice « Première rentrée des classes », et comme le développe la notice « Temps de l'étude » qu'il conviendra d'étudier pour la prochaine séance de séminaire. On en reproduit ici le paragraphe 2.9.

2.9. La mise en œuvre des principes de gestion précédents suppose évidemment l'existence d'une ***dynamique de l'étude*** que le professeur s'interdira de laisser s'emballer, dériver, musarder, etc. Dans une organisation générale de l'étude d'un style maintenant classique, cette dynamique est supposée être régulièrement relancée par l'introduction, par le professeur, d'une AER nouvelle, souvent sans lien avec celles qui l'ont précédées non plus qu'avec celles qui suivront [4]. Cette structure faiblement intégrée de la suite des AER impulsant l'étude pose problème : l'expérience montre en effet que cette ossature didactique est relativement fragile parce que l'introduction *ex abrupto* d'une AER nouvelle se fait alors, en règle générale, sans ***motivation mathématique*** suffisante, et en particulier sans véritable raison autre que la volonté – du professeur, ou même de la classe, quand celle-ci a voix au chapitre en la matière – de lancer l'étude de tel ou tel bloc thématique. Par contraste, la dynamique à lancer et à nourrir gagne à avoir pour moteur, non une suite peu intégrée d'AER organisées chacune autour d'une question ***isolée***, dont le choix, extrinsèque, resterait entièrement à la charge du professeur (éventuellement en dialogue avec la classe), mais un petit nombre de suites d'AER intégrées au sein de ce qu'on nommera un PER, un ***parcours d'étude et de recherche*** engendré par une ***« grande » question***, c'est-à-dire par une question ayant un ***fort pouvoir générateur***, et qui va donc ***motiver***, au plan de la connaissance, l'étude de beaucoup de questions.
À titre d'exemple, considérons la figure ci-contre, sur laquelle $\widehat{ABC} = 90°$ et BC = 1 ; on voit aisément qu'on a AC = $\sqrt{3}$. On a ainsi ***« construit graphiquement »*** le nombre $\sqrt{3}$, et on obtient alors une valeur décimale approchée de ce nombre ***par une simple mesure de longueur***. Cet exemple illustre de manière simplifiée ce qu'on nommait autrefois ***calcul graphique***, domaine des mathématiques appliquées aujourd'hui presque oublié mais qui, pendant plus d'un siècle à partir de 1860, permit aux ingénieurs d'effectuer graphiquement des calculs en tous genres (évaluation de fonctions, calcul d'intégrales, résolution de systèmes d'équations, etc.). En 4^e, notamment, on peut se proposer un parcours d'étude et de recherche portant sur la question de la construction d'un « calculateur graphique », c'est-à-dire visant à développer un ensemble d'***algorithmes géométriques*** permettant d'effectuer graphiquement les principaux types de calculs rencontrés à ce niveau. Sur la figure ci-dessous, à gauche, on a ainsi « construit », à titre d'exemple, sur papier quadrillé, le nombre AX = $\frac{2}{3} \times 7{,}8$; tandis que, sur la figure de droite, on a construit, sur papier blanc, le nombre $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$.







[4] Sur la notion d'AER, voir la notice *Première rentrée des classes*.

À partir du calculateur graphique peu à peu construit, on pourra fabriquer un calculateur ***électronique*** en utilisant un logiciel de géométrie dynamique tel Géoplan ou Geogebra : il suffit pour cela d'exécuter sur Géoplan ou Geogebra l'algorithme géométrique trouvé, puis de demander au logiciel de mesurer la distance voulue. Mais on notera surtout que l'étude de la question génératrice du PER – comment calculer graphiquement ? – engendre nombre de questions qu'il peut être pertinent d'étudier en 4e (ou en d'autres classes). Ainsi apparaît « naturel », dans ce PER, de se demander quels entiers naturels n s'écrivent comme une ***somme*** de deux carrés d'entiers ($n = x^2 + y^2$) : si par exemple on cherche à « construire » le nombre $\sqrt{202}$, on observera que $202 = 11^2 + 9^2$ et il suffira alors de mesurer, sur une feuille de papier d'écolier, la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle ont pour longueur 11 cm et 9 cm. On justifierait de semblable façon le fait de s'interroger [5] sur la nature des entiers n qui s'écrivent comme une ***différence*** de carrés d'entiers ($n = x^2 - y^2$). Bien entendu, le fait de prendre la décision de lancer la classe dans l'étude de telle question poussée en avant par l'étude de la question à l'origine du PER, ou le fait, cette étude amorcée, de l'interrompre à tel moment, incombe en dernier ressort au professeur, agissant en directeur d'étude selon les principes indiqués plus haut.

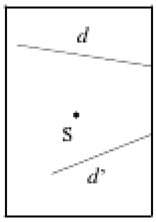
Ainsi, dans la classe de 5e observée, pourra-t-on envisager de travailler sur d'autres problèmes relevant d'un même « grand » type de tâches que l'on pourrait formuler ainsi :

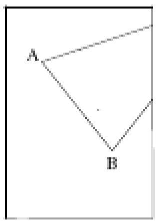
« Comment marquer ou tracer (avec les instruments habituels : règle, compas, équerre, etc.) un certain élément (un point, un segment, etc.) d'une figure tracée sur une feuille de papier lorsque les techniques graphiques connues supposent donnés des éléments de la figure dont l'un au moins est inaccessible parce que situé hors de la feuille ? »

On en donnera ci-dessous deux exemples.

Problème 1. Sur une feuille, on a tracé deux droites d et d' qui se coupent hors de la feuille (voir ci-dessous, figure de gauche). On voudrait tracer sur la feuille la partie du segment qui joint un point S donné au point d'intersection de *d* et *d'*.

Problème 2. Sur une feuille de papier, on a voulu tracer un triangle ABC dont, en fait, le sommet C tombe hors de la feuille (ci-dessous, à droite). Pour une raison non précisée, on souhaite tracer la partie figurant sur la feuille de la hauteur issue de C.





Avant de poursuivre le travail, chaque participant au Séminaire note sur une feuille un point qui lui semble positif et un point qui lui semble négatif dans la mise en œuvre de la notion de PER.

2. Problématique et fonctionnement du Séminaire

[5] Cette dernière question peut être étudiée en 4e : on montre aisément que les entiers en question sont les entiers impairs et les entiers multiples de 4. La première, en revanche, ne peut guère être étudiée très avant (on démontre que les entiers cherchés sont ceux dans la décomposition en facteurs premiers desquels les facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 sont affectés d'un exposant *pair*) ; mais ce n'est pas une raison pour ne pas la poser, et l'étudier quelque peu, si elle se présente.

Lors de la présentation du document sur la formation et la validation, nous avions annoncé une rubrique : ***Les Archives du Séminaire***, qui prend place dans la partie ***Séance d'explicitation*** du Séminaire.

4.1. La rubrique ***Les Archives du Séminaire*** a pour objet la recherche et la présentation d'éléments de réponse $R^{\Diamond}$ à certaines questions Q dans les archives des séminaires des années 2000-2001 à 2007-2008. (Chaque année de séminaire fait l'objet d'un fichier unique, qu'on trouvera à l'adresse http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fi/pcl2/2A.TXT/2008-2009/ombilic.html et qu'on aura avantage à sauvegarder sur une clé USB pour s'en faciliter la consultation.) Cette rubrique se réalise à travers le dispositif décrit ci-après.

– Une question choisie par le responsable du Séminaire après consultation des tuteurs est communiquée à un trinôme dont l'un des membres est concerné par la question ; ce trinôme procède à une recherche dans les ***Archives du Séminaire*** afin de dégager les éléments de réponse que ces archives recèlent.

– Le trinôme désigné prépare, ***pour la séance d'explicitation suivante***, une présentation orale, d'une durée de ***10 minutes environ***, en s'en tenant strictement aux éléments de réponses $R^{\Diamond}$ qu'il aura extraits des ***Archives du Séminaire***.

– Chaque présentation fait l'objet d'un débat n'excédant pas 10 minutes et peut en outre appeler, de la part des formateurs, des commentaires, correctifs et additifs, immédiatement ou dans les semaines qui suivent. Elle est suivie, lors de la séance d'explicitation suivante, d'un ***compte rendu de la contribution*** que les matériaux de réponse $R^{\Diamond}$ ont permis d'apporter ***au développement de la réponse*** $R^{\heartsuit}$.

– Chaque trinôme fournit au responsable du Séminaire, dans un délai de quinze jours, une version écrite de ***trois pages maximum*** de sa présentation orale. Augmenté le cas échéant de commentaires des formateurs, ce texte est mis en ligne, à la disposition de l'ensemble des participants. Il pourra par ailleurs être pris en considération pour l'obtention du C2i2e.

La première séance d'explicitation aura lieu le mardi 7 octobre 2008. Ce jour-là, le mardi après-midi aura la structure suivante :

14 h – 15 h 30 : Partie « Séminaire classique »
15 h 45 – 17 h 15 : Partie « Séance d'explicitation »
17 h 20 – 18 h 50 : Séance de travaux dirigés (la moitié des trinômes seront présents).

Les élèves professeurs concernés par la séance de TD sont les suivants :

Sylvain Astier ; Daniela Caraffa-Bernard ; Alain Gleyze ; Marianne Kiledjian ; Nicolas Laurent ; Anne Martinet ; Élodie Vadé ; Julien Fontana ; Rodolphe;Arnaud ;Mounir El Farri ; Nelly Bofelli ; Vincent Dambreville ; Céline Goujon ; Nicolas Mizoule ; Nathalie Lagier ; Antoine Noël ; Sihame El Khaine ; Francine Bert ; Benjamin Faure ; Vincent Boilard ; Sylvain Samat ; Christophe Dobrovolny ; David Felix.

Deux exposés seront au programme de la séance d'explicitation du 7 octobre.

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant au dispositif de ***l'aide individualisée*** en classe de Seconde ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les résumant adéquatement) les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Faut-il souvent modifier les groupes d'aide individualisée ? (1)
2. En aide individualisée, doit-on prévoir une fiche d'exercices ou doit-on reprendre ce qui a été mal compris ? (3)
3. Comment constituer les groupes d'aide ? (1)
4. Comment préparer la première séance d'Aide Individualisée ? Qui choisir ? Que faire pendant cette heure-là ? Peut-on la transformer (temporairement) en heure de classe entière ? (0)
5. Que faire en A.I. ? (3)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Francine Bert, Yanna Pons et Benjamin Faure.

b) La deuxième recherche dans les *Archives* aura trait à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***la prise en charge de la dyslexie*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les résumant adéquatement) les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. J'ai une élève dyslexique et un élève sourd. Ils semblent suivre correctement le cours. Dois-je agir de façon particulière avec ces deux élèves ? (2, 2de)
2. Comment peut-on gérer des élèves nécessitant des dispositions particulières, notamment les élèves dyslexiques pouvant bénéficier d'un tiers temps ? (0, 4^{e})
3. Quel comportement avoir face à un élève dyslexique ? (2, 4^{e})
4. J'ai un élève dyslexique dans ma classe qui n'a pas le même rythme de travail et qui copie la synthèse avec beaucoup d'erreurs. Est-ce que je peux lui donner une photocopie de la synthèse pour qu'il puisse se concentrer sur son travail ?3. J'ai un élève dyslexique dans ma classe qui n'a pas le même rythme de travail et qui copie la synthèse avec beaucoup d'erreurs. Est-ce que je peux lui donner une photocopie de la synthèse pour qu'il puisse se concentrer sur son travail ? (3, 4^{e})

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Sylvain Astier, Alexandra Devilers, Élodie Maysou.

3. Forum des questions

2.1. AER

1. AER : Activité Encadrée : OK mais Recherche… Placer l'élève au centre de la classe est assez difficile à gérer au niveau de la discipline et du travail individuel, c'est vite la panique ! Ne faut-il pas prendre le meilleur des deux méthodes (Traditionnelle : cours – exos et AER – Synthèse – Exos) et alterner ? **(4^{e}, 2)** 2. Faut-il faire toutes les démonstrations en AER ou peut-on en faire dans la partie synthèse ?**(5^{e} & 4^{e}, 1)** 3. Je n'arrive pas à trouver de « bonnes » AER, situations problèmes. **(2de, 2)** 4. À part l'aide du PCP et les manuels, quels moyens peut-on utiliser pour créer des activités et des synthèses ? Internet est-il un élément fiable ? **(2de, 3,)** 5. Comment trouver une AER sur le chapitre : ordre – intervalle – valeur absolue ? **(2de, 3)**

6. Quelle AER (ou PER) pour introduire, en 5ᵉ, les 3 types de tâches : T1 : exprimer une proportion comme fraction ;T2 : comparer deux fractions ; T3 : simplifier une fraction ? J'ai trouvé un problème : « La loi impose que $\frac{1}{30}$ des places d'un parking soit réservé aux handicapés. Tel parking de 500 de places qui réserve tant de places aux handicapés respecte-t-il la loi ? » . Cette AER va-t-elle couvrir tout le chapitre ? **(5ᵉ, 3)** 7. Certaines AER peuvent-elles être données en travail à la maison ? Si oui, quels sont les critères ? **(2ᵈᵉ, 2)** 8. Est-ce que la partie AER doit se faire exclusivement en classe avec le professeur ou peut-on en donner une partie à la maison ? **(2ᵈᵉ, 3)** 9. Lors des activités, j'ai du mal à savoir le temps que je dois impartir aux élèves pour répondre aux questions. De plus quand je leur demande si ils ont fini, j'entends juste quelques « oui » timides. Comment faire pour savoir quand commencer la correction ? **(2ᵈᵉ, 2)**

L'étude de cette question a été amorcée lors de la séance précédente. ✌

On ajoutera aux éléments explicités la semaine dernière, et qui constituent une partie de l'environnement technologico-théorique relatif au type de tâches didactique « Réaliser une AER », un élément de réponse à la question suivante, posée dès la première journée de formation :

> La structure ternaire AER - synthèse – exercices est-elle appliquée dans d'autres pays ? (5ᵉ, 0)

La notion d'activité est clairement au centre de l'ensemble des systèmes de bons nombres de pays, parce que cela fait de nombreuses années que les recherches en éducation la mettent en avant comme une condition essentielle pour favoriser les apprentissages.
Ainsi, dans un article présentant des ingrédients d'une formation continue sur l'intégration des TICE pour des enseignants de mathématiques grecs, trouve-t-on l'activité suivante :

Activity on the concept of Limit
This activity starts with an instantaneous velocity problem:
Problem: A camera has recorded a 100 m race. How could the camera's recording assist in calculating a runner's instantaneous velocity at T = 6 sec?
The students are familiar with the notion of average speed, though their everyday experience and their school experience in Mechanics. But the transition to the calculation of instantaneous velocity understanding the limiting process is essential.

The aims of this activity are intuitive introduction to the e-d definition of limit of a function and the connection of numerical and graphical representations toward the clarification of the concept of the limit of a function.

On est proche, on le voit, de ce que préconisent les programmes français.

⑤ La question se pose, bien entendu, de savoir ***quelles ressources*** on peut utiliser pour fabriquer des AER.
❶ Étant donné une organisation mathématique représentée par un élément technologique θ (notion, résultat, etc.), concevoir une AER qui fasse apparaître cet élément mathématique comme l'outil d'action ou de compréhension clé de la situation problématique affrontée n'est pas une affaire « individuelle » : ***c'est une affaire de la profession***, au traitement de laquelle chaque professionnel doit apporter son concours.
❷ Heureux donc si, pour ***tout thème*** mathématique qu'elle a à enseigner, notre profession dispose d'***au moins un*** ensemble d'AER relatives à ce thème et de bonne efficacité didactique ! Bien entendu, à partir de tels « produits génériques », chaque professeur peut – et, souvent, doit – fabriquer ses propres « préparations ». Mais on ne connaît pas en général trente-six situations efficaces. Celles-ci sont donc un ***trésor*** de la profession, trésor qui s'enrichit, est mis à jour, etc.

❸ Un des lieux privilégiés où chercher de telles situations est l'ensemble des fichiers des ***archives du Séminaire***. Supposons ainsi que l'on ait à mettre en place une organisation mathématique à propos du théorème de Thalès en classe de 4e. Une recherche de l'expression « théorème de Thalès » dans le fichier du séminaire 2005-2006 donne par exemple le passage suivant que l'on reproduit sans autres commentaires.

3) S'agissant de la propriété réciproque comme de toute autre, trois étapes *classiques* doivent être envisagées *en principe* au sein d'une suite d'AER relative à une propriété donnée :

Étape 1. La propriété doit être ***motivée*** par son rôle technologique vis-à-vis d'au moins un type de tâches *T*.

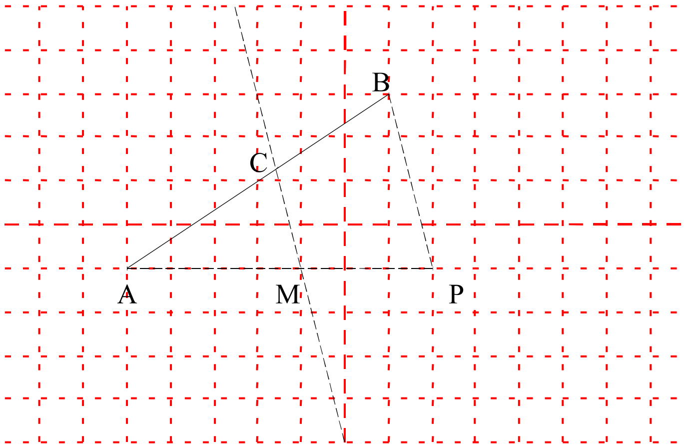
Étape 2. La ***vérité*** de cette propriété de l'espace doit être ***étudiée expérimentalement***.

Étape 3. La ***déductibilité*** de la propriété dans la théorie géométrique disponible (TGD) – qui devient par là un théorème de cette théorie – doit être enfin établie.

4) La *motivation* de la propriété de Thalès peut ainsi être trouvée dans l'étude du type de tâches mis en avant par le programme :

T. Étant donné deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport $\frac{CA}{CB}$ a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.

La *technique* τ à mettre en place préférentiellement consiste, si le rapport est $\frac{p}{q}$ (où p, q sont des entiers strictement positifs premiers entre eux), à prendre une demi-droite auxiliaire sur laquelle on porte $p + q$ fois une longueur u (sur la figure ci-après on a ainsi AP = $(p + q)u = (4 + 3)u$) et où on marque le point M tel que AM = pu (sur la figure ci-dessous, AM = $4u$) ; la parallèle à (BP) passant par M coupe alors [AB] en un point C tel que $\frac{CA}{CB} = \frac{p}{q}$.



5) C'est l'étude de la *vérité* de la propriété de Thalès, fondamentale pour justifier la technique τ, qui peut mobiliser préférentiellement d'abord un simple *quadrillage* (sur lequel on mesurera CA et CB), ensuite un *logiciel de géométrie dynamique*, auquel on demandera de mesurer les longueurs CA et CB et de donner le rapport , comme on le voit ci-après (où a = CA, b = CB, $r = \frac{a}{b}$).

6) Rappelons ici que le logiciel de géométrie peut aussi être utilisé dans la recherche d'une démonstration : il permet en particulier de « tester » rapidement une conjecture visant à ouvrir une « voie déductive ».

S'agissant de la question posée sur la valeur absolue, l'examen du fichier du séminaire 2007-2008 fait apparaître par exemple le passage suivant :

La « valeur absolue »

1. Dans les documents d'accompagnement, il est indiqué qu'il n'est pas nécessaire de faire d'activité dans le chapitre valeur absolue. Comment faire alors pour ne pas tomber dans le cours magistral ? (3)
2. Au niveau du programme de seconde, jusqu'à quel point doit-on traiter la valeur absolue ?
(Le programme parle de la distance entre deux points donnés, tel que $|4 - 7|$ ou plus théorique tel que $|x - 5| = 4$) (5)

Matériaux pour une réponse

1. Le programme de 2de apporte, à propos de la valeur absolue, les indications suivantes :

Contenus
Valeur absolue d'un nombre.
Capacités attendues
Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter.
Commentaires
La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres.

Le document d'accompagnement, quant à lui, note sobrement ceci :

Aucune étude particulière n'est demandée. Cette notation sera présentée essentiellement pour exprimer la distance entre deux points.

2. C'est sans doute sur cette remarque que s'appuie l'auteur de la première question pour en conclure « qu'il n'est pas nécessaire de faire d'activité dans le chapitre valeur absolue. » C'est une interprétation un peu excessive. Ce que signifie cette remarque du document d'accompagnement est que la valeur absolue en classe de seconde doit être vue comme un ***moyen pour étudier*** , un ***outil d'étude***, et non comme une ***fin en soi***, un ***objet d'étude***. Il y a bien des « activités » à faire concernant cette notion.

3. Précisons d'abord que l'actuel programme de 2de reprend – en le réduisant – l'ancien programme de cette classe, dans lequel l'introduction de la valeur absolue était semblablement fondée sur l'expression de la distance de deux points, ainsi que l'indiquait ce commentaire :

> En seconde, l'essentiel est de savoir interpréter $|b-a|$ comme étant la distance des points a et b […]

Deux aspects doivent être soulignés.
a) Lorsqu'on veut calculer la distance de deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) de $\mathbb{R}^2$, on utilise l'expression $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. L'application $((x_0, y_0), (x_1, y_1)) \mapsto d_2((x_0, y_0), (x_1, y_1))$ où $d_2((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$ est une ***distance*** sur $\mathbb{R}^2$ qui dérive d'une ***norme***, à savoir $(x, y) \mapsto \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. On peut donc écrire : $d_2((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \|(x_0, y_0) - (x_1, y_1)\|$. On retrouve ainsi, dans le cas du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ le cas général de la distance dans un espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$. Ce que propose alors le programme de 2de – l'ancien comme l'actuel –, c'est d'appliquer ce même schéma à $\mathbb{R}$: on présente d'abord la ***norme***, qui est ici la ***valeur absolue***, soit l'application $x \mapsto |x|$, d'où l'on fait découler la ***distance*** $d_1(x_0, x_1) = |x_0 - x_1|$. En d'autres termes, utilisant la propriété de la distance sur $\mathbb{R}$ d'être ***invariante par translation***, on définit la distance de x à y comme la distance de $x - y$ à 0.
b) Dans une classe de 2de, la construction de l'organisation mathématique correspondante doit suivre la même route, mais ***en sens inverse***, c'est-à-dire en partant du ***problème du calcul de la distance de deux réels***.

Reprenons l'expression de la distance dans $\mathbb{R}^2$: $d_2((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$. Faisons $y_0 = y_1 = 0$; il vient : $d_2((x_0, 0), (x_1, 0)) = \sqrt{x_1^2 - x_0^2}$. On a donc $d_1(x_0, x_1) = \sqrt{x_1^2 - x_0^2}$. C'est en ce point qu'il est pertinent d'introduire la fonction $x \mapsto |x|$ qui permet d'écrire simplement : $d_1(x_0, x_1) = |x_1 - x_0|$.

L'intérêt de cette écriture est précisément de représenter par une fonction ***unique*** une dépendance fonctionnelle qui, sinon, ne pourrait pas s'exprimer sans une distinction de cas :

$$d_1(x_0, x_1) = \begin{cases} x_1 - x_0 \; si \; x_0 < x_1 \\ x_0 - x_1 \; sinon \end{cases}.$$

Il devient en conséquence possible de « composer » des fonctions sans expliciter une telle distinction de cas.

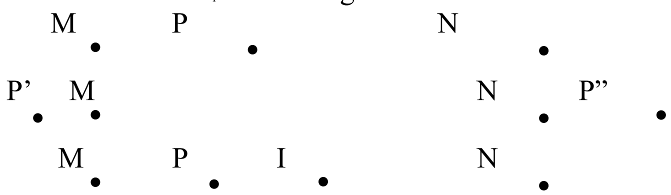
4. En résumé, la valeur absolue peut être regardée comme une notation introduite, à titre d'abréviation, par une définition à partir de notations déjà connues : les points M et N ayant pour abscisse respectivement x et y on a MN = $\sqrt{(x-y)^2}$. Pour simplifier, on pose :

$$\sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$$

en sorte qu'on aura : MN = $|x - y|$. Bien entendu, il s'agit là d'un symbole qu'il conviendra apprendre à manipuler. Par exemple, les élèves devront savoir que la distance entre le point d'abscisse -3 et le point d'abscisse x vaut $|x - (-3)| = |x + 3|$. Ils pourront aussi apprendre à regarder une expression telle que $|2x + 10|$ comme désignant le double de la distance du point d'abscisse x au point d'abscisse -5 : $|2x + 10| = 2|x + 5| = 2|x - (-5)|$. C'est à cela que se limite le programme officiel quant au maniement de la valeur absolue…

5. À ce stade, nous avons une détermination partielle de l'organisation mathématique qu'il s'agit de mettre en place : un élément technologique, la valeur absolue, qui note la distance entre deux points de la droite et qui s'appuie sur les connaissances antérieures sur la distance entre deux points du plan ; deux types de tâches T_1 « représenter un intervalle » et T_2 « caractériser les éléments d'un intervalle » qui sont donnés par le programme de seconde. Pour préciser davantage cette organisation mathématique, examinons ce que pourrait vouloir dire « caractériser les éléments d'un intervalle » en utilisant la valeur absolue vue comme une distance.

6. En reprenant la situation de deux points M et N ayant pour abscisse respectivement x et y, il s'agit de caractériser un point P d'abscisse x_P dans le segment MN.



Il vient que la distance MP doit être inférieure à MN et également que la distance NP doit être inférieure à MN. Soit, en utilisant la notation précédente, $|x - x_P| \leq |x - y|$ et $|y - x_P| \leq |x - y|$ (*).

Il vient aussi que la distance de P au milieu I du segment doit être inférieure à MN/2, soit encore $| x_P - (x + y)/2| \leq |x - y|/2$ soit encore que $|x_P - x + x_P - y| \leq |x - y|$ (**)

Réciproquement montrons qu'un point P vérifiant l'une des deux conditions (*) ou (**) appartient au segment [MN]. Pour la première, on a P qui appartient au diamètre du cercle de centre M et de rayon MN, et qui appartient aussi au diamètre du cercle de centre N et de rayon MN, soit finalement, par intersection, au segment [MN]. Pour la deuxième, on a P qui appartient au diamètre du cercle de centre I et de rayon MN/2 = IM = IN, soit encore au segment [MN].

Notons que la deuxième caractérisation permet d'obtenir que $|x_P - x + x_P - y| \leq |x_P - x| + |x_P - y|$ puisque P étant entre M et N on a MP + PN = MN soit $|x - y| = |x_P - x| + |x_P - y|$, même si ce résultat n'a pas à figurer dans l'OM si on ne s'en sert pas pour fabriquer au moins une technique.

7. On déduit donc de ce qui précède que les éléments nécessaires au travail à effectuer viennent de ce qui a été établi sur les distances entre les points du plan au collège.

Il reste à motiver le travail entrepris. L'observation d'un ouvrage du secondaire (Collection Repères, édition 2004) permet d'obtenir d'abord la situation suivante (exercice 84 page 53).

84 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations :

1. $|x-1| \leqslant 3$. **2.** $|x-5| \leqslant 2$.

3. Camille et Aurélien habitent la même rue à 400 m l'un de l'autre. Les parents d'Aurélien lui demandent de ne pas s'éloigner de plus de 300 m de la maison. Ceux de Camille demandent de ne pas s'éloigner de plus de 200 m.

On représente la rue par une droite graduée de repère $(O\,;A)$ (unité : 100 m). La maison d'Aurélien est en A et celle de Camille en C, avec $A \in [OC]$.

Déterminer la position de la rue où Aurélien et Camille peuvent jouer ensemble sans désobéir à leurs parents. (Utiliser les questions **1.** et **2.**)

O 100 m A 400 m C

Soit M un point où ils peuvent jouer ensemble. On doit avoir MA ≤ 300 m et MC ≤ 200 m.

Pour simplifier la modélisation , prenons A comme origine du repère.

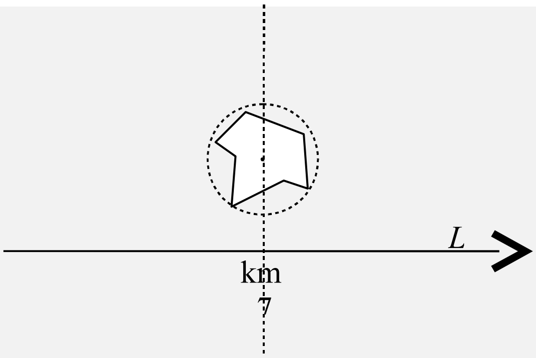
Si x est l'abscisse de M on a alors $|x| \leq 300$ m et $|x - 400 \text{ m}| \leq 200$ m, soit $x \in [-300 \text{ m}\,;\, 300 \text{ m}]$ et $x \in [200 \text{ m}\,;\, 600 \text{ m}]$, soit encore $x \in [200 \text{ m}\,;\, 300 \text{ m}]$, ou encore $|x - 250 \text{ m}| < 50$ m.

L'observation d'une feuille de TD sur Internet par l'intermédiaire du site mathadoc (http://mathadoc.sesamath.net/Documents/mp/bep/bepval/F2_val.PDF) donne l'exercice suivant :

La valeur des résistances données dans les montages électroniques sont classées dans différentes séries E6, E12, E24, … De plus à ces valeurs sont associées des valeurs de tolérance ∓ 1%, ∓ 5%, ∓ 10%, …
Indiquer pour la résistance R_1 de 15 Ω, tolérance ∓ 5% l'intervalle dans lequel se trouve sa valeur exacte.
Préciser si une résistance R_2 de 16 Ω à ∓ 5% peut avoir la même valeur que la résistance R_1.

La résistance R_1 peut être caractérisée par l'inégalité $|R_1 - 15\ \Omega| \leq 15\ \Omega \times 5/100$, soit encore $|R_1 - 15\ \Omega| \leq 0{,}75\ \Omega$ et R_2 peut être caractérisée par l'inégalité $|R_2 - 16\ \Omega| \leq 16\ \Omega \times 5/100$, soit encore $|R_2 - 16\ \Omega| \leq 0{,}90\ \Omega$; on obtient donc $14{,}25\ \Omega \leq R_2 \leq 15{,}75\ \Omega$ et $15{,}1\ \Omega \leq R_2 \leq 16{,}9\ \Omega$: on a ainsi une plage commune de valeurs pour R_1 et R_2 : l'intervalle $[15{,}1\ \Omega\,;\, 15{,}75\ \Omega]$, soit encore $|R - 15{,}425\ \Omega| < 0{,}325\ \Omega$.

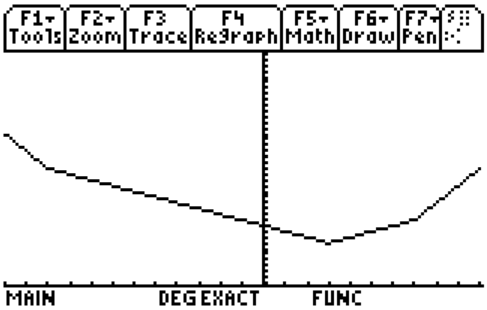
Une troisième situation, issue des Archives du Séminaire 2002-2003 (pages 96-97) auxquelles on se reportera pour en obtenir une solution.



Un ouvrier a trouvé du travail dans une région où il désire s'installer. Prudent, il entend loger sa famille à bonne distance des installations où il travaillera, Celles-ci se situent à l'intérieur d'un cercle de rayon 2 km dont le centre est à 3 km du boulevard L le long duquel un lotissement de pavillons est en cours d'achèvement. Le centre du cercle se trouve approximativement sur la perpendiculaire à L passant par le repère « km 7 » (voir ci-contre).
L'ouvrier souhaite que son habitation soit à plus de 3 km du cercle enfermant les installations. Il doit donc déterminer (sous la forme [km x_1 ; km x_2] par exemple) la zone d'habitation à éviter le long de la droite L.

8. Évidemment, on n'a pas encore là le scénario d'une AER, mais des situations qui peuvent donner lieu à un tel scénario pour une AER à propos de la notion de valeur absolue. On ajoutera pour terminer le traitement d'un problème qui illustre l'intérêt de disposer d'une fonction pour exprimer les distances.

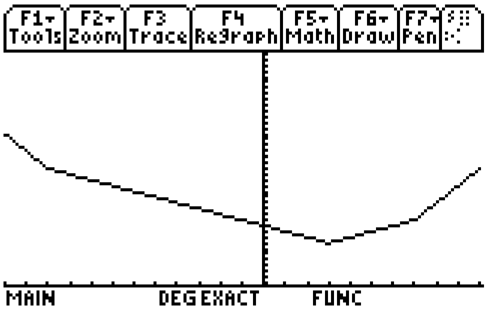
On considère trois points A, B, C d'un axe d'abscisse –10, 3, 7. On cherche à déterminer le point M, s'il existe, qui minimise la somme des distances du point M aux points A, B, C.
Modélisation : soit x l'abscisse du point M, il s'agit de minimiser la quantité $|x + 10| + |x - 3| + |x - 7|$.
• Le recours à une calculatrice graphique permet de déterminer l'existence d'un minimum et de le localiser :
Il semble donc que le minimum soit atteint pour $x = 3$ et la somme des distances vaut alors $13 + 0 + 4 = 17$.



Pour $x > 7$, on a $|x + 10| + |x - 3| + |x - 7| = x + 10 + x - 3 + x - 7 = 3x > 21$. Pour $x < -10$, on a

$|x + 10| + |x - 3| + |x - 7| = -x - 10 + 3 - x + 7 - x = -3x > 30$. Pour $x \in [-10, 7]$, on a $|x + 10| = x + 10$ et $|x - 7| = 7 - x$ en sorte que $|x + 10| + |x - 3| + |x - 7| = x + 10 + 7 - x + |x - 3| = 17 + |x - 3| \geq 17$, l'égalité étant réalisée si et seulement si $x = 3$.

• On notera que, lorsqu'on utilise une calculatrice n'offrant pas la fonction valeur absolue, on peut « simuler » cette fonction par… $|x| = \sqrt{x^2}$. Dans l'exemple vu plus haut, on programmera donc la fonction $\sqrt{(x+10)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-7)^2}$, comme on le voit ci-après.



⑥ L'AER proposée par la sixième question se réfère au passage suivant du programme de 5[e] :
Contenus
2.2. Nombres positifs en écriture fractionnaire : sens et calculs
Sens de l'écriture fractionnaire
**Comparaison*
Capacités
- Utiliser l'écriture fractionnaire comme expression d'une proportion.
- Utiliser sur des exemples numériques des égalités du type $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.
- **Comparer deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre.*

Exemples d'activités, commentaires
La classe de Cinquième s'inscrit, pour le travail sur les écritures fractionnaires, dans un processus prévu sur toute la durée du collège. Au cycle 3, l'écriture fractionnaire a été introduite en relation avec la signification « partage » ($\frac{3}{5}$, c'est 3 fois $\frac{1}{5}$). En Sixième, la signification a été étendue : $\frac{3}{5}$ désigne le cinquième de 3 (*le nombre dont le produit*

par 5 est égal à 3). En relation avec le travail sur la notion de fréquence, une nouvelle signification est introduite : $\frac{3}{5}$ exprime la relation entre une partie d'une population et la population totale (la proportion de filles dans le collège est de $\frac{3}{5}$). Un travail de mise en relation de ces différentes significations est conduit avec les élèves.

L'égalité $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ fait l'objet d'une justification à l'aide d'un exemple générique.

**En classe de Sixième, la simplification a été abordée et est donc utilisée en classe de Cinquième. C'est l'occasion d'envisager la notion de fraction irréductible, mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet.*
Différents cas peuvent être envisagés :
- *dénominateurs égaux*
- *numérateurs égaux*
- *dénominateurs et numérateurs différents dans des exemples simples (la généralisation est faite en classe de Quatrième).*

Différentes procédures sont mises en œuvre dans ce dernier cas :
- *comparaison à un même entier (exemple : comparer* $\frac{3}{5}$ *et* $\frac{5}{4}$ *à 1) ;*
- *mise au même dénominateur (dans des cas accessibles par le calcul mental);*
- *calcul des quotients approchés.*

La systématisation de la réduction au même dénominateur est traitée en classe de Quatrième.

Les trois types de tâches identifiés : T1 : exprimer une proportion comme fraction ;T2 : comparer deux fractions ; T3 : simplifier une fraction figurent bien au programme de la classe. On peut noter que le programme lie le type de tâches T1 à la notion de fréquence.
Examinons le problème proposé comme pouvant initier une AER.

« La loi impose que un trentième des places d'un parking soit réservé aux handicapés. Tel parking de 500 places qui réserve tant de places aux handicapés respecte-t-il la loi ? ».

Le travail que le problème va amener à effectuer est d'abord a exprimer « le trentième de 500 » par la fraction 500/30. La suite du travail devrait amener à comparer la fraction 500/30 à une autre fraction, de manière à susciter la comparaison des deux fractions. Le paramètre de l'énoncé du problème devrait donc être fixé dans cette perspective. Le nombre de places est a priori un entier. On aura donc à comparer 500/30 à un nombre entier, ce qui pourra bien amener à un spécimen de T2 en mettant le nombre entier, p, sous la forme $30p/30$. En revanche, on ne voit pas là apparaître la simplification des fractions. Cela dit, pour comparer 500/30 à un nombre entier, les élèves disposent d'une technique efficace : calculer le quotient de la division euclidienne de 500 par 30 : si ce quotient est supérieur ou égal au nombre entier en jeu, le nombre rationnel lui sera supérieur ; dans le cas contraire, il lui sera inférieur. Rien dans la situation proposée ne vient disqualifier la mise en œuvre de cette technique, et la situation proposée a ainsi toute chance de ne pas permettre l'émergence de l'ensemble de l'OML envisagée. Les participants sont invités à travailler cette question, notamment en examinant le document d'accompagnement du collège sur les nombres, et on y reviendra lors d'un prochain séminaire. Il est à noter, en relation avec le travail sur les PER effectué en début de séance que la situation proposée ne relève pas, en tant que telle, d'un PER.

⑦ La ***gestion du temps au sein de l'AER*** est un problème sur lequel nous reviendrons sans doute dans des séances ultérieures. On donnera ci-dessous deux principes de base qui permettent de guider la technique à mettre en place de ce point de vue.
❶ Il ne faut pas perdre de vue que ce n'est pas chaque élève qui doit faire émerger l'OM à étudier mais ***la classe.*** Le travail de chacun des élèves, seul ou en équipe, doit permettre de réaliser l'émergence collective, dirigée par le professeur : on n'a en aucune façon à faire une correction.
❷ Comme dans tous les épisodes où les élèves sont placés « en autonomie », le professeur doit circuler dans la classe pour ***prendre de l'information.*** On examinera dans cette perspective un extrait vidéo de la séance en cours d'analyse. [Non fait ; la technique présente dans l'épisode a été brièvement décrite oralement]

⑧ Compte tenu de l'ensemble des caractéristiques que l'on a développé sur les AER, il est clairement impossible de donner une AER à faire hors classe : cela revient à laisser peser sur chacun des élèves la charge de la création de l'OM. En revanche, on peut bien entendu donner ***une petite partie du travail*** utile à l'avancée du travail collectif à effectuer hors classe : une ***expérimentation*** graphique ou numérique par exemple, qui prendrait du temps à faire en classe, et pour laquelle il faudra prévoir un dispositif de recueil des données, ou encore la ***mise en forme d'un bilan d'étape***, qui permettra de reprendre le travail effectué lors de la prochaine séance.

Prochaine séance, le 7 octobre

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 5 : mardi 7 octobre 2008

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Observation & analyse // 2. Forum des questions // 3. Recherche dans les archives // 4. Forum express

0. Questions de la semaine

On rend compte ici des questions posées lors des deux semaines précédentes.

Il y a beaucoup de question sur les élèves à besoins particuliers ou du moins supposés tels. Par exemple :

> J'ai un élève de 5e qui a des problèmes et qui est suivi par un psychiatre. Il a une AVS 11 heures par semaine. Lorsqu'elle est là, il est irréprochable. Lorsqu'elle est absente, c'est une catastrophe et il est intenable en cours (à lui seul il arrive à perturber totalement le cours). A-t-on un quelconque pouvoir pour demander qu'il ait son AVS tout le temps ? Ce serait bénéfique pour lui et pour l'ensemble des professeurs de cette classe. (5e, 5)

Si l'on comprend que ces questions fassent problème, il ne faut pas qu'elles masquent le travail nécessaire des organisations de l'étude à mettre en place avec l'ensemble de la classe. C'est d'ailleurs une fois ce travail effectué que l'on pourra y apporter une réponse un tant soi peu efficace, nous y reviendrons.

De nombreuses questions sur les devoirs ont également été posées (voir *infra*, forum des questions).

Quelques questions sur les organisations mathématiques commencent à émerger. Par exemple :

> Je vais bientôt aborder le théorème de Thalès mais le théorème lui-même n'est plus désigné clairement sous ce nom. Dans quelle mesure doit-on (ou peut-on) parler de Thalès ? (MR, 4e, 5)

1. Observation & analyse

Pour cette séance de séminaire, il s'agissait de

Analyser ce que l'on voit de l'OM et de l'OD dans la première partie du compte rendu.

Une mise en forme du travail effectué devait être rendu par courriel à m.artaud@aix-mrs.iufm.fr pour le 4 octobre.

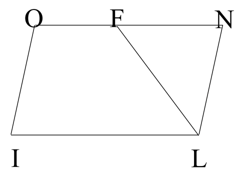
8 élèves professeurs n’ont pas rendu le travail, dont un qui l’a fait mais pas envoyé parce qu’il n’avait pas été fait à temps.

L’analyse de l’organisation mathématique est dans l’ensemble à peu près au point, même s’il subsiste quelques incertitudes.

Le type de tâches identifié par la plupart des travaux est : T - « montrer qu’un quadrilatère est un parallélogramme ». Un trinôme l’identifie indûment comme tâche.

Un trinôme propose « Démontrer la nature d’un quadrilatère (ici un parallélogramme) ». Le type de tâches T est effectivement un sous type de tâches du type de tâches « Déterminer la nature d’un quadrilatère », mais ce type de tâches est trop générique pour l’analyse de la séance observée. Il sera en revanche pertinent dès lors que l’on voudra faire une synthèse au niveau du secteur des figures planes.

Un autre trinôme propose le type de tâches « Montrer que le quadrilatère LION est un parallélogramme », qui constitue la tâche que les élèves ont à accomplir.



Un trinôme propose encore le type de tâches T_1 : « Démontrer qu’un quadrilatère, dont 2 côtés opposés sont parallèles et dont les 2 autres côtés appartiennent à 2 droites auxquelles appartiennent également les bases d’un trapèze, est un parallélogramme » ; ce choix correspond à un découpage trop « millimétré » du type de tâches qui s’avèrera pénalisant quand il s’agira de mettre en forme l’organisation mathématique. Le trinôme concerné identifie cependant T et énonce que « T1 est une tâche prétexte pour faire travailler » T.

La technique est dans l’ensemble identifiée.
On trouve par exemple : « Montrer que les côtés opposés sont parallèles deux à deux », ou encore « Montrer qu’il existe deux couples de droites parallèles », formulation qui est moins pertinente parce que moins précise.
Certains ont détaillé davantage. On trouve par exemple :

Trouver 2 couples de droites parallèles :
→ T_1 : Trouver un premier couple de droites parallèles (donné par l’énoncé)
→ T_2 : Trouver un second couple de droites parallèles **(*)**

(*) Cette étape de la technique peut elle-même être décomposée selon l’organisation mathématique suivante :
Type de tâches : Démontrer que 2 droites sont parallèles
Technique : Trouver un couple de droite parallèles (donné par l’énoncé)
→ Trouver un point appartenant à l’une de ces 2 droites et qui appartient à l’une des droites concernées par la démonstration
Expliquer qu’une droite peut être nommée (ou définie) par n’importe quel couple de points appartenant à cette droite
Technologie : Réflexivité et transitivité du parallélisme
Théorie : La relation de parallélisme est une relation d’équivalence.

Ou encore

T_{11} = démontrer que 2 droites sont parallèles en utilisant la définition du trapèze
T_{12} = démontrer que 2 droites sont confondues en utilisant le fait que 2 points de l'une appartiennent à l'autre
T_{13} = démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme en utilisant la définition du parallélogramme
L'enchaînement des types de tâches T_{11}, T_{12} et T_{13} constituent la **technique** de T1
On notera que « en utilisant » signifie que l'on donne un ou des ingrédients de techniques dans la formulation des types de tâches ; on s'en abstiendra pour éviter notamment la diffraction de l'organisation mathématique.

On peut vouloir intégrer dans l'analyse de la technique certains de ces éléments. On pourra par exemple écrire :

T – Montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme
τ – Montrer que les côtés opposés sont parallèles deux à deux en identifiant les couples de droites parallèles donnés par l'énoncé directement ou par leur appartenance à une figure connue (trapèze par exemple).

L'élément technologique principal est la définition du parallélogramme comme quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux, identifié par la quasi totalité des trinômes. Certains ajoutent la définition du trapèze, ou encore des propriétés liées aux droites ou au parallélisme : on fait le choix de ne signifier, dans la technologie, que le discours qui fait partie de l'organisation mathématique en cours d'étude, le parallélogramme ici. La définition du trapèze par exemple est un élément supposé déjà connu et travaillé.
On ne voit pas d'élément théorique dans le travail mené. On reviendra sur l'analyse de certains éléments théorique lors de la prochaine séance.

Deux trinômes ont proposé, outre l'OM précédente, une organisation alternative autour du type de tâches « rédaction d'une solution en réorganisant les éléments de réponses trouvés au cours précédent », ou encore « Voir la méthode de résolution d'un problème de géométrie ».

Le travail réalisé participe effectivement de l'étude du type de tâches suivant : « Rédiger la solution d'un problème de géométrie ». Mais ce type de tâches n'est pas spécifique du thème mathématique étudié ici, et relève davantage de la diffusion des praxéologies mathématiques. Il est cependant important de l'identifier et de le faire rencontrer, explorer, et travailler à travers les différents exercices effectués en différant si nécessaire [et ça l'est souvent], comme le fait ici la professeure, l'élucidation des difficultés posées par l'exercice de la mise en forme de la solution.

On en viendra maintenant à l'analyse de l'organisation de l'étude, dont la mise en œuvre recèle encore quelques difficultés pour une moitié des élèves professeurs.

Les travaux réalisés se scindent en deux groupes. Voici une proposition représentative de chacun des deux groupes.

➔ Si l'on considère le problème « mathématique » :
→ *Moment de la rencontre* : Au cours de la séance précédente, ainsi qu'une re-découverte au début de cette séance à la relecture de l'énoncé.
→ *Moment exploratoire* : Au cours de la séance précédente également, ainsi qu'une succession de moments exploratoires guidée par le professeur tout au long de la séance, lorsqu'il confirme ou infirme les tentatives de ses élèves.
→ *Moment technologique* : Après chaque moment exploratoire, le professeur se rattache à un élément technologique pour justifier ses réponses (définitions, propriétés,...)

On se place ici dans le cadre de la correction d'un exercice cherché à la maison. Le sujet traité a donc déjà été abordé en AER. Les moments de première rencontre, d'exploration et d'émergence technologique ont donc normalement déjà eu lieu.
C'est donc au niveau du moment du travail de l'organisation mathématiques et de l'institutionnalisation que se situe la séquence.
Après la lecture de l'énoncé et du traçage de la figure au tableau, P procède à la lecture de diverses solutions proposées par les élèves. En soulignant les éléments importants constitutifs de la démonstration (hypothèse – définition ou propriété utilisée – conclusion), P élabore une correction collective qu'elle note au tableau. La rédaction détaillée et expliquée de la démonstration correspond à un moment de travail de l'organisation mathématique. L'institutionnalisation apparaît aussi dans la bonne utilisation de la propriété du parallélogramme.
L'interrogation des élèves sur leur travail constitue une sorte de moment évaluatif du travail effectué à la maison.
Enfin, P termine par une question bilan dans l'objectif de s'assurer que tous les élèves ont compris la correction établie.

Travail collectif dirigé

Ce travail a mis en évidence qu'il s'agit d'examiner les fonctions de l'étude réalisées à l'égard de l'organisation mathématique enjeu de l'étude. Cette organisation a visiblement déjà émergé et on a donc là pour l'essentiel un moment de travail de l'organisation mathématique ponctuelle, avec quelques éléments relevant du moment d'évaluation. On notera que ce que la première proposition citée met sous le moment technologico-théorique constitue en fait le travail des éléments technologiques permis par l'activité de rédaction, de même que ce que la deuxième proposition étiquette « institutionalisation ».

C'est donc le deuxième type de réponses qui est à retenir. On en propose ci-dessous une mise en forme améliorée.

On se place ici dans le cadre de la correction d'un exercice cherché à la maison. Le sujet traité a donc déjà dû être abordé en AER et les moments de première rencontre, d'exploration et d'émergence technologique ont normalement déjà eu lieu. C'est de la réalisation du moment du travail de l'organisation mathématique et, plus marginalement, de l'évaluation de l'OM et de la maîtrise qu'on en a que participe cet épisode de la séance observée.
Après la lecture de l'énoncé et le tracé de la figure au tableau, P fait procéder à la lecture de diverses solutions élaborées par les élèves, lecture que les élèves interrogés effectuent de leur place. En soulignant les éléments importants constitutifs de la démonstration (hypothèse – définition ou propriété utilisée – conclusion), P guide la classe dans l'élaboration d'une correction collective constituée à partir des solutions proposées par les élèves et que l'écriture au tableau lui permet de mettre en forme au fur et à mesure. La rédaction détaillée et expliquée de la solution participe ainsi du moment de travail de l'organisation mathématique. Cet épisode participe également de l'évaluation de l'organisation mathématique et de la maîtrise qu'en ont les élèves : on vérifie en effet durant le travail de mise en forme que l'on sait correctement mobiliser la définition du parallélogramme pour justifier la technique construite et que celle-ci permet effectivement d'accomplir la tâche proposée.

2. Forum des questions

2.1. *Raisons d'être*

1. Pour le chapitre 1 niveau 5[e] « entraînement d'opérations », j'y ai intégré la résolution de problèmes (les élèves doivent écrire l'expression correspondante) mais le souci c'est qu'ils résolvent le problème en deux, trois étapes sans écrire l'expression voulue. Je n'arrive pas à leur donner une explication valable sur

pourquoi ils doivent passer par l'expression (car les calculs qu'ils effectuent aboutissent quand même au bon résultat…). Quelle raison leur donner ? **(5e + 5e partagée, 3)**
2. Quelles raisons d'être, autre que la simplification de fractions et de racines carrées, motivent le type de tâches « décomposer un entier en produit de nombres premiers » ? **(2de, 3)**

1. La première question est symptomatique du fait que l'OM a émergé sans que des raisons d'être en soient avancées. Les élèves disposent d'une technique à laquelle ils ne renonceront que si ils y voient une « bonne raison », soit encore si on leur montre les limites de la technique dont ils disposent, ce qui est un principe, somme toute assez banal, d'économie didactique. Examinons ainsi le problème suivant, que l'on a extrait d'un ouvrage pour la classe de 5e en modifiant légèrement l'énoncé pour le rendre plus compact (Transmaths 5e, éditions Nathan, 2006. page 17, exercice 15).

Chaque français produit chaque jour en moyenne 0,980 kg de déchets ménagers. Ces déchets sont ramassés à l'aide de camions de 30 tonnes. Calculer le nombre de camions remplis avec les déchets ménagers des soixante millions d'habitants en une année. (On suppose que l'année comporte 365 jours).

La question posée suggère que les élèves mettent en œuvre à peu de choses près la technique suivante :
On calcule d'abord la quantité de déchets que produit un habitant en une année : $365\ j\ 0{,}980\ kg\ h^{-1}\ j^{-1} = 357{,}7\ kg\ h^{-1}$. Puis ensuite la quantité de déchets produite par les soixante millions d'habitants : on obtient $60\,000\,000\ h\ 357{,}7\ kg\ h^{-1} = 21\,462\,000\,000$ kg. Puis enfin le nombre de camions : il faut diviser la quantité de déchets par 30 tonnes ; on va mettre d'abord la quantité de déchets en tonnes, ce qui donne 21 462 000 tonnes, et la division par 30 permet d'obtenir le nombre de camions : 2146200/3 = 715 400.

On a là plusieurs opérations qui conduisent à effectuer des calculs avec des grands nombres et si l'on suppose qu'on a à les faire « à la main », le travail s'avère rude... Même la frappe à la calculatrice peut se révéler source d'erreurs : oubli d'un zéro, oubli de la conversion des kilogrammes en tonnes par exemple.

Supposons maintenant que l'on exprime le nombre de camions à l'aide d'une expression : on obtient
$\dfrac{60\,000\,000\ h\ 365\ j\ 0{,}980\ kg\ h^{-1}\ j^{-1}}{30\ t}$. On commence par exprimer les tonnes en kg, 30 t = 30 000 kg, ce qui permet d'obtenir l'expression équivalente suivante : $\dfrac{6\,000\ \ 365\ \ 0{,}980}{3}$ En écrivant que 6 000 = 3 x 2 000, on obtient que le nombre de camions s'écrit 2 000 x 365 x 0,980. Une dernière modification de l'expression donne une opération « simple à effectuer : 2 000 x 365 x 0,980 = 980 x 730 = 98 x 73 x 100. Comme 98 x 73 = 7154, on obtient le résultat cherché.
Le travail de l'expression va ainsi permettre ***d'abaisser la taille des calculs à effectuer***, et donc les sources potentielles d'erreurs. C'est là une des raison d'être de la production d'une expression. Une autre raison d'être peut être recherchée en lien avec les programmes de calculs : si l'on a par exemple à calculer le nombre de camions non pour la France mais pour les départements français, on a avantage à avoir une expression unique que l'on peut donc entrer dans la calculatrice « en un coup » pour ***économiser du temps de calcul,*** voire entrer dans un tableur de manière à ***automatiser le calcul***. Cette raison d'être permet d'obtenir une réponse à la question suivante :

Comment introduire le calcul littéral en classe de cinquième tout en leur montrant l'utilité des lettres ? Je n'ai pas trouvé d'AER introductive intéressante. **(5e, 4)**

Sur laquelle nous ferons deux commentaires.

D'abord, l'expression « AER introductive » est inappropriée : une AER est un dispositif qui permet de fabriquer (une partie de) l'OM à étudier et on a déjà dit qu'il s'agissait du cœur du travail mathématique de la classe.
Ensuite, on prendra garde que le travail à effectuer dans la classe de 5^{e} à propos du calcul littéral reste modeste, même s'il est essentiel du point de vue de la construction du sens du calcul algébrique. Pour mémoire on reproduit ci-dessous le programme de la classe de 5^{e} sur ce point.

Connaissances
1.2. Expressions littérales [Thèmes de convergence]
Capacités
Utiliser une expression littérale.
Produire une expression littérale.
Exemples d'activités, commentaires
De nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine grandeurs et mesures, conduisent à utiliser des expressions littérales (formules).
Dans le domaine numérique, certaines situations se prêtent particulièrement à la production d'expressions littérales, par exemple : recherche du « milieu » de deux nombres, expression du fait qu'un nombre est multiple de 7.
Commentaires spécifiques sur le socle
On travaillera la substitution sur des expressions du premier degré dans des situations liées à la vie quotidienne, aux thèmes de convergence ou à l'usage d'un tableur. (codes barres, formulaire d'impôt, indice de masse corporelle, distance de freinage …).

C'est ainsi notamment le travail d'utilisation d'une formule pour obtenir des mesures de grandeurs ou encore de production d'une formule permettant d'obtenir de telles mesures qui est enjeu de l'étude.

2. Si l'on s'affranchit du cadre du programme de seconde, on peut donner d'autres raisons d'être de la décomposition en facteurs premiers qu'une préparation aux concours de recrutement correctement effectuée n'a pas manqué de faire rencontrer. On citera par exemple la détermination du PPCM de deux entiers, ou encore la production de l'ensemble des diviseurs d'un nombre entier.
Il ne faut cependant pas s'épuiser à chercher « l'ensemble des raisons d'être », l'ensemble en question pouvant être fort étendu dès lors qu'on s'intéresse quelque peu aux utilisations des mathématiques dans beaucoup d'autres domaines de réalités, scientifiques ou non.
Le problème qu'il s'agit de résoudre pour le professeur, c'est de trouver une raison d'être au moins de la notion à étudier qui soit compatible avec le programme de la classe et accessible aux élèves « à peu de frais », spécialement quand on fait des incursions hors des mathématiques. Les deux raisons d'être avancées par la question répondent aux exigences de base : elles sont compatibles avec le programme de seconde et accessibles à peu de frais aux élèves, pour peu qu'on les situe dans la perspective qu'on a déjà signalée lors d'une séance de Séminaire antérieure, celle de la comparaison de nombres donnés par leur écriture rationnelle ou sous forme de radicaux. C'est donc le type de tâches « Comparer des nombres donnés par leur écriture rationnelle ou sous forme de radicaux » qui constitue une raison d'être du sujet sur les nombres premiers qui figure au programme de seconde. On ajoutera que la dévolution de cette raison d'être nécessite de demander, lors de l'émergence de l'OM, de faire des calculs avec des grands nombres : en effet, sinon, les techniques avec lesquelles les élèves arrivent en seconde suffisent. En revanche, compte tenu des notations du document d'accompagnement reproduites ci-dessous, on ne systématisera pas le calcul sur les grands nombres et on évitera d'en donner en évaluation par exemple.

2.2. *La synthèse*

1. Question pratique…
La synthèse de cours en seconde doit-elle être copiée par les élèves ou donnée sous forme de photocopies pour dégager du temps pour les exercices, par exemple ? (2de, 2)
2. Quelle place donner à la synthèse / AER ? (2de, 2)

3. Faut-il tout écrire au tableau (pour une classe de seconde) lors de la rédaction de la synthèse ? (2^{de}, 1)
4. À part l'aide du PCP et les manuels, quels moyens peut-on utiliser pour créer des activités et des synthèses ? Internet est-il un élément fiable ? (2^{de}, 3)
5. Pourrait-on avoir un exemple de synthèse réussie autour d'une O.M.P. (par exemple : la propriété des diagonales d'un parallélogramme) ? (5^{e}, 4)

Comme précédemment, il s'agit, autant que faire se peut, de privilégier l'activité de l'élève. En outre, la fonction de la synthèse est de réaliser l'essentiel du moment de l'institutionnalisation : elle vient mettre donc mettre en forme l'OM qui a été produite dans la ou les AER. C'est cela qui doit guider les réponses à apporter. La synthèse ainsi ne doit ni être « copiée », ni « donnée sous forme de photocopies » mais ***élaborée par la classe*** sous la direction du professeur.

Dans cette perspective, le tableau est un espace collectif qui permet de gérer l'élaboration de la synthèse. On peut éventuellement utiliser comme tableau un ordinateur relié à un vidéoprojecteur, ou encore un rétroprojecteur et des transparents (en écrivant sur les transparents). La synthèse élaborée par la classe pourra alors ne pas être copiée par les élèves, le professeur donnant une copie de l'élaboration collective à la séance suivante. On notera cependant que le fait de copier permet à un certain nombre d'élèves de mémoriser.

De même, à partir du moment où la synthèse doit constituer une mise en forme de ce qui a été produit par la ou les AER, on ne saurait en trouver de « toutes faites » sur Internet.

La dernière question citée met en lumière un point important, qui conditionne de fait largement la possibilité d'une synthèse réussie. La ***synthèse vient*** mettre en forme l'ensemble de l'OM qui a été construite dans la ou les AER à propos du thème enjeu de l'étude et travaillée dans les exercices. Il s'agit donc de ***mettre en forme une OML*** (locale) et non une OMP (ponctuelle). Pour « réussir » à accomplir correctement ce type de tâches didactique, il faut savoir souvent différer un peu les épisodes du moment d'institutionnalisation où on fait la synthèse. Nous reviendrons sur ce point.

2.3. *Les devoirs*

De nombreuses questions ont été posées depuis le début de la formation sur les devoirs. Nous en citerons ci-dessous un certain nombre.

1. Comment, lors de la création des devoirs surveillés, juge-t-on exactement la difficulté d'un exercice. (2^{de}, 1)
2. Un devoir maison doit-il être plus dur qu'un devoir surveillé ? Comment estimer le temps accordé aux élèves pour un devoir surveillé ? (2^{de}, 1)
3. Est-ce que le niveau des contrôles doit dépendre du niveau de la classe ou doit-il être indépendant ? (2^{de}, 3)
4. Comment peut-on gérer le rapport temps / nombres d'exercices, dans un devoir surveillé ? (4^{e}, 4)
5. Comment évaluer la difficulté d'un devoir (DM, DS) et la durée à lui accorder (DS) ? (2^{de}, 5)

6. Comment gérer les interros ? (durée, nombre de questions, sur 10, sur 20) (2^{de}, 3)
7. Quand et comment (sous quelles formes) prévoir les contrôles de connaissances ? Quelle quantité de devoirs donner ? (2^{de}, 1)
8. Peut-on faire des interrogations orales (10 à 20 minutes) ? Si oui, à quelle fréquence ? (2^{de}, 1)
9. Combien de contrôles (de DM) doit-on faire environ ? (0)
10. Est-il préférable de donner à faire plus de DS que de DM ? (4^{e}, 4)

11. Est-on obligé de faire une correction en classe des devoirs (DS, DM, …) ? (2^{de}, 1)
12. Peut-on donner un corrigé polycopié d'un DM en ne reprenant que les exercices qui ont posé problème pour la majorité des élèves ? (2^{de}, 2)
13. Pour des contrôles au niveau de la correction, doit-on la faire au tableau en y réservant « l'heure » ou leur fournir un polycopié en revenant seulement sur les points qui ont posé problème ? (0)

14. Est-ce qu'il faut faire une correction en classe du DS ou faut-il donner des photocopies ? (2de, 4)
15. Vaut-il mieux distribuer une correction de devoirs (DM, DS) en faisant quelques commentaires ou plutôt faire toute la correction au tableau ? J'ai corrigé un DM au tableau et les élèves ne semblaient pas vraiment intéressés. (5e&4e, 5)
16. Lorsque l'on rend un contrôle, un DM, une évaluation, un test surprise, quelle est la meilleure solution ?
– Faire la correction au tableau et rendre les copies.
– Rendre les copies et faire la correction au tableau.
– Donner la correction sous forme de polycop puis les copies
– .../...
Comment perdre le minimum de temps tout en proposant une correction ?(5e, 4)
17. Quel est le « meilleur » moment pour faire la correction d'une évaluation ? (2de, 4)

18. Est-il préférable de regrouper un chapitre de numérique et un de géométrie lors des DS ? (5e & 4e, 3)
19. Est-il bien de mélanger dans un contrôle de l'analyse et de la géométrie ? (2de, 3)
20. J'ai décidé de fonctionner comme ma PCP et en guise de devoirs d'une séance sur l'autre je donne des DM, les exos sont donc à faire sur feuille, que je corrige soit dans la séance, soit pour la séance d'après. Je ne les note pas. Du coup, je n'ai pas de note de DM comme il se fait d'habitude. Est-ce un problème ? (6e&3e, 5)
21. Est-il bien de permettre aux élèves de se mettre par groupes de 2 pour les devoirs maison ? (2de, 4)

1. L'un des premiers points à examiner concernant la mise en place d'un dispositif – et, ceci, quel que soit le dispositif – est de se demander quelle est ou quelles sont ses fonctions. Un texte de l'IGEN de mathématiques, déjà un peu ancien (mars 1997), fait le point sur les objectifs des devoirs et en tire quelques conséquences sur la mise en œuvre de ces dispositifs. On le citera ci-dessous en le commentant au fur et à mesure de sa lecture. Les éléments portés en bleu entre crochets sont des ajouts des auteurs du Séminaire, de même que les surlignements.

Les travaux écrits des élèves en mathématiques au collège et au lycée
IGEN – Groupe de mathématiques

I. Rappel des objectifs

Les programmes de mathématiques du lycée et du collège insistent sur le rôle important des travaux individuels de rédaction. Ainsi, dans les programmes de collège peut-on lire :
« Le travail personnel des élèves en classe, en études ou à la maison est essentiel à leur formation. Il a des fonctions diversifiées :
– la résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, permet aux élèves d'affermir leurs connaissances de base et de les mettre en œuvre sur des exemples simples ; [Travail de l'OM]
– les travaux individuels de rédaction sont nécessaires au développement des capacités d'expression écrite et de la maîtrise de la langue ;
– les devoirs de contrôle, courts et peu nombreux, permettent de vérifier les acquis des élèves ». [Évaluation de l'OM]

Dans les programmes du lycée, concernant l'organisation du travail personnel des élèves, on trouve les précisions suivantes :
« Les travaux proposés en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, jouent un rôle primordial ; ils ont des fonctions diversifiées :
– la résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, permet aux élèves d'affermir leurs connaissances de base et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples ; [Travail et évaluation de l'OM]
– l'étude de situations plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux élèves d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances dans des secteurs variés ;

– les travaux individuels de rédaction (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiées en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte…) visent essentiellement à développer les capacités de mise au point d'un raisonnement et d'expression écrite ; vu l'importance de ces objectifs, ces travaux de rédaction doivent être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable ;

– les devoirs de contrôle, peu nombreux, combinent des exercices d'application directe du cours (voire des questions de cours), des problèmes plus synthétiques, comportant des questions enchaînées de difficulté progressive et permettant aux élèves de vérifier leurs résultats… ». [Évaluation de l'OM]

II. Les travaux écrits en dehors de la classe

Il convient dans ce domaine de distinguer les exercices d'entraînement et les travaux individuels de rédaction :

– les exercices d'entraînement, dont la résolution, en étude où à la maison, est assortie d'une rédaction sur un cahier spécialisé et d'une correction au tableau, font partie intégrante de l'apprentissage. En tant que tels, ils doivent, en règle générale, accompagner toutes les séances de mathématiques ;

– les travaux individuels de rédaction (et notamment les « devoirs à la maison »), dont les fonctions sont multiples (voir I) peuvent et doivent prendre des formes variées (résolution individuelle, ou en petits groupes, d'un problème comportant éventuellement des questions ouvertes et aboutissant à une rédaction individuelle, compte rendu et synthèse d'une séance de travaux dirigés, recherche d'exemples, constitution d'un dossier sur un thème donné, mise au point et rédaction de solutions d'exercices dont l'étude a été engagée en classe, …).

Ils font l'objet d'une rédaction individuelle sur copie, d'une correction détaillée des copies par le professeur, et d'un rapport de correction destiné notamment à rectifier les erreurs les plus courantes et à dégager les méthodes essentielles. [Évaluation et institutionnalisation de l'OM]

À tous les niveaux d'enseignement, le rôle de ces travaux est très important :

– pour développer le goût de la recherche ;

– pour concourir à la maîtrise de la langue française et au développement des capacités de communication ;

– pour encourager le travail en équipe ;

– pour gérer l'hétérogénéité des élèves et valoriser leur volonté de progression, compte tenu de la diversité des capacités et des motivations de chacun.

L'importance des travaux individuels de rédaction étant capitale pour la formation des élèves, notamment dans la perspective de la poursuite d'études, leur fréquence doit être élevée. Ainsi, hors les semaines où figure un devoir de contrôle (voir III), la présence d'un travail hebdomadaire de rédaction en temps libre est la règle dans les classes scientifiques (1re et terminale S, 1re et terminale L et ES comportant une option ou un enseignement de spécialité en mathématiques). Cette fréquence constitue une solide base de principe dans toutes les classes mais peut éventuellement être aménagée en fonction de la section et du niveau d'enseignement concernés (par exemple dans les classes de lycée technologique à horaire chargé). En fait, c'est certainement la longueur et la difficulté des devoirs qu'il convient d'adapter afin d'obtenir un équilibre raisonnable, en fonction du niveau d'enseignement. Dans ce domaine, il vaut mieux faire « souvent et court » que « rarement et long ». Il s'agit en effet de donner aux élèves l'habitude de ces travaux, et de leur faire prendre conscience du caractère essentiel de ceux-ci en montrant notamment que la recherche et la résolution d'un problème sont inséparables de la mise au point et de la rédaction de la solution trouvée. À cet égard, la mise en œuvre de ces principes par l'ensemble des professeurs dès la classe de sixième et la manifestation constante de l'intérêt et de l'importance accordés à ce type de travaux sont des moyens forts pour accentuer cette prise de conscience.

III. L'évaluation en temps limité

Il convient de garder un rapport correct entre l'évaluation et la formation : c'est l'évaluation qui est au service de la formation, et non le contraire. En particulier, il ne faut pas négliger, par un choix judicieux des épreuves, le rôle formateur de l'évaluation.

Il convient de faire se côtoyer deux types d'épreuves écrites d'évaluation :
– les interrogations écrites courtes (10 à 20 min) dont le but est de vérifier qu'une notion, une méthode ou une démonstration est correctement assimilée. On peut en prévoir une par chapitre du cours (soit une par quinzaine en moyenne) ;
– les devoirs de contrôle (de 30 min en 6e à 3 ou 4 h en terminale) sont peu fréquents (2 à 3 par trimestre) et doivent rester de difficulté et de longueur raisonnables. Ils ne doivent en aucun cas déborder du programme de la classe, ni faire appel à des notions ou des méthodes qui n'y sont pas étudiées.

IV. La correction des copies et la notation

Les objectifs de formation poursuivis à travers les travaux écrits (à la maison et en classe) doivent être communiqués et régulièrement rappelés aux élèves. C'est en rapport avec ces objectifs que la correction et la notation des copies doit prendre son sens : la clarté des raisonnements, la qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation jouent un rôle essentiel. Dans cette optique, il convient d'annoter les copies par des appréciations écrites, des conseils, des remarques constructives.

La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important : il convient d'éviter tant la sur-notation, génératrice d'illusion, que la sous-notation, génératrice de découragement.

2. Une partie des questions trouve ainsi des éléments de réponses. Ainsi « on doit faire » entre 2 et 3 contrôles par trimestre, un devoir à la maison toutes les semaines (hors semaine de contrôle) et il faut donc donner davantage de DM que de DS. Les DM doivent être fréquents mais courts et la durée des DS doit être adapté à la classe. Ces derniers doivent rester de difficulté et de longueur raisonnables. Ils ne doivent en aucun cas déborder du programme de la classe, ni faire appel à des notions ou des méthodes qui n'y sont pas étudiées. Ils doivent être complétés par une interrogation écrite courte (10 à 20 min) par chapitre.

3. Les indications apportées par le texte doivent être développées, notamment à propos de la correction. Le texte insiste sur la correction des copies et leur annotation. Il précise que les travaux écrits en dehors de la classe doivent faire l'objet d'un rapport de correction destiné notamment à rectifier les erreurs les plus courantes et à dégager les méthodes essentielles.
Le dispositif évoqué par une bonne partie des questions, qui consiste à corriger intégralement le devoir en classe, est ainsi remplacé par un dispositif permettant de faire le point sur l'OM et la maîtrise révélée par le contrôle. Cela suppose que le professeur ait donc corrigé les copies. Ce dispositif doit être complété par la donnée d'un corrigé écrit qui permet aux élèves, si nécessaire, de poursuivre ou de reprendre l'étude de certains points. On doit cependant pour que ce dispositif soit efficace prévoir un point de rendez-vous autour de cette étude.

4. À propos du calibrage des DS, le texte signale « Ils ne doivent en aucun cas déborder du programme de la classe, ni faire appel à des notions ou des méthodes qui n'y sont pas étudiées. » C'est cela qui permet de calibrer aussi bien du point de vue du temps que de la difficulté les énoncés des DS. Ainsi, pour chacun des exercices proposés, on se demandera si le ou les types de tâches qu'il met en œuvre ont été identifiés, si pour ces types de tâches, une technique efficace et intelligible a été mise en place et suffisamment travaillée, si un environnement technologico-théorique adéquat a été élaboré et institutionnalisé.

3. Recherches dans les archives

3.1. Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

> Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant au dispositif de ***l'aide individualisée*** en classe de Seconde ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les résumant adéquatement) les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

> 1. Faut-il souvent modifier les groupes d'aide individualisée ? (1)
>
> 2. En aide individualisée, doit-on prévoir une fiche d'exercices ou doit-on reprendre ce qui a été mal compris ? (3)
>
> 3. Comment constituer les groupes d'aide ? (1)
>
> 4. Comment préparer la première séance d'Aide Individualisée ? Qui choisir ? Que faire pendant cette heure-là ? Peut-on la transformer (temporairement) en heure de classe entière ? (0)
>
> 5. Que faire en A.I. ? (3)

• Cette recherche a été confiée au trinôme formé de Francine Bert, Yanna Pons et Benjamin Faure.

On ajoutera les questions suivantes, posées les deux dernières semaines :

> Comment composer et gérer les groupes d'Aide Individualisée (volontariat,...) ? Doit-on toujours alterner les différents groupes de manière régulière ou organiser seulement des séances avec les groupes les plus faibles ? Doit-on aussi faire progresser le groupe composé des meilleurs éléments (même si cela creuse encore l'écart dans la classe). Doit-on absolument imposer cette aide en cas de refus d'un élève ? (EV, 2)
>
> Concernant l'aide individuelle en seconde, ma PCP m'a dit qu'elle était basée sur le volontariat. Étant donné l'emplacement de cette heure (le vendredi de 17h à 18h), les élèves qui en ont le plus besoin ne s'y rendent pas. Comment faire ? (FVB, 5)
>
> Pour l'aide individualisée en seconde, faut-il faire venir obligatoirement tous les élèves en alternant les demi-groupes ou peut-on faire venir toujours la moitié de la classe la plus faible ? (NL, 5)
>
> Ayant une bonne classe, je connais quelques difficultés pour gérer l'heure d'aide individualisée, mes élèves ayant peu de problèmes de compréhension. Du coup cette heure se transforme en séance d'exercices. N'est-ce pas contradictoire avec le but premier de cette heure d'AI ?(DF, 5)
>
> Pour l'aide, j'ai sélectionné 8 élèves comme font les autres professeurs. Si certains ne veulent pas venir, que faire ? Il semble que les « forcer » s'ils ne sont pas motivés ne serve à rien. (FB, 5)

a) Exposé

b) Débat et commentaires

On notera qu'il s'agit d'apporter des matériaux issus des archives du Séminaire($\mathcal{R}^{\lozenge}$) : il est donc important que le support de l'exposé comprenne ces matériaux pour que l'on puisse les examiner en commun, et notamment voir collectivement dans quelle mesure ils sont pertinents pour la construction d'une réponse $\mathcal{R}^{\heartsuit}$.

3.2. La deuxième recherche dans les *Archives* aura trait à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***la prise en charge de la dyslexie*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter (en les résumant adéquatement) les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. J'ai une élève dyslexique et un élève sourd. Ils semblent suivre correctement le cours. Dois-je agir de façon particulière avec ces deux élèves ? (2, 2de)

2. Comment peut-on gérer des élèves nécessitant des dispositions particulières, notamment les élèves dyslexiques pouvant bénéficier d'un tiers temps ? (0, 4^{e})

3. Quel comportement avoir face à un élève dyslexique ? (2, 4^{e})

4. J'ai un élève dyslexique dans ma classe qui n'a pas le même rythme de travail et qui copie la synthèse avec beaucoup d'erreurs. Est-ce que je peux lui donner une photocopie de la synthèse pour qu'il puisse se concentrer sur son travail ?3. J'ai un élève dyslexique dans ma classe qui n'a pas le même rythme de travail et qui copie la synthèse avec beaucoup d'erreurs. Est-ce que je peux lui donner une photocopie de la synthèse pour qu'il puisse se concentrer sur son travail ? (3, 4^{e})

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Sylvain Astier, Alexandra Devilers, Élodie Maysou.

On ajoutera la question suivante, posée la semaine dernière :

J'ai appris la semaine dernière qu'une de mes élèves est dyslexique (dysorthographique). Quelle attitude dois-je avoir face à cette élève ? Comme, lors de mes cours, elle ne présente pas de grandes difficultés, dois-je changer mon attitude ? (5, 2de)

a) Exposé

b) Débat et commentaires

On fera le même commentaire que pour l'exposé précédent, et on insistera sur la remarque effectuée en ouverture de cette séance du Séminaire.

On ajoutera que, lors de la fabrication de techniques didactiques, il faut être attentif aux fonctions qu'elles vont venir occuper ainsi qu'aux conditions qu'elles doivent satisfaire. Par exemple, si l'on décide qu'un élève dyslexique doit bénéficier d'une synthèse polycopiée, compte tenu du fait que les matériaux recueillis explicitent qu'il faut s'efforcer de ne pas singulariser l'élève (ce qui vaut d'ailleurs pour tous les élèves à besoins particuliers), on donnera la synthèse à chacun : on peut donc donner le tirage de la mise en forme faite collectivement sur ordinateur, ou encore choisir un binôme de rédacteurs à chaque synthèse dont le travail sera distribué à la classe. De la même manière, les élèves à besoins particuliers révèlent souvent de façon plus nette que les autres des insuffisances de l'OD ou de l'OM qu'il est important de corriger pour tous.

4. Forum express

Aucun élève n'a su bien répondre à une question du DM1. Dois-je l'enlever du barème ? (2de, 4)
Si lors d'un contrôle, on se rend compte que les élèves n'ont rien compris et que les résultats sont trop mauvais, doit-on annuler le contrôle ? (4^{e}, 4)
Si un contrôle est raté, comment y remédier ? Quelle est la meilleure solution ? Rajouter des points à tout le monde, multiplier par un coefficient, augmenter le barème, ne rien faire ? (5^{e} & 4^{e}, 5)

Lorsqu'un « contrôle est raté », partiellement ou en totalité, il faut soigneusement en examiner les causes. En général, ce ne sont pas « les élèves » qui « n'ont rien compris » mais le professeur qui a mal calibré le DS, l'OM et/ou l'OD. La remédiation à apporter est donc d'abord à chercher dans une reprise de l'étude à l'occasion du rapport de correction. On s'efforcera également de « noter large », c'est-à-dire de chercher, dans ce qui été effectué, des points positifs à valoriser. À cet égard, il faut garder en mémoire qu'un barème ne doit pas être un carcan qui empêche le bon déroulement de l'étude mais au contraire un moyen de la piloter de façon à pouvoir à la fois dire que certaines choses ont été maîtrisées et qu'il reste du travail à accomplir. Lorsqu'on débute, un moyen de prévenir un certain nombre d'erreurs de calibrage est de préparer à l'avance les DS de manière à pouvoir les présenter au maître de stage et les travailler avec elle ou lui.

5. Questionnaire d'évaluation

a) Le temps restant est passé à répondre individuellement au questionnaire suivant :

Question 1a. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.
Question 1b. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.
Question 2a. Indiquez *un* aspect de votre *travail personnel* dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.
Question 2b. Indiquez *un* aspect de votre *travail personnel* dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

b) Chaque participant remplit individuellement la fiche qui lui a été distribuée.

c) Les formulations recueillies seront mises en ligne le plus rapidement possible. Elles feront l'objet d'un commentaire lors de la journée de formation suivante, dans le cadre du séminaire ainsi qu'en GFP.

On rappelle que les élèves professeurs concernés par la séance de TD sont les suivants :

Sylvain Astier ; Daniela Caraffa-Bernard ; Alain Gleyze ; Marianne Kiledjian ; Nicolas Laurent ; Anne Martinet ; Élodie Vadé ; Julien Fontana ; Rodolphe;Arnaud ;Mounir El Farri ; Nelly Bofelli ; Vincent Dambreville ; Céline Goujon ; Nicolas Mizoule ; Nathalie Lagier ; Antoine Noël ; Sihame El Khaine ; Francine Bert ; Benjamin Faure ; Vincent Boilard ; Sylvain Samat ; Christophe Dobrovolny ; David Felix.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Travaux dirigés de didactique des mathématiques
Utiliser les TICE

N. B. La séance de travail dirigé dont rendent compte les notes ci-après n'a concerné qu'une moitié des participants au Séminaire environ. Elle ne sera pas reprise in praesentia *avec les participants composant l'autre moitié : par principe, et dans le cadre de leur formation au travail en équipe, ces derniers devront étudier le contenu du TDDM 1 à partir des notes qui suivent et avec l'aide, laissée à la convenance de chacun, de participants ayant dûment suivi cette séance.*

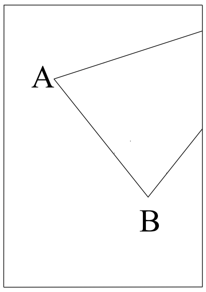
➔ Séance 1 : mardi 7 octobre 2008 (17 h 20 – 18 h 50)

Programme de la séance. 1. Vérifier une propriété conjecturée // 2. Conjecturer une propriété, etc. // 3. Contrôler un procédé de construction donné

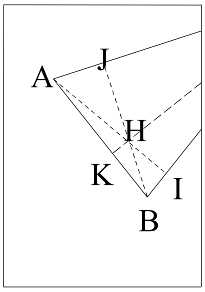
1. Vérifier une propriété conjecturée

a) Considérons le problème suivant, que nous avons cité dans les séances du Séminaire, et la solution qui lui est conjecturalement donnée.

Sur une feuille de papier, on a voulu tracé un triangle ABC dont, en fait, le sommet C tombe hors de la feuille. Pour une raison non précisée, on souhaite tracer (la partie figurant sur la feuille de) la hauteur issue de C.



S'il était vrai que les hauteurs concourent, on pourrait, à l'aide d'une règle et d'une équerre, procéder ainsi : on marque le projeté orthogonal I de A sur (BC), le projeté orthogonal J de B sur (AC) : les droites (AI) et (BJ) se coupent en H ; il ne reste plus qu'à marquer le projeté orthogonal K de H sur (AB) pour obtenir la droite (HK) demandée.



b) La propriété utile – le concours des hauteurs d'un triangle – est-elle ***vraie*** dans l'espace sensible $\mathcal{E}$?

• Pour répondre à cette question, on envisage de concevoir et de réaliser une ***expérience graphique***, ou plutôt ***une simulation à l'ordinateur*** d'une telle expérience.

• Dans ce qui suit, on utilise le logiciel Geogebra et on appelle « expérience » ce qui est en fait une simulation de l'expérience.

c) Un premier travail à réaliser est la ***conception de l'expérience***. Plusieurs possibilités s'offrent.

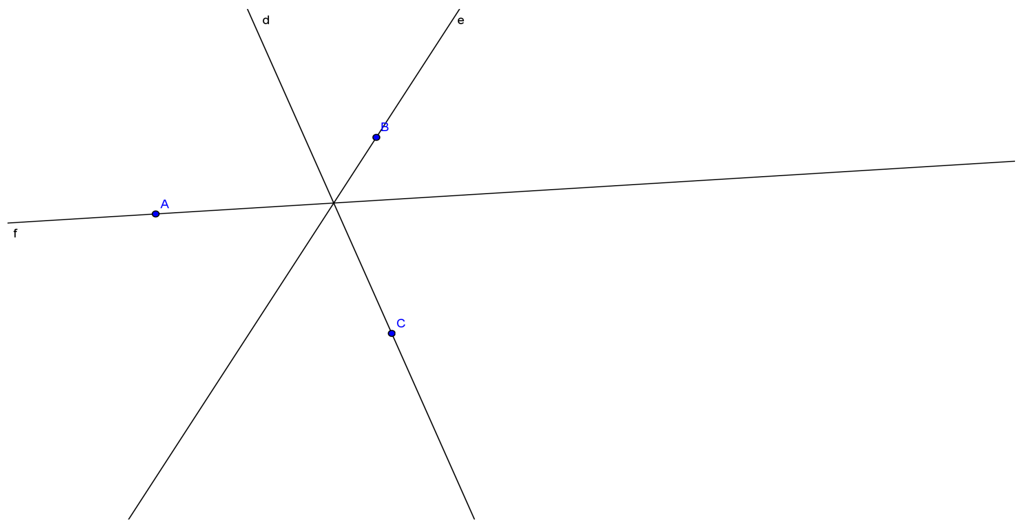
• On peut demander au logiciel de géométrie de tracer les perpendiculaires aux côtés du triangle issues des sommets opposés :

1) On crée trois points libres dans le plan, A, B et C.
2) On crée les droites (d_1), (d_2), (d_3) passant respectivement par A, B et C et respectivement perpendiculaires à (BC), (CA), (AB).
3) On déplace le point C dans le plan pour observer s'il y a bien concours des droites (d_1), (d_2), (d_3).

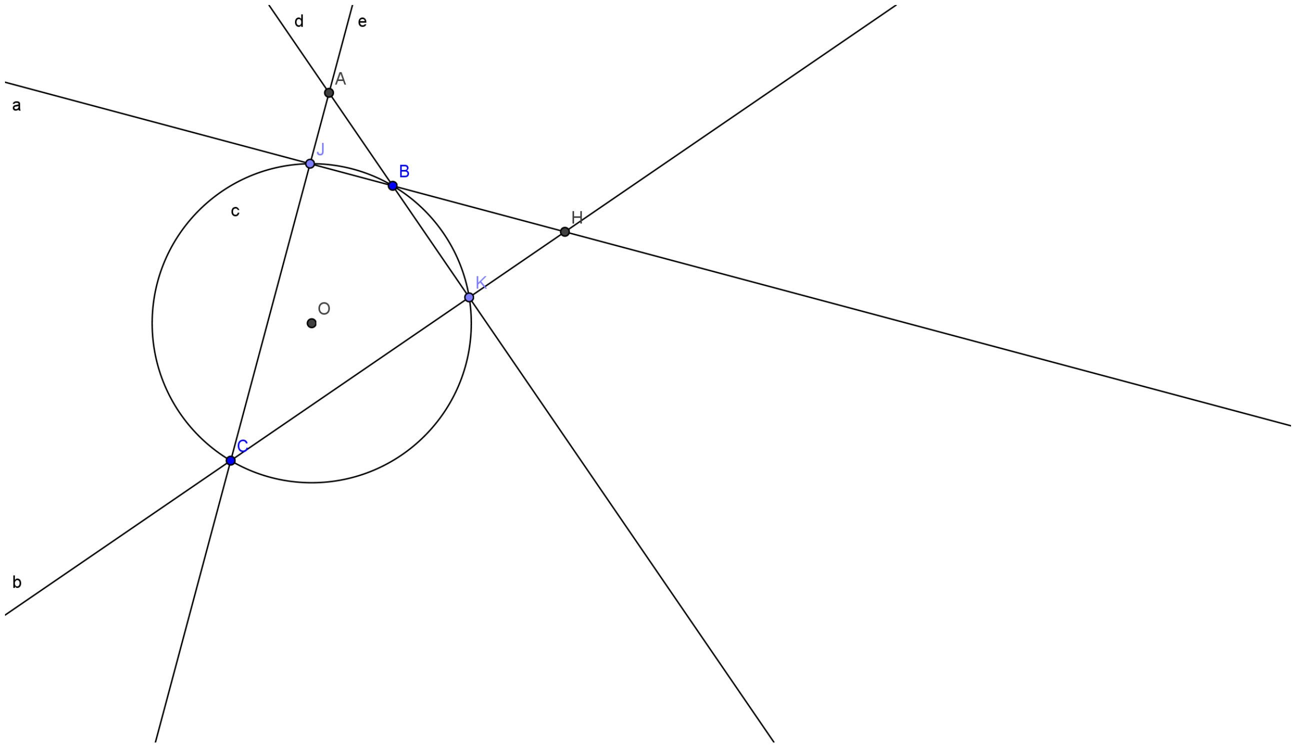
• On peut encore suivre l'énoncé de la propriété :

1) On crée trois points libres dans le plan, A, B et C.
2) On crée les projetés orthogonaux I, J, K de A, B, C sur (BC), (CA), (AB).
3) On crée les droites (AI), (BJ), (CK).
4) On déplace le point C dans le plan pour observer s'il y a bien concours des hauteurs.

• On notera que, dans chacun des cas précédents, l'aspect visuel de la configuration dynamique créée s'éloigne de la figure « standard » d'un triangle avec ses trois hauteurs. Voici par exemple à quoi conduit le premier « montage » expérimental (v. TD 1 - Hauteurs1.ggb).



• En fonction de ses connaissances géométriques, on peut envisager d'autres expériences, par exemple celle-ci (v. TD 1 - Hauteurs 2.ggb) :



Retrouver comment cette figure a été élaborée et expliciter comment elle peut permettre de réaliser une expérience de la propriété.

On trouvera ci-dessous un programme de construction de la figure.

1) On crée deux points libres dans le plan, B et C.
2) On crée le cercle de diamètre [BC].
3) On crée deux points J et K libres sur le cercle.
4) On trace les droites (BJ) et (CK) et on crée leur point d'intersection H.
5) On crée le point d'intersection A de (BK) et (CJ).

Pour qu'elle permette de réaliser l'expérience souhaiter, il suffit de rajouter la sixième étape suivante :

6) On crée la perpendiculaire à (BC) passant par A et on vérifie si elle passe bien par H.

On pourra alors vérifier que lorsque l'on fait varier l'un des trois points A, B ou C, le concours des hauteurs est conservé.

On peut noter que l'on pouvait également considérer le triangle ACH, le point de concours des hauteurs étant alors B.

2. Conjecturer une propriété, etc.

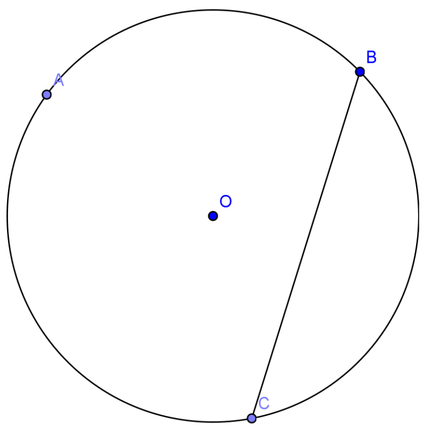
Une propriété classique revisitée

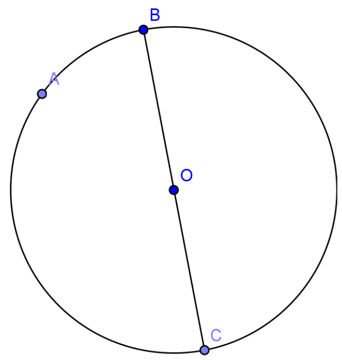
a) On part ici de la question suivante : étant donné un triangle ABC, se peut-il que ***le centre O du cercle circonscrit se trouve sur l'un des côtés*** ?

b) Cette question fait l'objet d'une exploration graphique à l'aide d'une configuration dynamique que les participants doivent d'abord élaborer.

• On peut envisager l'expérience suivante (v. TD 1 - Centre sur côté.ggb).

1) On crée deux points libres dans le plan, O et B, ainsi que le cercle c centré en O et passant par B.
2) On crée deux points libres sur c, C et A.
3) On déplace B pour tenter d'amener O sur (BC).





• L'observation de la configuration dynamique créée suggère deux faits. Lorsque O est sur (BC), 1) O est en fait le milieu de [BC] ; et 2) l'angle est droit.

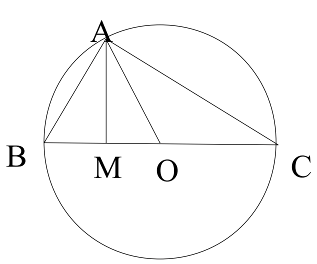
• Associés en binômes, les participants s'efforcent d'établir que ces deux faits se déduisent aisément de la TGD augmentée de l'énoncé suivant :

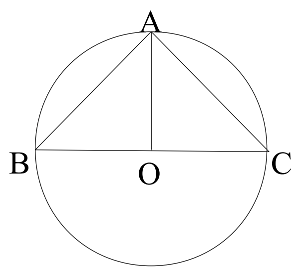
Le centre de gravité, G, le centre du cercle circonscrit, O, et l'orthocentre, H, d'un triangle sont alignés.

➔ Le fait que O est le milieu de [BC] se déduit en effet immédiatement du fait que le cercle c, de centre O, passe par B et C.

➔ Le fait que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit se déduit du fait que H est sur la droite (GO), soit donc sur la médiane issue de A.

– Si, en effet, celle-ci n'est pas perpendiculaire à (BC) [v. figure ci-dessous à gauche], comme H est aussi sur la perpendiculaire à (BC) passant par A, on a H = A, si bien que (CA) = (CH) est perpendiculaire à (AB), CQFD.





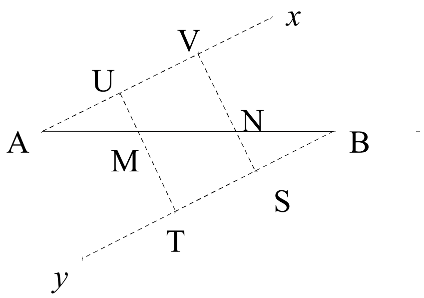
– Si la médiane est perpendiculaire à (BC) [figure ci-dessus à droite], les triangles OAB et OAC sont rectangles isocèles, leurs angles à la base sont de 45º, et par suite l'angle est de 90º, CQFD.

3. Contrôler un procédé de construction donné

3.1. Contrôle expérimental

(Suivant l'avancée des trinômes, le travail a été inégalement abordé.)

a) On suppose avoir rencontré (dans un livre, etc.) un certain ***procédé de construction*** (exacte). À titre d'exemple, considérons le procédé illustré par la figure suivante.



• Si cette technique « marchait » (si les points M et N qu'elle fournit vérifiaient effectivement AM = MN = NB), elle serait à plusieurs égards intéressante : elle ne nécessite en effet que le tracé de ***deux*** parallèles, ce qui peut être fait à l'aide d'une règle ***à deux bords parallèles*** ; elle suppose seulement, alors, le report sur chaque parallèle de $n - 1$ segments de même longueur, ce qu'on peut faire à l'aide d'une règle dont le bord porte ***deux marques***.

• Précisons en outre qu'il s'agit là, en vérité, du cas particulier (pour $n = 3$) d'une technique graphique pour découper un segment en n parties égales.

b) Notons θ l'assertion que les points M et N vérifient AM = MN = NB. Une première étape de l'étude mathématique à conduire consiste à s'assurer ***expérimentalement*** que l'on a bien : $\models_{\mathcal{E}} \theta$. (S'il n'en était pas ainsi, la technique pourrait éventuellement être « recyclée » comme procédé de construction ***approchée***.)

Associés en binômes, les participants conçoivent et réalisent l'expérience graphique évoquée.

En l'espèce, la réalisation d'une simulation de l'expérience graphique à l'aide de Geogebra ne laisse pas de doute sur la vérité de θ, comme le suggère la configuration reproduite ci-après, où u = AM, v = MN, w = NB (v. TD1-Trisection_segment.ggb).

Il resterait à étudier le ***contrôle théorique, soit répondre à la question suivante :***

La propriété de l'espace $\mathcal{E}$ appelée θ dans ce qui précède se laisse-t-elle déduire de la théorie géométrique disponible ? Cette TGD permettait-elle de « prévoir » le résultat expérimental obtenu ?

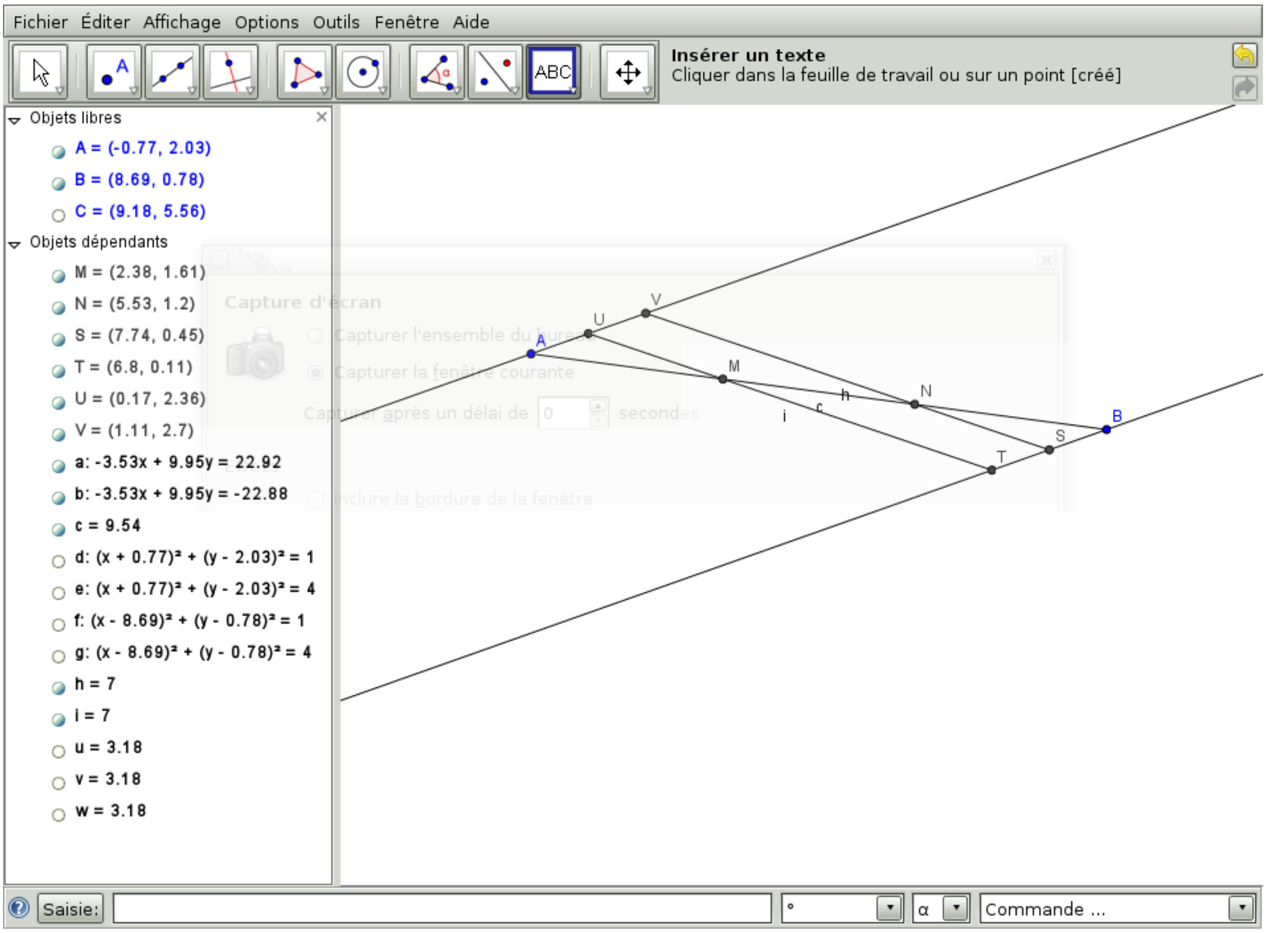
On suppose que figure dans la TGD le théorème des milieux.

(BT) // (AV). Donc de (TS) // (UV) et UV = TS, il vient que UVST est un parallélogramme, ce qui prouve que (UT) // (VS).

U étant le milieu de [AV] et (UT) // (VS), il vient d'après le théorème des milieux dans le triangle AVN que AM = MN.

S étant le milieu de [BT] et (UT)// (VS), il vient d'après le théorème des milieux dans le triangle BTM que BN = NM.

On obtient donc BN = MN = AM.



Dans la réalisation de quel(s) moment(s) de l'étude, ce(s) type(s) de tâches peu(ven)t-il s'avérer utile(s) ?

Ces types de tâches d'expérimentation peuvent permettre de réaliser :

• le moment technologico-théorique, en articulant deux aspects : la vérification que la propriété est vraie dans l'espace sensible ; la déduction de la théorie géométrique disponible (TGD) de la propriété ainsi vérifiée ;

• une partie au moins du moment exploratoire, comme il en va avec la troisième situation envisagée où la réalisation de l'expérience permet en outre d'élaborer la technique dont le graphique ne donne qu'une trace écrite.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 6: mardi 14 octobre 2008

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Faisons le point // 2. À propos de PER // 3. Forum des questions // 4. Observation et analyse

0. Questions de la semaine

Un nouveau thème apparaît de façon significative cette semaine : l'utilisation des TICE. Voici quelques-unes des questions posées :

> Je prépare ma première séance en salle informatique. Je crains d'être confronté à une très grande différence de niveau quant à l'habileté informatique des élèves. Comment organiser ma séance de façon à ce que tous les élèves avancent ensemble et que tous perçoivent l'intérêt des TICE en mathématiques ? (2de, 6)
>
> Faut-il intégrer de manière régulière des séances informatiques au cours du programme ? Car certains chapitres ne proposent pas (ou je ne les ai pas trouvés) d'applications judicieuses. (5^{e}, 6)
>
> À quel chapitres doit-on plus particulièrement associer des TP d'informatique ? (2de, 6)
>
> Comment valider le C2i2e si aucune salle de ma classe n'est équipée de vidéoprojecteur ? (2de, 6)

1. Faisons le point !

La problématique ***générique*** du travail est la suivante : étant donné une ***question d'enseignement***, il s'agit d'élaborer une ***réponse*** $\mathcal{R}^\heartsuit$ selon le schéma général ci-après :

I. ***Observer*** les réponses $\mathcal{R}^\lozenge$ existantes dans la culture ou les pratiques professionnelles.

II. ***Analyser***, au double plan clinique/expérimental et théorique, ces réponses $\mathcal{R}^\lozenge$.

III. ***Évaluer*** ces mêmes réponses $\mathcal{R}^\lozenge$.

IV. ***Développer*** une réponse propre $\mathcal{R}^\heartsuit$.

V. ***Diffuser et défendre*** la réponse $\mathcal{R}^\heartsuit$ ainsi produite.

Une fois élaborée, la réponse $\mathcal{R}^\heartsuit$ prendra, notamment pour autrui, ou pour ses créateurs, mais un peu plus tard, le statut de réponse $\mathcal{R}^\lozenge$: elle pourra alimenter un nouveau cycle Observation / Analyse / Évaluation / Développement / Diffusion & défense, etc.

Nous ferons ci-dessous le point sur deux des grandes questions étudiées depuis le début de la formation :
Comment concevoir et mettre en œuvre une séquence d'enseignement en classe n sur le thème θ figurant au programme de la classe ?

Comment observer et analyser une séance d'enseignement ?

1.1. Comment concevoir et mettre en œuvre une séquence d'enseignement en classe *n* sur le thème θ figurant au programme de la classe ?

Déterminer une organisation mathématique (OM) relative au thème θ considéré ;

Déterminer une organisation didactique (OD) relative à l'OM constituée ;

Mettre en œuvre l'OD fabriquée.

1.1.1. Comment déterminer une organisation mathématique (OM) relative au thème θ considéré ?

Déterminer les ***types de tâches*** et les ***techniques*** relatives à ces types de tâches que permet de justifier, de produire et de rendre intelligible la ***technologie*** θ relative à [T / τ] qu'il s'agit bien entendu également de déterminer. Cette détermination de l'organisation mathématique à étudier se fera par l'observation, l'analyse, l'évaluation et le développement d'OM $\mathcal{R}^{\lozenge}$ recueillies, et notamment le programme de la classe et son document d'accompagnement, le Séminaire et ses archives, des ouvrages, des observations de séances du maître de stage ou d'autres professionnels, etc.

Exemple : le travail effectué en GFP à propos du thème des fonctions affines en seconde.

Dans la constitution de l'organisation mathématique locale (OML) autour du thème θ, on l'articulera aux organisations mathématiques étudiées dans les classes antérieures auxquelles elle est reliée ainsi qu'aux organisations mathématiques locales du secteur, voire du domaine, dans lequel elle prend place dans la classe *n*.

Par exemple, pour les fonctions affines, on examinera au moins quelle place occupera cette OML dans le secteur des fonctions, d'abord en identifiant les types de tâches du secteur auxquels cette OML est reliée notamment parce qu'elle apparaît comme faisant partie de la technique qui leur est relative. Dans cette perspective, on déterminera au moins les types de tâches du secteur et leur articulation en termes de techniques.

1.1.2. Comment déterminer une organisation didactique (OD) relative à l'OM constituée ?

Six moments de l'étude, qui sont autant de fonctions didactiques, sont à réaliser à travers quatre dispositifs :

Moment de la ***(première) rencontre*** avec le ou les types de tâches, ***moment exploratoire*** et ***moment technologico-théorique*** dans le dispositif d'**AER** ;

Moment de l'***institutionnalisation*** de l'OM pour l'essentiel dans le dispositif de **synthèse** ;

Moment du ***travail*** de l'OM pour l'essentiel dans les ***exercices*** en classe et hors classe ;

Moment de l'***évaluation*** de l'OM dans les ***devoirs*** en classe et hors classe.

Nous avons mis en évidence que la conception d'une AER passait par le choix d'un problème, soit une situation assortie d'une question, dont le travail doit permettre de produire une partie de l'OM à étudier en s'appuyant sur des OM antérieurement étudiées et motivant l'OM à étudier. Dans cette perspective, la détermination de ***raisons d'être*** de l'OM à étudier s'avère essentielle. La détermination du problème passe par l'analyse des techniques déjà connues des élèves et leur portée : nous avons notamment vu que dans le domaine numérique, un changement dans le champ numérique des nombres en jeu permettait de disqualifier certaines techniques et motiver la fabrication d'une technique nouvelle.

Nous avons étudié la semaine dernière certaines conditions que la conception du moment de l'évaluation devait satisfaire : des devoirs surveillés « longs » peu nombreux (2 à 3 par trimestre) qui doivent comporter des types de tâches travaillés, avec des interrogations « courtes » plus fréquentes (une par quinzaine) et des devoirs à la maison fréquents (hebdomadaires, sauf la semaine du DS) mais courts. La correction des devoirs fait l'objet d'une annotation des copies détaillée et d'un rapport de correction.

À propos de la conception du moment de l'institutionnalisation, nous avons vu qu'elle passait par la réalisation de bilans intermédiaires préparant la synthèse, celle-ci gagnant souvent à être un peu différée pour réaliser la mise en forme d'une partie significative de l'OML.

Dans la conception du travail de l'OM, on peut donner un travail de mise en forme de la rédaction d'un exercice. Il convient de prévoir que chaque type de tâches étudié soit travaillé à travers à peu près trois spécimens.

1.1.3. Comment réaliser, mettre en œuvre, l'OD fabriquée ?

On reproduit ci-dessous les passages du Séminaire relatifs à la réalisation des moments de l'étude.

Moment de première rencontre : (...) Technique de réalisation : un élève lit l'énoncé, et le professeur fait identifier aux élèves le problème en écrivant la question au tableau et demande aux élèves ce que sont les données. Dans la réalisation de ce moment, la donnée de la figure aide à la dévolution du problème.

Le moment de première rencontre est réalisé en plusieurs épisodes (voir *infra*). (...) En dehors des ingrédients de réalisation signalés dans l'encadré, on notera que, pour faire avancer la formulation du problème et sa dévolution, la professeur procède en relançant régulièrement la réflexion des élèves par des questions, et qu'elle note systématiquement la progression de l'étude au tableau ce qui conditionne sans doute la poursuite heureuse du processus.

Moment exploratoire : Temps de recherche individuelle des élèves et mise en commun des différentes propositions : mise à l'épreuve des différentes propositions par rapport au problème posé et à la solution qu'elles permettent d'apporter. Et le professeur procède par questions « cruciales ».

Moment exploratoire : (...) Pendant le travail individuel des élèves, le professeur circule dans la classe pour prendre de l'information et arrête le travail dès qu'il juge que la classe a assez avancé. La mise en commun des résultats obtenus procède par le recueil de différentes propositions et leur mise à l'épreuve : la première, obtenue par ajout d'une feuille, est écartée notamment parce qu'elle ne répond pas au problème posé et est impossible à réaliser au tableau (où le point C se situerait « dans le vide ») ; une deuxième proposition est une proposition qui n'a pas été réalisée par l'élève sur sa feuille donc on ne sait rien sur son résultat ; la troisième proposition (symétrie par rapport à (AD))est prise en considération mais son examen est repoussé. Comme précédemment, le professeur note les avancées au tableau au fur et à mesure ; et la technique émerge des propositions de la classe, dirigée par des questions du professeur.

Examiner la validité des propositions suppose que l'on se soit rendu disponible un milieu.

Moment technologico-théorique : expérimentation pour établir la véracité de la propriété. On a également l'énoncé de la propriété. Mise en œuvre : Logiciel de géométrie dynamique ; Ordinateur relié à un vidéoprojecteur ; c'est le professeur qui fait la figure en décrivant la construction et en ayant un élève au tableau qui prend des notes. Un élève qui vient faire l'expérimentation, au début guidé par le professeur, puis par la classe. Fait géométrique vrai dans l'espace sensible ; déduction de la TGD admise.

Le moment technologico-théorique (...). Le travail de justification de la propriété est expérimental (voir technique ci-dessus), et on aboutit donc au fait que la propriété est vraie dans l'espace sensible. On admet que la propriété pourrait être déduite de la théorie géométrique dont on dispose.

Remarque : il ne faut pas en déduire que l'on peut s'exonérer systématiquement de l'activité démonstrative dans la réalisation du moment technologico-théorique.

Nous compléterons brièvement ci-après les éléments relatifs à la réalisation du moment technologico-théorique.

Une démonstration constitue la partie de la justification de la propriété en cause qui consiste à établir que cette propriété se laisse ***déduire*** de la TGD – la « théorie géométrique disponible », ou encore de la TAD (théorie algébrique disponible) etc. Si cette théorie est bien faite, cela n'est évidemment possible que si cette propriété est ***vraie*** dans l'***espace sensible*** (que la TGD modélise mathématiquement) ou dans le ***domaine des programmes de calculs*** (que la TAD modélise mathématiquement), etc., ce qu'on peut chercher à établir, et qui ne peut l'être que de manière ***expérimentale***.

Devant un fait spatial (comme devant un fait numérique, etc.), quatre attitudes sont ainsi possibles : établir expérimentalement ce fait, c'est-à-dire montrer qu'il est ***vrai*** dans l'espace physique ambiant, et admettre alors qu'il se laisse ***déduire*** de la TGD, qu'il en est un ***théorème*** ; le démontrer, c'est-à-dire établir qu'il se laisse déduire de la TGD, puis le vérifier expérimentalement ; se borner à l'établir, soit expérimentalement, soit théoriquement ; l'admettre, au double plan expérimental et théorique.

Question posée – Comment introduire le théorème de Pythagore : avec une activité qui démontre le théorème ou une activité permettant de trouver la formule donnant le théorème à partir de plusieurs triangles, avec des conjectures ? (4^{e}, 6)

Matériaux dégagés collectivement

On a mis en évidence qu'il s'agissait de faire rencontrer le théorème de Pythagore comme permettant d'apporter une réponse à un problème, un calcul de longueur ici. La question de la démonstration et/ou de la justification expérimentale se pose donc à l'intérieur de l'AER effectuée : on a un choix à faire, sous la contrainte du programme bien entendu : on démontre et on justifie expérimentalement, ou encore on démontre ou on justifie expérimentalement. Pour la démonstration, il s'agit de déduire le théorème de Pythagore de la théorie géométrique disponible.

Pour la semaine prochaine : Proposer une démonstration du théorème de Pythagore en s'appuyant sur la TGD de la classe de 4e.

1.2. Comment observer et analyser une séance d'enseignement ?

L'observation prend principalement la forme d'un compte rendu de la séance dont on a vu un spécimen. C'est cela qu'il s'agit de rédiger à l'issue de stage de SPA pour l'une des séances réalisés par l'un des élèves professeurs.

L'analyse de la séance, ou plus précisément du compte rendu d'observation de la séance, est constituée de la détermination de l'***organisation mathématique*** étudiée et de l'***organisation didactique*** qui en permet l'étude, du moins ce qu'on en voit ou que l'on peut inférer avec une « certitude raisonnable ». À ces deux rubriques, on en ajoutera deux autres :
Structure et contenu de la séance, par laquelle on débutera l'analyse et qui décrira rapidement le contenu des épisodes présents dans la séance ainsi que la place de cette séance dans l'étude des mathématiques au programme de la classe ;
Gestion de la séance, qui clôturera l'analyse, et qui explicitera les décisions et les interventions du professeur dans la séance qui conditionne la survenue de tel scénario didactique : par exemple, le choix de P dans la séance observée de différer l'examen de la proposition d'un élève à la séance suivante fait partie de la gestion de la séance.

L'analyse comportera donc les quatre rubriques suivantes :

Structure et contenu de la séance ;
Organisation mathématique ;
Organisation didactique ;
Gestion de la séance.

On notera qu'une séquence sera analysée de la même façon, son observation prenant la forme le plus souvent d'une collection de traces écrites (voir la description du corpus B dans le document sur la formation et la validation).

Nous élaborerons ici collectivement le contenu relatif à la rubrique Structure et contenu de la séance relative à la séance de 5e observée.

Travail collectif dirigé

On a abouti à la mise en forme suivante.

Cette séance se situe dans l'étude du secteur *des figures planes* du domaine *Géométrie* de la classe de 5e. Il s'agit d'étudier le thème du parallélogramme, et plus précisément la propriété « Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu », conformément au programme de la classe cité ci-après.

Connaissances

Parallélogramme.

Capacités

Connaître et utiliser une définition et les propriétés (relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles) du parallélogramme.

Exemples d'activités, commentaires

Le travail entrepris sur la symétrie centrale permet de justifier des propriétés caractéristiques du parallélogramme que les élèves doivent connaître.

Commentaires spécifiques sur le socle

Il est seulement attendu des élèves qu'ils sachent utiliser en situation ces propriétés, notamment pour la reconnaissance d'un parallélogramme, d'un rectangle, d'un losange ou pour leur tracé.

La séance comporte 3 épisodes de longueur inégale. Elle débute par la correction d'un exercice qui était à chercher hors classe. Elle se poursuit par l'étude d'une activité dont objet est de faire apparaître la propriété citée par l'étude d'un problème de construction géométrique. [On peut ici citer le problème.] Elle se termine par la donnée du travail hors classe.

2. À propos de PER

Nous reprendrons ici la notion de PER à partir du commentaire des réponses apportées par les participants aux séminaires lors de la 4^{e} séance à la question ci-après.

Mettre par écrit un point qui vous semble positif et un point qui vous semble négatif dans la mise en œuvre de la notion de PER.

41 élèves professeurs ont répondu. Nous dégagerons des réponses apportées les points qui peuvent servir d'appui ou au contraire qui viennent faire obstacle à la mise en œuvre de PER en explicitant certains aspects qui paraissent peu entendus. Pour faciliter la lecture, nous avons précédé les réponses apportées comme point positif par ☺ et celles apportées comme point négatif par ☹.

Nous débuterons par les réponses suivantes :

☹ Le travail sur des supports différents pourrait permettre de mieux différencier chaque type de tâches. (Risque d'amalgame par les *élèves* des praxéologies étudiées dans le PER.)

☹ S'il faut faire *une AER pour chaque méthode importante de résolution* en laissant du temps pour la recherche, etc., cela représente un grand investissement en temps, peut-être *trop* important.

☺ Chaque notion est introduite par une mini AER, il y a donc *une réflexion pour chaque notion*.

☹ Pour pouvoir faire un PER, il me semble qu'il faut prendre deux séances au moins et donc, on peut avoir l'impression de perdre du temps. De plus *si lors de la première séance, la première AER a été mal menée, la seconde risque d'être pire.*

Elles font apparaître l'une des raisons mêmes de l'introduction des PER : la systématisation par les professeurs de la construction d'AER « millimétrées ». La première question donne en outre une justification de cette pratique – cela permettrait de « différencier chaque type de tâches ». On notera que cela va à l'encontre du travail d'institutionnalisation permettant de mettre en forme une organisation mathématique régionale, voire locale : nous avons dit qu'il fallait amalgamer les organisations mathématiques au niveau du thème, puis du secteur et que cela conduit à rassembler des types de tâches qui ont émergé séparément.

Outre la correspondance une AER pour chaque technique ou encore pour chaque notion, ces réponses font apparaître une condition essentielle, celle du *temps*, vu ici négativement : un PER consommerait trop de temps. Cette question du temps est présente dans d'autres réponses : les PER peuvent apparaître comme permettant de gagner du temps ou au contraire, plus fréquemment, comme contraignant le professeur à une dépense trop grande de ce temps d'horloge si précieux.

☹ La mise en œuvre d'un PER semble *prendre beaucoup de temps*. Il y a aussi des difficultés pratiques (bavardages, dispersion de la classe,...) que risque de provoquer un PER.

☹ Pour exploiter l'effet structurant du PER, il faudrait que les AER qui lui sont rattachées soient exécutées les unes après les autres. On risque alors de *passer trop de temps* sur un même thème, en contradiction avec le principe de mener plusieurs thèmes de front.

☺ Un PER permet d'aborder plusieurs notions en même temps et d'*avancer plus rapidement dans le programme*.

Par contraste, nombre de réponses positives mettent en avant les arguments développés dans le Séminaire, et notamment l'amélioration de la motivation de l'organisation mathématique ainsi produite :

☺ Un PER permet de mettre en place une suite d'AER ayant un lien entre elles. Celles ci semblent ainsi moins « parachutées » et cela facilite peut-être la dévolution du problème.

☺ Cela permet d'avoir un suivi de l'étude et donne un enchaînement dans la continuité. Un PER peut donc servir de fil conducteur à l'étude.

☺ Dispositif permettant de motiver les AER qui elles-mêmes motivent les OML étudiées, réduisant ainsi l'énergie nécessaire à l'avancement de l'étude, au fur et à mesure que celle-ci avance dans l'année.

Deux réponses, qui font porter la motivation sur les élèves montrent cependant que la compréhension est encore incertaine (c'est l'organisation mathématique qu'il s'agit de motiver, ainsi que les types de tâches coches étudiées) :

☺ Si un PER est bien mené, cela permet de dynamiser et de motiver l'étude des élèves.

☺ On obtient une plus grande motivation des élèves et ils sentent la nécessité d'avoir la nouvelle notion dans leurs bagages.

Cette mention des élèves se retrouvent dans un certain nombre de réponses (plus d'un tiers des points négatifs), comme par exemple les suivantes :

☹ Le travail sur des supports différents pourrait permettre de mieux différencier chaque type de tâches. (Risque d'amalgame par les *élèves* des praxéologies étudiées dans le PER.)

☹ Les *élèves* doivent assimiler plusieurs notions en même temps.

☹ Trop de choses à assimiler en même temps peut perturber les *élèves*.

☹ Un PER peut créer des confusions chez des *élèves* d'un niveau plutôt faible.

☹ Le fait de travailler toujours le même type d'exercices peut bloquer certains *élèves* « hermétiques » à ce type de raisonnement, peut en lasser d'autres.

☹ Les PER peuvent perdre les élèves, voire les impressionner avec un sens trop général. Les *élèves* peuvent trouver « obscurs ou compliqués » une notion, un PER trop vague. Il conviendra alors de bien dévoluer le PER avec les élèves.

Derrière cette volonté affichée de protéger les élèves, on peut voir se dessiner un évitement du problème de la constitution de techniques didactiques appropriées. En effet, la capacité des élèves à investir tel ou tel dispositif d'étude dépend largement des techniques de fabrication et de gestion du dispositif par le professeur, même si bien entendu des contraintes objectives qui limitent la marge de manœuvre du professeur à cet égard existent.

Certains se font également, positivement, l'écho d'une meilleure amalgamation des organisations mathématiques construites par le biais de PER.

☺ La mise en œuvre de la notion de PER permet aux élèves d'utiliser plusieurs méthodes pour réaliser un même type de problèmes. Ils peuvent faire le lien entre celles-ci.

☺ Un PER permet de mettre en place une suite d'AER ayant un lien entre elles. Celles ci semblent ainsi moins « parachutées » et cela facilite peut-être la dévolution du problème.

☺ Dispositif permettant de motiver les AER qui elles-mêmes motivent les OML étudiées, réduisant ainsi l'énergie nécessaire à l'avancement de l'étude, au fur et à mesure que celle-ci avance dans l'année.

☺ Cohérence dans l'enchaînement des questions, notions rencontrées. Il existe un fil conducteur qui permet de construire les mathématiques à acquérir par les élèves.

☺ Les PER offrent un cap, un objectif dans l'étude d'une notion et motivent donc le travail effectué.

☺ Cela permet d'organiser l'étude du thème.

Mais, là encore, des points d'achoppement se révèlent, et spécialement la restriction thématique de l'organisation mathématique devant surgir d'un PER alors qu'un PER est là pour permettre de faire émerger, au moins partiellement, une organisation mathématique relative au secteur. Cette restriction thématique est largement présente dans les réponses apportées. Les réponses citées ci-dessous apparaissent, par contraste, manifester une vision *au moins sectorielle* restant encore marginale :

☺ Cela permet en outre de brasser différents thèmes du programme en suivant une même démarche et donc de donner des points de repère aux élèves sur les différents types de problèmes.

☺ Un PER permet d'aborder plusieurs notions en même temps et d'avancer plus rapidement dans le programme.

☺ Les PER permettent de faire le lien entre les différents thèmes étudiés (ici en 5e, les parallélogrammes et les droites remarquables).

☺ Le PER permet d'installer un réel fil conducteur durant l'étude autour d'un véritable problème. Le problème met en jeu différents outils et peut même mobiliser différents domaines des mathématiques. Les élèves gardent la raison d'être de l'étude et sont sécurisés par la continuité du fil conducteur.

Les réponses mentionnent également la gestion du temps de l'étude : elle apparaît positivement, faisant écho aux arguments développés dans le Séminaire (bien qu'encore marquée par la restriction thématique déjà signalée), mais aussi négativement, un PER étant supposé rendre la gestion de la dynamique de l'étude ou encore de la mémoire didactique difficile :

☺ On utilise un même support de départ pour étudier tout ou partie d'une praxéologie associée à un thème, alternant phases d'étude et de recherche et phases d'institutionnalisation, ce qui donne un point de vue plus global et *dynamique de l'étude*.

☹ Un PER nécessite de *nombreux « aller-retour » entre deux parties distinctes de la structure ternaire de l'étude* d'un thème, ce qui nécessite une bonne organisation d'une part, et laisse un risque de confusion de la part des élèves d'autre part.

☹ Difficile à organiser. De plus, s'il se déroule sur plusieurs séances, obligation de faire un rappel sur ce qui a déjà été vu, pour pouvoir redémarrer.

☹ Les élèves ne se souviennent pas forcement des « anciennes » activités. (Il faut toujours rafraîchir leur mémoire).

Là encore, cela dépend des techniques didactiques élaborées par le professeur : on peut entendre que le travail d'amalgamation est vu comme complexe et difficile à mettre en œuvre ; c'est pourtant bien cela qu'il s'agit d'effectuer.

3. Forum des questions

La reprise d'étude

Comment faire quand le programme de l'année antérieure n'est pas bien acquis ? Faut-il faire systématiquement des rappels en début de chapitre ? (5e & 4e, 4)

Faut-il absolument garder le rythme du cours afin de terminer le programme alors qu'un nombre significatif d'élèves n'ont pas acquis toutes les bases nécessaires les années précédentes ? Ou faut-il consacrer des espaces de temps assez importants pour faire des rappels, au détriment du rythme et du programme ? Comment trouver le bon équilibre afin de ne pas trop pénaliser les meilleurs éléments de la classe tout en permettant aux plus faibles de progresser ? (2de, 3)

Pour éviter une séance entière consacrée aux rappels, faut-il en faire ponctuellement en interrompant ce que l'on fait ? (2de, 2)

Est-ce que pendant les heures de soutien je peux faire des rappels sur les années précédentes ? (4e, 5)

Le programme de seconde comporte « Configurations du plan » et précise qu'il s'agit de reprendre des notions étudiées au collège. Comment étudier cette partie du programme sans faire un chapitre de rappels ? (4e, 4)

En seconde, le programme de géométrie plane a pour principal objectif d'utiliser « pleinement les acquis de connaissances et de méthodes du collège ». Pour éviter les révisions systématiques et dynamiser la synthèse sur les configurations du plan, j'envisage, après avoir résolu des problèmes variés avec la classe en identifiant les propriétés utilisées et leur utilité, de faire lister aux élèves ces propriétés en fonction de leur utilité (par exemple, pour montrer une égalité de longueur, on peut utiliser...). Ce dispositif a pour moi le but d'institutionnaliser les différentes techniques utilisées dans les problèmes plus formellement qu'au travers des bilans intermédiaires réalisés pendant la résolution. Est-ce une « bonne alternative »? (2de, 5)

Peut-on, pour les prochaines vacances, donner un devoir maison qui reprend le chapitre en cours, mais plus sur des notions de 6e pour rafraîchir la mémoire (car beaucoup d'oubli) ? (5e, 6)

1. Des éléments de réponses à certaines questions figurent dans la notice du temps de l'étude. On les examinera collectivement.

4.1. La situation dominée des élèves par rapport à l'avancée de l'étude les porte à être vigilants : ils attendent en particulier du professeur ***qu'il fasse avancer le temps didactique*** ; et, s'il est vrai qu'ils s'entendent souvent à freiner cette avancée – en « traînant les pieds », en faisant de la résistance d'une manière ou d'une autre –, le professeur se méprendrait, au risque d'essuyer bientôt de vives critiques, voire de perdre une partie de sa légitimité, s'il succombait à la tentation de se rendre à ce type de sollicitations, alors que les élèves attendent de lui qu'il avance ***en dépit même des ralentissements qu'ils cherchent à lui imposer***.
4.2. Une telle attente est à l'évidence antinomique de la pratique des ***révisions systématiques***. Longtemps, il est vrai, les programmes officiels ont prescrit la révision – augmentée de compléments – d'une partie du programme de la classe précédente avant d'aborder le « programme particulier à la classe ». Tout aussi officiellement, pourtant, de telles révisions sont aujourd'hui ***proscrites***. « Il convient, énonçait ainsi d'emblée l'ancien programme de 6e, de faire fonctionner, à propos de nouvelles situations et autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision, les notions et "outils" mathématiques antérieurement étudiés. » L'injonction est reprise dans l'*Introduction générale pour le collège* qui ouvre la brochure présentant le nouveau programme de mathématiques du cycle central, où on lit [6] : « Il convient de faire fonctionner les notions et "outils" mathématiques étudiés au cours des années précédentes dans de nouvelles situations, autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision. En sixième, particulièrement, les élèves doivent avoir conscience que leurs connaissances évoluent par rapport à celles acquises à l'école primaire. » Ignorant sur ce point les instructions officielles, nombre de professeurs débutants semblent enclins à commencer l'année par des révisions systématiques, qu'on a vu parfois se prolonger jusqu'aux premières vacances scolaires de

[6] Voir le document *Mathématiques en 5e et 4e*, p. 7.

l'année ! Plusieurs facteurs concourent sans doute à nourrir ces errements : souci de « rassembler » la classe (par exemple lorsqu'il s'agit d'une 2^de^, formée d'élèves qui, provenant de différents collèges, tendent à constituer au sein de la classe autant de « clans » qui s'ignorent, voire se combattent), mais aussi désir plus ou moins inconscient de captation des élèves, à qui le professeur, fût-ce à son insu, signifie ainsi que « la vie commence avec lui » (ce que certains élèves peuvent vivre d'ailleurs comme une forme subtile d'agression narcissique). À cela il faut ajouter que la pratique des révisions permet au professeur novice de différer le moment où il devra affronter, au double plan psychologique et technique, la difficile tâche consistant à ***créer du temps didactique*** : dans les révisions, en effet, de même par exemple que dans les leçons particulières (qui constituent fréquemment la seule expérience de direction d'étude du professeur novice), on travaille sur du temps didactique ***créé par d'autres***, et on n'a donc pas véritablement à créer du temps didactique *ex nihilo*. Par contraste, la fonction chronogène qu'assume normalement le professeur ayant la responsabilité d'une classe apparaît alors comme extrêmement exigeante : elle appelle un effort didactique et psychologique non négligeable.

4.3. Le problème des révisions surgit notamment lorsque, dans une classe donnée, le programme comporte un thème θ ***déjà en partie étudié*** dans les classes précédentes, c'est-à-dire lorsqu'il y a ***reprise de l'étude*** du thème θ, celui-ci apparaissant donc à nouveau comme un ***enjeu didactique***. Dans un tel cas, la stratégie officiellement préconisée, qui, de manière plus ou moins subreptice, permet la poursuite de l'***apprentissage*** du thème θ par son activation dans le cadre de l'étude de thèmes θ_1, θ_2, ..., θ_n ***nouvellement étudiés***, cesse d'être appropriée puisqu'elle suppose précisément que θ n'est ***plus*** un enjeu didactique. Or les situations de ***reprise d'étude*** sont aujourd'hui fréquentes dans le curriculum secondaire, dans la mesure notamment où les programmes sont conçus dans une perspective progressive, l'étude d'un thème introduit dans une classe se poursuivant en général dans la classe suivante, voire au-delà. Dans un tel cas, la mise en évidence de ce qu'il y a de ***nouveau*** dans l'étude du thème θ, c'est-à-dire de ce qui constitue véritablement l'enjeu didactique autour duquel le travail va se développer dans la classe constitue ***un élément crucial de la direction d'étude***. Deux principes s'imposent notamment au professeur à cet égard. Tout d'abord, il doit se garder de reprendre *ab initio* l'étude du thème θ et s'efforcer au contraire de faire apparaître ce qui, de θ, est réellement neuf, et se trouve donc ***à étudier***, par rapport à ce qui est ***ancien*** et ne saurait plus être légitimement étudié dans ***cette*** classe : objectivement, en effet, du temps didactique a été dépensé dans la classe précédente sur le thème θ, et le redoublement de cette dépense dans la classe, ***sans acquis nouveau***, ou du moins sans que cette reprise soit présentée comme un ***rappel*** visant la remémoration collective de faits déjà rencontrés, constitue alors, aux yeux des élèves, un gaspillage de temps – sentiment qui s'exprime le plus souvent par une certaine inattention, un brouhaha persistant, voire des propos implicitement ou explicitement protestataires : « L'an dernier c'est pas comme ça qu'on faisait ! », « M'sieur, on l'a déjà fait ! », etc. Ensuite, il convient de faire que les élèves qui ne maîtriseraient pas l'***ancien*** de manière satisfaisante puissent se mettre à jour sur ces parties du thème qui ne peuvent plus légitimement recevoir le statut d'enjeu didactique dans le travail de la classe. Si la ***responsabilité didactique*** de l'élève vis-à-vis de ses propres apprentissages est, ici comme en d'autres circonstances, pleinement engagée, le professeur n'est pas pour autant dégagé de toute responsabilité : il lui incombe de prendre sa part dans la gestion de cette reprise d'étude. Lorsque les élèves arrivent dans la classe, le thème θ ne leur est pas inconnu : le problème didactique posé au professeur est alors celui, non du ***recommencement***, mais ***de la reprise et de la poursuite*** de l'étude du thème.

4.4. Le premier souci à cet égard doit être de ***repérer le tracé de la « frontière »*** entre les classes successives relativement au thème considéré. À titre d'illustration, on prendra ici pour thème θ étudié dans la classe, mais ayant déjà été étudié dans les classes antérieures, le thème des ***inéquations du premier degré à une inconnue*** en classe de 2^de^. Le programme de 3^e^ prescrit l'étude des inéquations à une inconnue et à coefficients numériques, en précisant toutefois que « l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est, elle, hors programme ». En 2^de^, en revanche, le programme parle d'utiliser « un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction » : la frontière passe ici ***entre premier degré et degrés supérieurs***. Le professeur est alors confronté à un problème didactique non trivial, celui de l'articulation de l'étude qu'il doit impulser dans la classe avec le travail déjà réalisé dans la classe précédente sur le thème étudié. Le scénario consistant à tout reprendre *ab ovo* ne saurait évidemment être retenu : dans le cas des inéquations, un tel scénario conduirait en effet, par exemple, à partir d'inéquations telle $2x < 6$, pour arriver, après divers intermédiaires, à des inéquations du type $5 + 6x > 0$, pratique qui, lorsqu'elle n'est pas repoussée par les élèves ainsi qu'on l'a dit, est propre à leur instiller le goût légèrement pervers des répétitions vécues passivement.

4.5. Le problème didactique que le professeur doit chercher à résoudre comporte alors deux difficultés. Tout d'abord, il lui faut explorer et identifier, avec les élèves, leurs ***besoins d'étude*** – leurs besoins ***didactiques*** – relativement au thème considéré. Ensuite, une fois ces besoins didactiques reconnus par le professeur comme par les élèves, il devra concevoir et animer le travail permettant de les satisfaire, et cela en évitant bien entendu la reprise générale de l'étude du thème considéré. La détermination des besoins didactiques des élèves relativement à un thème d'étude peut se faire par la technique du ***test d'entrée dans l'étude du thème*** – test qui constitue le pendant des classiques ***devoirs de contrôle*** (« interrogations écrites », « devoirs surveillés », etc.), lesquels portent généralement sur des types de problèmes récemment étudiés et constituent des tests ***de sortie*** de l'étude des thèmes figurant au programme du contrôle [7]. Un test d'entrée peut prendre la forme d'une épreuve de 15 à 20 minutes, phase de travail ***individuel écrit*** suivie d'une phase de travail ***collectif*** en classe, immédiatement, ou lors de la séance suivante. La phase de travail individuel écrit apparaît ***indispensable*** pour que l'élève puisse apprécier par lui-même sa capacité – ou son incapacité – à s'affronter avec succès aux types de tâches mathématiques proposés. Ce travail écrit peut faire l'objet d'une double évaluation. L'évaluation réalisée ***par l'élève***, qui appréciera ainsi sa capacité à résoudre les problèmes des types proposés, pourra être consignée sur la copie, au moment où le professeur met un terme à la session de travail individuel écrit, et être exprimée sur une échelle en quelques points (par exemple : très faible, insuffisant, moyen, satisfaisant, très satisfaisant). L'évaluation réalisée ***par le professeur*** pourra, quant à elle, se traduire par une note chiffrée, dont le poids dans la série des notes attribuées à l'élève devra cependant rester ***très limité***.

4.6. Le test d'entrée doit permettre à l'élève et au professeur d'apprécier la maîtrise réelle qui est celle de l'élève sur les types de problèmes situés ***à la frontière*** entre l'une et l'autre classes. D'une manière générale, la principale difficulté de fabrication d'un tel test est liée à la contrainte de temps : parce qu'il doit ***relancer*** l'étude, et non l'arrêter durablement, un test d'entrée, on l'a dit, doit être ***bref***. Cette exigence conduit à renoncer à représenter, dans l'échantillon de tâches mathématiques proposées, l'***ensemble*** des types de tâches qui ont pu être rencontrées dans les classes précédentes, et à s'en tenir à ***quelques*** spécimens de difficulté graduée. S'agissant du thème des inéquations du premier degré à une inconnue et de la classe de seconde, on pourra ainsi envisager le test ci-après[8].

> Résoudre les inéquations et systèmes d'inéquations suivants, en représentant chaque fois l'ensemble des solutions sur une droite graduée : a) $-5x - 2 < 0$; b) $1 - 4x > -5x$; c) $\frac{12x+7}{5} > x - 1$; d) $\begin{cases} 2x - 8 < 5x + 13 \\ 4x - 23 \leqslant 10 + x \end{cases}$

Le test d'entrée proposé en exemple rappelle en outre que la gradation dans la difficulté ne saurait partir du niveau de difficulté ***le plus faible***, ainsi qu'on le ferait avec des commençants « absolus » : l'inéquation $3x + 4 > 10$, et même encore l'inéquation $3x + 6 > 10$, n'a ***en principe*** pas sa place dans un test d'entrée à proposer en 2^{de}. Inversement, on devra en général renoncer à faire figurer les problèmes les plus mangeurs de temps, comme le sont généralement les problèmes de ***modélisation*** par exemple.

4.7. Un test d'entrée n'est qu'un élément de ***l'organisation d'ensemble*** de l'entrée dans l'étude du thème. Censé permettre la détection – et l'auto-détection – des élèves présentant un ***déficit net*** sur le thème considéré, il ne vise pas à contrôler les élèves sur ***l'ensemble*** des points sensibles du thème. En fait, le test doit simplement éclairer le professeur (et les élèves) sur l'action à engager, laquelle peut consister : 1) à ne rien faire de plus, et à aborder ***sans attendre*** l'étude de ce qui est vraiment nouveau ; 2) à proposer à ***certains*** élèves, supposés en petit nombre et pour lesquels la chose semble s'imposer, un ***travail personnel adapté***, et ne reprendre l'étude ***collective*** du thème que quelques jours plus tard ; 3) à diriger en classe entière, ou, de manière plus ciblée, dans un cadre approprié (en module, s'il s'agit d'une 2^{de}, par exemple), un ***travail transitionnel spécifique*** sur le thème à étudier. Dans les deux derniers cas évoqués, les types de problèmes laissés volontairement de côté lors du test d'entrée pourront être spécialement travaillés : ainsi en ira-t-il, s'agissant du thème des inéquations en 2^{de}, avec les problèmes de modélisation algébrique élémentaire. Dans le deuxième cas, on notera que, même aidé, le travail personnel demandé à l'élève suppose de sa part une

[7] On se gardera, en revanche, d'utiliser tout au long de l'année les résultats d'évaluations, nationales ou non, réalisées en début d'année – ce qui reviendrait, *volens nolens*, à regarder l'élève comme ***figé dans un état quasiment indépassable***. Il est donc inapproprié de vouloir faire l'économie de tests d'entrée thématiques successifs en prétendant juger de la compétence ***actuelle*** de l'élève (au mois de février par exemple) sur un sujet d'étude donné à partir d'une performance ***passée*** (réalisée au mois de septembre par exemple) sur un sujet d'étude voisin, comme si sa contre-performance éventuelle en début d'année disait la vérité de l'élève et scellait son destin mathématique pour une période indéfinie.

[8] On se réfère ici à l'ancien programme de 3e, qu'on étudié les élèves actuellement en classe de seconde, et qui prescrivait l'étude des système d'inéquations.

certaine ***autonomie didactique***, en même temps qu'il engage clairement sa ***responsabilité didactique et citoyenne***, l'élève devant en effet s'efforcer de ***ne pas retarder trop l'avancée du temps didactique*** dans la classe. Le délai de quelques jours entre le travail d'évaluation et de bilan, d'une part, et la poursuite collective de l'étude, d'autre part, assume à cet égard une fonction clairement symbolique, en ce qu'il manifeste que la classe ***attend*** les élèves en retard, et en même temps que cette attente ne saurait se prolonger indûment.

4.8. L'organisation propice au travail personnel adapté suppose un dispositif approprié, et trois scénarios peuvent à cet égard être par exemple envisagés : 1) le professeur fournit aux élèves concernés une ou plusieurs ***feuilles de travail*** qu'il a préparées dans ce but et qui seront le support du travail personnel demandé ; 2) il peut aussi remplacer une telle production spécifique par un ***choix d'exercices*** que l'élève ira découvrir dans un ou plusieurs ouvrages à consulter au CDI (on préfèrera pour cela des ouvrages simples et concis, qui marquent assez nettement une situation de transition par rapport à la classe précédente) ; 3) il peut enfin diriger les élèves concernés vers un dispositif de travail approprié, fonctionnant comme un ***« atelier de mise à jour »*** [9].

4.9. Dans le cas où le professeur décide de diriger un travail transitionnel spécifique pour ***l'ensemble*** de la classe, les élèves pourront, dans le cadre des ***modules***, avoir à mener à bien soit un travail ***de développement***, réservés aux élèves les plus déficitaires, soit un travail ***de mise au point***, pour les élèves ayant une maîtrise du thème jugée suffisante. La cohésion didactique de la classe peut alors être assurée, par exemple, d'une part en utilisant dans le travail de mise au point le même matériel que celui utilisé dans le travail de développement, mais en moindre quantité et augmenté de quelques exercices simples de modélisation, d'autre part en demandant aux élèves engagés dans un travail de développement, éventuellement groupés en binômes pour certains d'entre eux, de remettre, dans la semaine qui suit, un travail écrit présentant la solution des exercices complémentaires étudiés en « mise au point », devoir pour lequel chacun des élèves ou des binômes reçoit l'aide de l'un des élèves ayant participé au travail de mise au point.

4.10. Un tel travail transitionnel spécifique portera sur les types de problèmes situés à la frontière avec la classe précédente et aura prioritairement pour objet de travailler et de « faire travailler » la technique standard correspondante mise en place dans cette classe, si une telle technique canonique existe ; ou, dans le cas contraire, de rassembler la classe autour d'une technique dont il apparaît que, à un titre ou un autre, ***elle a un avenir*** dans la suite de l'étude. Dans tous les cas, on s'efforcera d'enrichir la technique travaillée de variantes diverses qui fourniront notamment des moyens d'***anticipation*** et de ***contrôle***, en vue d'aller collectivement vers une meilleure maîtrise des types de problèmes considérés. La transition didactique faite, la classe pourra s'attaquer à ce qu'il y a de vraiment nouveau dans le programme de l'année, en prenant appui sur la technique travaillée jusque-là, et en essayant alors d'en étendre la portée aux cas nouvellement rencontrés. Pour résoudre l'inéquation

$$(3x-1)(x+1)(2x+1) > 0,$$

on peut par exemple écrire l'expression donnée sous la forme suivante :

$$6[x - (-1)][x - (-1/2)][x - 1/3].$$

Cette forme algébrique fait apparaître immédiatement les valeurs de x où l'expression change de signe (à savoir -1, $-1/2$, $1/3$) ; comme, pour $x = 1$, l'expression figurant au premier membre est positive, on peut conclure aussitôt qu'on a

$$S =]-1 ; -1/2[\cup]1/3 ; +\infty[.$$

Cette technique fait l'économie du tableau de signes, qui n'est nullement indispensable au plan ***technique*** [10].

4.11. L'obligation de créer du temps didactique ne doit pas conduire à oublier que l'étude est un moyen au service d'une fin : ***l'apprentissage***. Si le temps didactique impulsé par le professeur fixe un cadre collectif de progrès, c'est bien le travail des élèves qui peut faire que les ***temps de l'apprentissage*** apparaissent globalement ***en phase*** avec l'avancée officielle de l'étude, dont le professeur reste le garant. À cet égard, l'exigence contractuelle d'un temps didactique séquentiel et irréversible ne doit pas être plaquée mécaniquement sur les processus effectifs d'apprentissage, qui se développent au contraire ***dans un***

---

[9] En classe de seconde, ce dispositif peut être identifié aux séances d'***aide individualisée*** (AI).

[10] L'actuel programme de 2[de] regarde toutefois comme une « capacité attendue » le fait de savoir « utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction ». Un tel tableau n'est vraiment utile que lors de la phase ***de découverte et d'exploration*** du phénomène mathématique essentiel – le changement de signe de l'expression examinée lorsqu'on franchit une des « valeurs critiques », telles –1, –1/2, 1/3 dans le cas précédent.

décalage nécessaire avec l'actualité didactique officielle, et où triomphent ***travail d'après-coup*** et ***retours en arrière***. Les dynamiques cognitives individuelles se cachent souvent derrière un certain immobilisme apparent ; l'apprentissage se réalise bien rarement « en temps didactique réel », et le professeur ne saurait donc se contenter d'être l'ordonnateur du temps didactique officiel. Il est tout autant un ***aide à l'étude*** qui, à travers divers dispositifs didactiques (modules, soutien, etc.), contribue de manière décisive à favoriser la mise en accord du temps individuel de chaque « apprenant » avec le temps collectif de l'étude.

2. À propos de l'étude du secteur des configurations du plan en seconde, voici ce que dit le programme :

Contenus

Les configurations du plan.
Triangles isométriques, triangles de même forme.

Capacités attendues

Utiliser, pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées.
Reconnaître des triangles isométriques.
Reconnaître des triangles de même forme.
Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.

Commentaires

Les problèmes seront choisis de façon
– à inciter à la diversité des points de vue, dans un cadre théorique volontairement limité,
– à poursuivre l'apprentissage d'une démarche déductive,
– à conduire vers la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté (implication, équivalence, réciproque).
À partir de la construction d'un triangle caractérisé par certains de ses côtés ou de ses angles, on introduira la notion de triangles isométriques. On pourra observer que deux triangles isométriques le sont directement ou non.
On pourra utiliser la définition suivante : « deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre » (il s'agit donc de triangles semblables). On caractérisera ensuite, grâce au théorème de Thalès, deux triangles de même forme par l'existence d'un coefficient d'agrandissement-réduction. Rapport entre les aires de deux triangles de même forme.
Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables.
On s'interrogera, à partir de décompositions en triangles, sur la notion de forme pour d'autres figures de base (rectangle, quadrilatère quelconque…)..

• Dans la présentation du domaine de la Géométrie, on peut en outre lire :

Deux objectifs principaux sont assignés à cette partie du programme :
– développer la vision dans l'espace ;
– proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes faits au collège. Pour dynamiser la synthèse et éviter les révisions systématiques, trois éclairages nouveaux sont proposés : les triangles isométriques, les triangles de même forme et des problèmes d'aires.

C'est ainsi à travers l'étude de problèmes faisant émerger ou travailler l'OM sur les triangles isométriques et semblables que sera repris le travail effectué au collège.

3. La deuxième question explicite relative à ce secteur évoque une synthèse de l'OM au niveau du secteur, tout en semblant en exclure le travail sur le thème des triangles isométriques et semblables. C'est cela que l'on entend par la réalisation de l'amalgamation de l'organisation mathématique au niveau du secteur : partir d'un petit nombre de grand types de tâches – déterminer une longueur, déterminer un angle, déterminer une aire pour l'essentiel ici – et mettre en forme l'OM régionale qui a émergé du travail effectué.

Le cahier de textes

Serait-il possible que vous me disiez où est-ce qu'on parle du cahier de textes dans les BO ou autre quant aux modalités de remplissage ? A quel point doit-on être précis, quel document doit-on y joindre ? etc. P.S. J'ai du mal à trouver du temps en classe pour le remplir. (6e & 3e, 6) Que faut-il écrire dans le cahier de textes du professeur ? (2de, 3) Que doit-on écrire dans le « cahier de textes » : reporter tout ce qu'on a fait en cours + les exercices, ou juste les notions abordées. (2de, 2) Qu'est-ce qu'on doit noter exactement dans le cahier de texte ? (2de, 1)

Là encore, on fera appel à la notice du temps de l'étude.

3.4. À tout programme de travail – qu'il soit relatif à une heure de classe, à une semaine entière, ou à quelque autre unité de temps – doit correspondre une phase de ***bilan*** proportionnée au travail accompli, qui permette de ***faire le point*** et prépare ainsi l'effort de ***synthèse*** [11]. Pour ce faire, on peut notamment, au collège comme au lycée, utiliser le ***cahier de textes de la classe***, dont le contenu pourra être, une fois par semaine par exemple, ***revu et complété collectivement***, sous la direction du professeur, à partir notamment de l'ensemble des traces écrites (cahiers et cahiers de textes des élèves, etc.) du travail réalisé dans la période écoulée, avec pour objectif traditionnel, aujourd'hui bien oublié, d'aider élèves, parents et… professeurs à se situer par rapport à l'avancée de l'étude, comme le rappelait jadis la circulaire du 3 mai 1961 [12] :

> Un cahier de textes bien tenu est, pour l'élève, l'instrument premier de tout travail personnel efficace. Le cahier de textes de classe, qui sert avant tout de référence aux cahiers de textes individuels, et doit être, de façon permanente, à la disposition des élèves qui peuvent à tout moment s'y reporter, assure en outre, dans l'esprit de la circulaire du 20 octobre 1952 la liaison entre les professeurs et les maîtres chargés des études surveillées. Il permet enfin, en cas d'absence ou de mutation d'un professeur de ménager une étroite continuité entre l'enseignement du maître précédent et celui de son suppléant ou de son successeur. À ces divers titres, cahiers de textes de classe et cahiers individuels doivent être complets, de maniement facile et exempts de fautes. Ils doivent refléter la vie de la classe et permettre de suivre avec précision la marche des études.

Un tel ***travail de la mémoire***, qui rassemble la classe autour de son histoire en réduisant l'asymétrie structurelle entre professeur et élèves par rapport au temps de l'étude, et contribue à l'éducation des élèves à la citoyenneté et à la démocratie, peut prendre évidemment d'autres formes. On notera seulement, ici, le rôle que peuvent jouer, dans cette perspective, les ***travaux individuels de rédaction***, en classe et ***hors classe***, qui pourront avoir pour objet, à l'occasion par exemple de chaque période de vacances, de dresser l'inventaire « des choses faites et des choses qui restent à faire », à titre de préparation au ***bilan de rentrée***, collectif, inaugurant la reprise de l'étude.

Pour davantage de précisions sur le cahier de textes, on pourra consulter la circulaire du 3 mai 1961, disponible dans la rubrique documents du site Internet.

---

[11] C'est sur un tel bilan, consigné par écrit dans le « cahier-journal », que s'achevait il y a un peu plus d'un siècle la journée de travail à l'école primaire de Biesles...

[12] Pour le texte complet de cette circulaire, voir le document *Circulaire du 3 mai 1961 sur le cahier de textes*.

Les TICE

Je prépare ma première séance en salle informatique. Je crains d'être confronté à une très grande différence de niveau quant à l'habileté informatique des élèves. Comment organiser ma séance de façon à ce que tous les élèves avancent ensemble et que tous perçoivent l'intérêt des TICE en mathématiques ? (2^{de}, 6)
Faut-il intégrer de manière régulière des séances informatiques au cours du programme ? Car certains chapitres ne proposent pas (ou je ne les ai pas trouvés) d'applications judicieuses. (5^{e}, 6)
À quel chapitres doit-on plus particulièrement associer des TP d'informatique ? (2^{de}, 6)
Comment valider le C2i2e si aucune salle de ma classe n'est équipée de vidéoprojecteur ? (2^{de}, 6)

1. Une manière de préparer les séances en salle informatique est d'utiliser régulièrement les logiciels que l'on va faire utiliser (un tableur et un logiciel de géométrie dynamique) en classe entière avec un système de vidéoprojection. On notera que si les établissements ne sont pas équipés d'un vidéoprojecteur, ce qui se fait rare, ils ont souvent un système alternatif comme un grand écran télévision, plus encombrant mais qui peut occuper la même fonction. On a également la ressource d'utiliser la calculatrice qui a été utile pour passer le CAPES et qui dispose normalement d'un logiciel de géométrie dynamique (une version adapté du logiciel CABRI) ainsi que d'un tableur.
On peut également mettre en place un « test d'entrée » qu'il faudra penser un peu différemment des tests.

2. Les TICE en mathématiques contiennent, outre l'utilisation des logiciels mentionnés, la calculatrice : son utilisation doit donc être systématisée, d'autant que c'est le seul moyen d'intégrer des TICE aux techniques routinières que les élèves pourront mettre en œuvre en autonomie, sauf cas particulier où la classe dispose d'un ordinateur portable par élève.

3. En cette matière comme ailleurs, il faut réfléchir en termes de fonctions : étant donnée une OML à mettre en place, en quoi les TICE peuvent-elles s'avérer utiles ? Nous avons vu dans le Séminaire ou la séance de TD une grande fonction des TICE : la réalisation de la partie expérimentale permettant de réaliser un ingrédient du moment technologico-théorique ou encore du moment exploratoire, et nous avons au moins évoquer la fonction de contrôle des résultats qui doit venir s'intégrer dans les techniques du domaine numérique & fonctionnel.

(***À suivre***)

4. Observation et analyse

On a distribué un compte rendu : modélisation & fonctions en seconde. Il est à lire pour la semaine prochaine.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 7 : mardi 21 octobre 2008

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. Observation et analyse // 3. Forum des questions // 4. Présentation des IPR de mathématiques

0. Questions de la semaine

On notera la présence plus massive de questions sur la constitution des organisations mathématiques, comme par exemple la question suivante :

Dans le programme de quatrième, au niveau des statistiques, on ne parle que des moyennes mais dans le document d'accompagnement on fait référence aux notions de fréquence et effectif (vues en cinquième) en parlant des effectifs cumulés et fréquences cumulées. Comment mettre en forme tout cela ?

1. Problématique et fonctionnement du Séminaire

1.1. Programmation de l'étude

SPA : Le compte rendu d'observation à rendre le 18 novembre, par défaut le 25 novembre 2008 (ou par courriel à votre tuteur toute date entre les deux). L'échéance de la remise d'une première version de l'analyse le 16 décembre 2008 ne pourra pas être repoussée.

La prochaine séance de Séminaire aura lieu le 18 novembre 2008, ce qui induit 4 semaines d'interruption (vacances + le mardi 11 novembre qui est férié). C'est beaucoup compte tenu de l'état d'avancement du processus d'étude. On s'efforcera donc de garder une continuité dans le travail. Dans cette perspective :

* les recherches dans les archives qui devront être exposées lors de la séance du 25 novembre seront communiquées par mel pendant les vacances de façon à pouvoir prendre en considération les questions posées cette semaine ; ***à cet égard, on fera attention de citer les matériaux extraits des archives du séminaire en en donnant les références et en les distinguant des commentaires éventuels propres au trinôme ;***

* on donnera deux études à faire par trinôme et à rendre par voie électronique pour le 12 novembre :

a) on distribue d'abord une notice sur l'évaluation et la notation à étudier d'ici le 11 novembre ; on examinera les éléments de réponses qu'elle permet d'apporter aux questions suivantes. Pour alléger le travail de chacun, les questions seront réparties par GFP et par trinômes.

GFP MJ :

Le niveau de notes de mes élèves est faible. Dois-je simplifier mes contrôles ? (2^{de}, 4)
L'interrogation écrite surprise est-elle une solution pour préserver un travail constant des élèves ? (2^{de}, 0)

Trinômes : (Sylvain Astier, Alexandra Devilers, Elodie Maysou) ; ; (Christophe Coupard, Alain Gleyze) ;

Si un contrôle est raté, comment y remédier ? Quelle est la meilleure solution ? Rajouter des points à tout le monde, multiplier par un coefficient, augmenter le barème, ne rien faire ? (5^e et 4^e, 5)

Suite à une interrogation écrite de 15 minutes que j'ai proposée à mes élèves, j'ai réalisé que le niveau est très bas. Que faire ? Remarque : l'interrogation était sur les ensembles de nombres. (2^{de}, 3)

Trinômes : (Olivier Dumont, Marianne Kiledjian, Nicolas Laurent) ; (Anne Martinet, Marion Rubin, Elodie Vadé) (Daniela Caraffa-Bernard, Bruno Michel)

GFP CR :

À la réunion parents-profs de 4^e, on m'a demandé quelle était la cause de la chute des notes en mathématiques lors du passage de la 5^e à la 4^e, d'après ce qu'ils ont entendu…
J'ai répondu tant bien que mal en argumentant notamment sur un raisonnement géométrique plus poussé, le nombre d'étapes intermédiaires étant généralement plus important entre l'énoncé et la solution, etc. (à cause des nombreux nouveaux théorèmes : droite milieux, Pythagore, Thalès, cosinus, …) (5^e & 4^e, 2)

Aucun élève n'a su bien répondre à une question du DM1. Dois-je l'enlever du barème ? (2^{de}, 4)

Trinômes : (Souaad Benhadi, Sihame El Khaine) ; (Francine Bert, Yanna Pons, Benjamin Faure) ;

En général, en rédigeant un contrôle, on prévoit un barème. Dans quelle mesure peut-on adapter ce barème si par exemple un exercice a posé un problème particulier à l'ensemble de la classe ? Une question difficile doit-elle rapporter plus de points même si peu d'élèves ont répondu correctement ? (2^{de}, 5)

Est-ce que le niveau des contrôles doit dépendre du niveau de la classe ou doit-il être indépendant ? (2^{de}, 3)

Trinômes : (Vincent Boilard, Hamdoune Lazrek) ; (Renaud Cortinovis, Matthieu Bruno, Sylvain Samat).

On rappelle que David Félix, Latifa Attafi, Laurent Petit, Christophe Dobrovolny et Fanny Devaux doivent s'intégrer dans les deux binômes et constituer un trinôme.

GFP OS :

Comment savoir que l'on évalue bien une copie ? (2^{de}, 5)

Lorsqu'un DS a été mal réussi, est-ce qu'il faut le refaire ? Comment le compter dans la moyenne ? (4^e, 7)

Trinômes : (Rodolphe Arnaud, Arnaud Combes, Mounir El Farri) ; (Nelly Bofelli, Samuel Der Monsessian) ;

Comment évaluer un devoir de géométrie avec des démonstrations à faire ? Comment noter ? Prendre en compte la rédaction, les propriétés utilisées,... la mise en relation des divers éléments ? (2^{de}, 7)

Suite à un contrôle, j'ai parcouru rapidement les copies (sans les corriger) et je pense que la moyenne sera élevée (c'est mérité car les élèves ont très bien travaillé ce chapitre). Dois-je corriger plus sévèrement, ou corriger « normalement » ? (5^e, 7)

Trinômes : (Nicolas Chekroun, Vincent Dambreville, Céline Goujon) ; (Nicolas Mizoule, Raphaël Rigaud, Florian van Becelaere) ; (Antoine Noël, Hélène Pujol).

Le fichier texte rendu devra avoir la forme suivante :

Trinôme Mathilde Peyron, Leila Nalpas & Lamine Bonnaud *Question 1* *Matériaux pour une réponse* Extrait 1 page *x* [Citation de l'extrait] Extrait 2 pages *x-y* Citation de l'extrait etc.   *Question 2* *Matériaux pour une réponse*

b) Toujours par trinôme, un travail d'élaboration d'une organisation mathématique ponctuelle relative à un type de tâches du programme de seconde (voir *infra*, Observation et analyse).

1.2. Le questionnaire d'évaluation

Nous revenons ci-après sur les questionnaires d'évaluation renseignés il y a quinze jours par les x élèves professeurs présents.

Voici d'abord les aspects de la formation qui apparaissent positivement :

L'articulation entre la formation théorique et le terrain
Le développement de méthodes efficaces, motivées, pour fonctionner

La formation « théorique » et le stage en responsabilité se nourrissent l'un l'autre.

Cette formation nous permet de répondre à des questions de « terrain ».

La formation nous amène à nous poser les « bonnes » questions ; elle a donc un effet structurant sur notre approche du métier.

Sujets abordés étroitement liés aux problèmes rencontrés sur le terrain.

Les recherches, puis le travail en commun, les discussions sur des thèmes, des questions vives, en séminaire comme en GFP, contribuent grandement à une meilleure compréhension de l'enseignement que l'on suit (la discipline, la gestion d'une classe, l'étude d'un thème, la praxéologie...)

Formation en alternance qui nous permet d'être confronté au métier d'enseignant.

Le principe du forum des questions : de questions des stagiaires, dégager des questions de la profession.

Les questions
La formation nous permet de répondre, en nous donnant des éléments, aux questions vives.

Lors du GFP, on peut poser une ou plusieurs questions par écrit.

Les questions posées en séminaire peuvent être très utiles lorsqu'elles sont travaillées car ce sont des questions auxquelles je n'ai pas pensé mais qui sont utiles.

Le forum des questions avec la question de la semaine me paraît être un très bon dispositif pour répondre aux problèmes concrets auxquels nous sommes confrontés.

Pouvoir régulièrement poser des questions et connaître les questions que les autres se posent me paraît positif.

On peut avoir des réponses concrètes à des questions pratiques.

Les questions de la semaine (on apprend beaucoup de choses des réponses à nos questions mais aussi des questions des autres et on a accès à toutes les questions et réponses)

Les questions de la semaine.

Réponses rapides liées à des questions concrètes.

On est libre de poser autant de questions que nécessaire et la réponse est généralement assez rapide.
L'échange d'email avec nos tuteurs/PCP est très pratique en cas de souci.

Le GFP
La présentation (trop rare) d'activités d'étude et de recherche en GFP.

Voir les problèmes rencontrés par les autres professeurs stagiaires.

Le travail en GFP nous aide beaucoup pour notre travail « sur le terrain » (en particulier la préparation à l'étude d'un thème).

Je trouve que les séances de GFP sont intéressantes

Notre tuteur nous apporte de nombreuses réponses à nos problèmes.

Échanges et débat sur les expériences entre stagiaires.

Faire le point sur le stage et les difficultés rencontrées, partager ces difficultés. Pouvoir s'exprimer et poser des questions.

Le GFP, son organisation.

L'enseignement en GFP est vivant et assez proche du terrain, donc de nos préoccupations les plus urgentes.

Parler des problèmes rencontrés et y apporter des réponses.

Les GFP (questions vives...) aident à comprendre et mettre en pratique le contenu des séminaires.

GFP : Explicitation des séminaires et des problèmes rencontrés lors de notre stage. Mise en partage des difficultés de chacun et travail donné en GFP.

Les GFP apportent des questions directes.

Un collectif d'étude
Le fait qu'on s'exprime sur les problèmes qu'on rencontre sur le terrain et que d'autres élèves professeurs ainsi que les formateurs nous donnent des éléments de réponse.

La formation permet de confronter plusieurs points de vue et expériences personnelles.

Les échanges avec les autres stagiaires.

La formation en didactique
L'observation et l'analyse de séances : propositions et tests de méthodes didactiques pour optimiser les organisations mathématiques.

Le concept de praxéologie mathématique.

Autres

Je commence à voir l'intérêt de la formation et apprécier tout son contenu.

Ayant été contractuel, je me pose enfin des questions sur ma façon d'enseigner.

La formation nous propose un large champ de domaines étudiés et de manières diversifiées (GFP, séminaires, SPA, FIT, remise à niveau TICE, …)

La formation TICE qui nous permet de manipuler les logiciels de géométrie que nous serons amenés à utiliser avec les élèves.

Les exposés faits par les professeurs stagiaires suivis du débat.

Nous ferons seulement un commentaire : le « partage d'expérience » est cité plusieurs fois et de différentes façons. Si, effectivement, bénéficier d'un collectif d'étude est important parce qu'on apprend difficilement tout seul et que cela permet de constituer les difficultés rencontrées comme des problèmes de la profession (ou du moins une bonne part d'entre elles), il serait illusoire de penser que cela peut suffire comme formation : les apports technologico-théoriques sont essentiels pour progresser dans la constitution de praxéologies professionnelles intelligibles, justifiées, communicables et robustes.

À cet égard, il faut se méfier de la tendance, certes peu représentée (à 6/40?), qui s'exprime dans la deuxième question, de trouver la formation dispensée « trop théorique » :

Trop théorique
Parfois la formation semble, par rapport à notre travail sur le « terrain », un peu trop théorique.

Je trouve qu'au début de la formation, nous avons fait des choses trop abstraites qui ne nous aident pas pour commencer notre stage en responsabilité.

Les mots utilisés paraissent trop savants, et leur multiplication dans les phrases me font parfois perdre le sens de la phrase.

Les séminaires : j'ai des difficultés à me concentrer, à assimiler toutes les notions qui sont abordés (souvent les concepts sont théoriques et j'ai du mal à les concrétiser). Ne faudrait-il pas faire un PER en séminaire ?

Les conférences FIT sont un peu trop philosophiques.

Les conférences des modules FIT sont trop théoriques.

D'une part, les connaissances théoriques ne sont pas déconnectées des pratiques : elles permettent de les produire, de les justifier, de les rendre intelligibles. Il se peut que certains ingrédients apparaissent provisoirement ne renvoyant à aucune pratique, soit parce qu'ils ont émergé sans fonction technologico-théorique, soit parce que la fonction technologico-théorique n'a pas été vue ou comprise ou encore suffisamment développée. Il faut dans les deux cas se donner les moyens de déterminer la fonction technologico-théorique des ingrédients en jeu, en examinant avec leur secours les difficultés rencontrées et en posant des questions.

D'autre part, tenir ce discours est en consonance avec ce que pense la société du métier de professeurs : c'est un « petit métier », pour lequel on n'a pas réellement besoin de formation professionnelle, pour lequel il n'y a pas véritablement de savoirs spécifiques à acquérir, etc. On donne donc par là la main à la péjoration sociale et culturelle du métier, qui crée bien des obstacles à son exercice. À cet égard, on pourra méditer l'extrait suivant du *Discours préliminaire* de l'*Encyclopédie* de Diderot & d'Alembert dans lequel d'Alembert parle des arts mécaniques :

> On s'est adressé aux plus habiles [artisans] de Paris et du royaume : on s'est donné la peine d'aller dans leurs ateliers, de les interroger, d'écrire sous leur dictée, de développer leurs pensées, d'en tirer les termes propres à leurs professions, d'en dresser des tables et de les définir, de converser avec ceux de qui on avait obtenu des mémoires, et (précaution presque indispensable) de rectifier dans de longs et fréquents entretiens avec les uns, ce que d'autres avaient imparfaitement, obscurément, et quelquefois infidèlement expliqué. Il est des artistes [= des artisans] qui sont en même temps gens de lettres, et nous en pourrions citer ici ; mais le nombre en serait fort petit. La plupart de ceux qui exercent les arts mécaniques, ne les ont embrassés que par nécessité, et n'opèrent que par instinct. À peine entre mille en trouve-t-on une douzaine en état de s'exprimer avec quelque clarté sur les instruments qu'ils emploient et sur les ouvrages qu'ils fabriquent. Nous avons vu des ouvriers qui travaillent depuis quarante années sans rien connaître à leurs machines. Il a fallu exercer avec eux la fonction dont se glorifiait Socrate, la fonction pénible et délicate de faire accoucher les esprits, *obstetrix animorum*.
>
> Mais il est des métiers si singuliers et des manœuvres si déliées, qu'à moins de travailler soi-même, de mouvoir une machine de ses propres mains, et de voir l'ouvrage se former sous ses propres yeux, il est difficile d'en parler avec précision. Il a donc fallu plusieurs fois se procurer les machines, les construire, mettre la main à l'œuvre ; se rendre, pour ainsi dire, apprenti et faire soi-même de mauvais ouvrages pour apprendre aux autres comment on en fait de bons.
>
> C'est ainsi que nous nous sommes convaincus de l'ignorance dans laquelle on est sur la plupart des objets de la vie, et de la difficulté de sortir de cette ignorance. C'est ainsi que nous nous sommes mis en état de démontrer que l'homme de lettres qui sait le plus sa langue, ne connaît pas la vingtième partie des mots ; que, quoique chaque art ait la sienne, cette langue est encore bien imparfaite ; que c'est par l'extrême habitude de converser les uns avec les autres, que les ouvriers s'entendent, et beaucoup plus par le retour des conjonctures que par l'usage des termes. Dans un atelier c'est le moment qui parle, et non l'artiste.

Voici les autres points négatifs cités, que l'on commentera au fur et à mesure.

Les conditions faites à la formation

Les débuts sur le terrain sont assez difficiles, il faudrait peut-être envisager des solutions pour avoir plus de conseils le plus rapidement possible

On ne peut pas avoir une formation pour cette année, et donc les remarques faites ne peuvent pas être intégrées aussi facilement dans la vie de la classe que si on avait déjà eu l'information et qu'on l'avait intégrée au début d'année.

Le décalage de temps entre l'urgence de l'exercice effectif de la profession et le temps plus lent d'application des méthodes générales.

Elle n'est pas toujours en phase par rapport aux situations auxquelles on est confronté.

N'étant qu'au début de la formation, les réponses à de nombreuses questions sont « repoussées » ultérieurement.

Liste des questions sans y répondre sur le moment dans la mesure où des réponses existent.

Je regrette le décalage temporel entre le moment où une question est posée et celui où un début de réponse est proposé. C'est souvent « trop tard », en tout cas pour l'année en cours (notion déjà traitée, et organisation mathématique « ratée »).

On a une classe en responsabilité avec un « bagage » assez léger.

En début d'année, on est quasiment seul devant les élèves. Pourquoi la formation n'est pas possible sur Avignon ?

C’est difficile de remettre complètement en question tout ce à quoi on est habitué en didactique. La confrontation au côté théorique est assez difficile.

Difficulté à mettre en place les éléments théoriques du séminaire sur le terrain.

Informations données au fur et à mesure.

Les réponses aux « questions de la semaine » sont parfois un peu trop générales pour répondre précisément à un problème pratique.

On voit là le produit d’un système de conditions et de contraintes faites à la formation, auquel la péjoration du métier que l’on a cité plus haut n’est pas étrangère. On notera que le changement du système de formation des professeurs en cours d’élaboration peut modifier très positivement ce système de conditions et de contraintes. Malheureusement, pour le moment, la péjoration du métier pèse trop fortement pour que l’on puisse espérer tirer bénéfice de ces modifications. Développé oralement

Il faut être conscient du fait que la formation est d’abord là pour... former au métier ! Cette assertion, qui semble à première vue une tautologie, implique que, d’un côté, même s’il y a des dispositifs qui permettent de suivre les problèmes rencontrés lors du stage en responsabilité (PCP, GFP, Séminaire avec le forum des questions), on ne forme pas pour cette année mais pour les quelques 40 ans de carrière et le temps de l’apprentissage du métier diffère de celui de la rencontre des problèmes sur le terrain ; d’un autre côté, il ne s’agit pas d’apprendre « la technique » qui permet d’accomplir tel type de tâches un peu fin, mais de fabriquer des techniques relatives à des types de tâches plus « gros » dans lesquels les types de tâches « fins » apparaîtront comme sous-types de tâches et d’apprendre par là à fabriquer des techniques didactiques.

Ces notations permettent d’éclairer le point suivant :

Réponses insuffisantes ou trop tardives
Peu de réponses aux questions posées chaque semaine.
Réponses parfois trop tardives aux questions posées.

Réponses aux questions parfois tardives.

Il y a parfois un décalage dans le temps entre les questions posées et les réponses apportées en séminaire.

Au sujet des questions de la semaine, peut être avoir des réponses assez rapidement pour les questions les plus préoccupantes.

C’est peut-être égoïste, mais en répondant aux questions les plus fréquentes on ne répond pas (parfois) à certaine question pourtant pertinente.

On aimerait avoir les réponses à nos questions plus rapidement.

On ajoutera que, même si cela est peu entendu ou perçu, nombre de questions posées ont déjà trouvé une réponse ; pour le faire voir, on surlignera dans le fichier déposé sur le site les questions qui ont été travaillées dans le Séminaire.

Les points suivants ont fait l’objet de commentaires oraux.

FIT
Manque d’information concernant les emplois du temps des modules FIT.

Le manque d’informations au sujet des emplois du temps de la formation interdisciplinaire et transversale.

Il est regrettable que les FIT soient complètement déconnectés du reste de la formation.

Les conférences FIT sont un peu trop philosophiques.

Les conférences des modules FIT sont trop théoriques.

Techniques didactiques manquantes
J'ai compris le but et la forme que doit avoir une AER mais rien ne me permet encore d'en construire.

Travaux pratiques souhaités
Plus de « travaux pratiques » seraient appréciables.

J'aimerais travailler sur plus de cas « concrets », comme par exemple ce qui a été fait lors de l'activité sur le parallélogramme.

Pas assez de situations concrètes en séminaire.

Le séminaire
Difficulté pour consulter les séminaires précédents.

La difficulté de consultation des archives du séminaire.

Le texte projeté en séminaire me déconcentre : je n'arrive pas à fixer mon attention sur le discours du maître de conférence.

Le séminaire dans les sens où il est très difficile de parvenir à prendre des notes consistantes, et le manque de « micro ».

Les séances de séminaire sont difficiles à suivre : même au premier rang, j'ai du mal à lire et suivre ce qui est projeté. Le texte est trop condensé, il y a trop d'informations qui parasitent la lecture (barre de scrolling, barre de menu). En particulier le "scrolling" vertical lors des recherches dans le document sont plutôt pénibles pour les yeux...

Je trouve qu'on n'est pas assez actif en séminaire (mis à part aujourd'hui !).

J'ai du mal à mettre en pratique certaines choses qu'on nous dit en formation.

Autres

∅

Pas assez d'efficacité en GFP.

Les deux questions suivantes demandaient de citer un point positif et un point négatif du travail personnel effectué en relation avec la formation.

Un nombre significatif de réponses ne parlent pas réellement du travail personnel effectué : certains citent (positivement ou négativement) ce que l'on peut supposer être un résultat du dit travail personnel obtenu dans le stage en responsabilité, d'autres citent (positivement) un travail effectué en collaboration avec le maître de stage ou encore avec les autres élèves professeurs, etc. Il faudra progresser sur l'analyse de ce qui constitue le travail d'étude du métier, parce que c'est une condition essentielle pour progresser dans l'exercice du métier. On ajoutera qu'on a une non réponse en point positif et deux en point négatif : il faut apprendre à voir ce qui va comme ce qui ne va pas ; là aussi, c'est une condition essentielle de progrès.

Question 2a
Travail avec le PCP
La rencontre avec le PCP est très intéressante car on a les observations de nos erreurs vues par une personne expérimentée et objective.

Le suivi très régulier par le PCP m'aide beaucoup dans mon travail d'organisation didactique et dans la gestion de la classe.

Le travail entre ma PCP et moi-même est très productif.

Travailler en partenariat avec le PCP.

Le travail avec mon PCP me paraît très positif, car il a des répercussions plus immédiates sur mon travail quotidien.

Échanges
En discutant avec tout le monde, j'envisage des questions (problèmes) auxquelles je n'avais pas encore réfléchi.

Échange avec les stagiaires sur nos « expériences » en stage en responsabilité.

Le travail en trinôme pour confronter les points de vue.

Le cahier de terrain
Noter une remarque, une question, dans le cahier de terrain.

Le suivi du cahier de terrain me permet de relever les difficultés rencontrées et chercher des solutions.

Le cahier de terrain, où je note – assez régulièrement – mes problèmes ou mes réussites, aide à prendre du recul sur le travail de l'année. En particulier j'ai mis en évidence de nombreux problèmes dans mon organisation (gestion de la classe, de la synthèse, des exercices...)

Organisation
Je suis beaucoup plus organisé qu'avant pour faire face aux différentes responsabilités de mon collège, de l'IUFM, du rectorat, ... (organisation du temps, du travail,...)

Le travail de préparation de l'enseignement
L'élaboration d'une matière à la portée des élèves.
Le travail sur l'OM et l'OD me permet de mieux comprendre le découpage des cours.

J'essaie de réinvestir sur le terrain et dans mes préparations les éléments découverts à l'IUFM.

Le recul face à la formation et la profession me permet une meilleure implication et une production plus efficace en formation et dans mon stage.

La façon dont j'arrive parfois à appliquer des conseils vus à l'IUFM dans ma pratique de l'enseignement des mathématiques me paraît positif.

Recherche dans les archives du séminaire : pour préparer une AER et trouver des idées (si par chance,le domaine cherché s'y trouve).

Évolution de la préparation de mes cours notamment dans la préparation des AER.

J'essaie de me forcer à faire un maximum d'activités pour introduire des nouvelles notions.

Mon travail personnel (préparation de mes cours) évolue (en bien ?) grâce aux séances de GFP.

J'ai le sentiment grâce à ma PCP, ma tutrice, bref toute l'équipe qui s'occupe des PCL2 que mes préparations sont plus abouties.

Le travail « hors classe » lié aux dispositifs de formation
Chercher des réponses dans les archives et faire un exposé oral.

La présence en ligne des séminaires me permet d'être plus attentif le mardi et ensuite de relire et retravailler les notes des séminaires à tête reposée.

Le travail en GFP (devoir maison...) m'aide à assimiler les notions parce que les études de cas sont concrètes.

Même si je pêche par la mise en œuvre, je crois avoir bien compris la technique relative au type de tâches : « préparer l'étude d'un thème ».

C'est très intéressant d'appliquer ce que l'on voit en séminaire sous forme d'exercices.

Permet de faire la synthèse (ou applications) de ce qui est vu en séminaire.

J'essaie de mettre en pratique les éléments donnés par la formation.

Questions de la semaine : recherchée.

Le travail personnel me permet une meilleure compréhension de ce qui est expliqué en séminaire.

De nombreuses questions soulèvent des problèmes auxquels on n'avait pas pensé – et permettent réflexions.

Quantité de travail fournie

Je fais des semaines de 45 heures, ce qui, quand on est un gros dormeur, quand on a des enfants en bas âge, et un poil dans la main, est vraiment positif ! (pour la formation)

Autres

Le fait d'écrire des questions (les questions de la semaine) nous permet de mettre à l'écrit des problèmes rencontrés lors de notre stage en responsabilité.
La formation m'a permis d'aborder l'étude des thèmes sous un nouveau jour.

Mes questions en séminaire même si elles sont parfois hors sujet.

Gestion de classe.

J'ai appris à manipuler le logiciel Geogebra (que j'ai découvert grâce à la mise à niveau TICE) et j'ai pu en réexpliquer certains points à des collègues.

Je me sens plus en confiance face à mes élèves et suis donc plus ferme.

L'expérience d'une première année qui me permet de faire moins d'erreurs, notamment en gestion de classe, et dans la production de séquences.

Je ne vois pas.

Question 2b

Le travail hors classe ou en classe

Il serait intéressant de proposer des exemples d'activités sur certains chapitres.

Il serait intéressant de proposer un travail concernant l'organisation d'une activité.

Proposer des travaux plus concrets.

Je ne travaille pas assez les séminaires : le texte m'est très difficile à lire sur l'ordinateur et je n'ai pas d'imprimante.

J'ai du mal à suivre tout le séminaire et GFP (parfois j'ai la tête ailleurs) ce qui me pousse à resoulever des sujets déjà traités. Ex : comment faire un bon journal de la classe.

Je n'ai pas pris le temps d'approfondir les deux sujets d'exposé présentés pendant la séance d'explicitation.

La « mise en pratique »

Je n'y arrive pas encore [à mettre en pratique] ! (mais je ne me décourage pas)

J'ai beaucoup de mal à mettre en pratique et à voir « l'utilité » de toutes les consignes abordées dans la formation.

Conception d'AER
Je n'arrive pas à préparer assez bien les AER et j'ai donc des difficultés à créer une synthèse plutôt qu'un cours.

Je n'arrive pas à créer des AER qui posent un réel problème et qui fait émerger la nouvelle notion.

Mes AER sont extrêmement criticables.

J'ai du mal à proposer de bonnes AER.

Le manque d'inspiration face aux AER, dû aussi au niveau assez faible des élèves et à la peur de les mettre face à un mur.

La création d'AER.

Anticipation de l'enseignement
Je n'arrive pas encore à anticiper assez dans la préparation de mes « cours » pour avoir une vision plus globale.

J'ai du mal à anticiper suffisamment la préparation de mes cours pour pouvoir réaliser une réelle analyse et anticiper les lacunes de mes préparations.

J'aimerais réussir à anticiper encore plus dans la préparation de mes cours, afin d'avoir une vision plus globale.

L'évaluation des réponses apportées
Je ne parviens pas à analyser si mes AER sont bonnes, mauvaises, pourraient être bonnes...

Le « langage »
Quelques difficultés à comprendre et retenir le « langage IUFM » (réponse $R^{\heartsuit}$, $R^{\Diamond}$,...).

J'ai parfois du mal à comprendre le sens véritable des questions posées (langage spécifique).

Bien gérer tous ces nouveaux mots et termes de didactique et leurs abréviations. Je dois de temps en temps demander à des collègues…

Commentaire – On voit là encore la trace de la péjoration du métier dont on parlait plus haut ; ces difficultés ne seraient pas mentionnées s'il était bien partagé qu'enseigner les mathématiques est un métier complexe qui demande notamment d'être fortement instruit en matière de didactique des mathématiques.

TICE
La non utilisation des TICE.

Je n'utilise jamais de vidéoprojecteur, ni de rétroprojecteur (aucune salle n'est équipée…).

TICE difficile à intégrer dans mes cours.

J'ai du mal à intégrer les TICE dans mes cours.

Non utilisation des TICE.

Je compte faire des progrès en informatique dans le cadre du C2i2e, ayant certaines difficultés.

Archives et documentation
Manque de recherche dans les archives du séminaire.

J'ai encore du mal à utiliser la documentation pourtant abondante sur le site de l'IUFM, de façon efficace.

Une structure binaire qui vend chèrement sa peau
La tentation de retomber dans d'anciens schémas de cours face à ma classe (fausses AER et synthèse)... Mais je combats cette tentation !

J'ai toujours du mal à mettre en place des « bonnes » activités et une « bonne » synthèse sans faire le lien avec l'ancien cours.

La (gestion de la) quantité de travail
Je ne m'arrête pas de travailler. Même le week-end, il y a toujours quelque chose à préparer, c'est dur de trouver quelques moments de repos (sans stress).

Cela fait du travail supplémentaire/ préparation des cours.

La préparation des séances est beaucoup plus longue.

Manque de temps !

Autres
Je n'arrive pas à imposer un rythme convenable aux élèves.

Différences entre les « pratiques » effectuées par les professeurs dans l'établissement et les méthodes que l'on doit appliquer.
C'est dommage que l'on ne puisse pas, avec vous, faire des applications directes liées à ce que l'on fait avec nos classes.
∅
∅

2. Observation et analyse

On débute ici l'analyse du compte rendu « modélisation & fonctoins en seconde » distribué la semaine dernière.

Analyser l'organisation mathématique et l'organisation didactique dont on voit la trace dans le compte rendu distribué pour la deuxième partie (activité).

Travail individuel puis travail collectif dirigé

Nous n'avons collectivement travaillé que sur la partie « organisation mathématique ». On trouvera dans l'encadré ci-dessous les traces écrites des propositions effectuées par les participants :

T1 : Optimiser l'aire d'un rectangle soumis à des contraintes ;
T'1 : Maximiser l'aire d'un rectangle inscrit dans un triangle rectangle

θ : Si un rectangle d'aire maximale est inclus dans un triangle rectangle + un sommet sur le sommet de l'angle droit, il est inscrit.

T2 : Identifier les variables dans un problème.
T'2 : Modéliser un problème à l'aide d'une fonction

T'2 apparaît dans la technique relative à T''1 : optimiser une grandeur

T3 : déterminer le maximum d'une fonction

Optimiser une grandeur
Modéliser géométriquement
Maximiser l'aire d'un rectangle inscrit dans un triangle rectangle.
Modéliser analytiquement le problème
Déterminer le maximum d'une fonction

Travail par trinôme à rendre par mel pour le 11 novembre :
Dans le travail précédent, on a mis en évidence un type de tâches de l'organisation mathématique enjeu de l'étude dans l'AER proposée « déterminer le maximum d'une fonction » sans que la praxéologie susceptible de surgir de l'AER apparaisse dans la séance observée.
Déterminer une praxéologie mathématique relative au type de tâches « Déterminer le maximum d'une fonction du second degré » qui pourrait émerger du travail de l'AER proposée par P.

3. Forum des questions

Suivi de questions

En séminaire, on nous dit qu'il faut faire deux à trois contrôles par trimestre, à mon sens ce n'est pas assez. Pouvons-nous en discuter ? (5e & 5e , 7)

1. La formulation de la question traduit une vision restrictive de ce qui a été dit en Séminaire, et qui s'appuyait, on le rappelle, sur un texte de l'IGEN : c'est de 2 à 3 DS qu'il s'agissait, soit des devoirs longs, auxquels il convient d'ajouter au moins une interrogation par quinzaine. Si on fait 3 DS par trimestre, un trimestre comprenant entre 10 et 12 semaines de travail, cela suppose de faire un devoir surveillé toutes les 3 à quatre semaines et on aura fait 6 à 8 contrôles, soit plus d'un contrôle toutes les deux semaines. On n'a pas d'éléments fonctionnels qui justifient la nécessité d'augmenter le nombre de DS. On a en revanche au moins un argument contre.
2. Faire un DS de plus supposerait de faire un DS toutes les 2 à 3 semaines. Cela conduit généralement, avec les normes professionnelles prévalant aujourd'hui, au fait que le temps de travail sur le thème évalué par le DS sera réduit : compte tenu de ce qui a été dit sur le décalage avéré entre temps de l'étude et temps d'apprentissage, on va aboutir à une pression trop importante conduisant un rapport peu robuste des élèves aux praxéologies mathématiques mises en place et qui risque fortement de conduire à des difficultés pour conduire la classe.
3. On peut bien entendu imaginer des techniques réduisant la pression évaluative signalée, mais qui demanderont une gestion fine du temps didactique par le professeur, gestion qui semble peu accessible à un débutant d'autant qu'elle n'est pas nécessaire.

Mon emploi du temps contient une heure en demi-groupe chaque semaine, me laissant trois heures en classe entière. Dans cette configuration, comment gérer deux « chapitres » en parallèle, étant donné qu'un groupe a généralement une semaine d'avance sur l'autre ? (4e, 7)

On a déjà dit que, de manière ordinaire, c'est du ***travail de l'OM*** qui prendra place dans le demi-groupe de manière à ne pas faire avancer le temps didactique pendant cette heure-là ; travail qui devra être programmé sur la quinzaine. On pourra également envisager des dispositifs du type suivant : faire faire au groupe une expérimentation dont il rendra compte à la classe en classe entière, et qui s'avèrera utile dans l'avancée de l'étude. Le deuxième demi-groupe fera ensuite une autre expérimentation utile, l'essentiel résidant dans le fait que chaque groupe en fasse une même si ce ne sont pas les mêmes.

Organisations mathématiques

*Géométrie en 6^e^*

Avec mes sixièmes j'ai un choix à faire : je fais une leçon « Polygones », et pour l'instant j'ai seulement vu l'égalité de longueurs, pas le parallélisme ni l'orthogonalité. Donc je vais pouvoir voir seulement les triangles isocèles et équilatéraux, pas rectangles. Est-ce bien de séparer en deux parties l'apprentissage des triangles ou est-ce que je me sers de l'idée qu'ils ont déjà deux côtés perpendiculaires pour tout faire d'un coup ? (7, 6^e & 3^e)

Examinons d'abord le programme de la classe de 6^e . Voici les « objectifs principaux » du domaine « Géométrie »

- compléter la connaissance des propriétés de certaines figures planes (triangles, rectangle, losange, cerf-volant, carré, cercle) et du parallélépipède rectangle ;
- reconnaître les figures planes mentionnées ci-dessus dans une configuration complexe ;
- utiliser des propriétés de la symétrie axiale, reliées aux notions de médiatrice d'un segment et de bissectrice d'un angle ;
- maîtriser l'usage de techniques de construction et l'utilisation des instruments adaptés.

A l'école élémentaire, les élèves ont acquis une première expérience des figures et des solides les plus usuels, en passant d'une reconnaissance perceptive (reconnaissance des formes) à une connaissance plus analytique prenant appui sur quelques propriétés (alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, milieu, axes de symétrie), vérifiées à l'aide d'instruments. Ils ont été entraînés au maniement de ces instruments (équerre, règle, compas, gabarit) sur des supports variés, pour construire des figures, en particulier pour le tracé de perpendiculaires et de parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre.

Les travaux conduits en Sixième prennent en compte les acquis antérieurs, évalués avec précision et obéissent à de nouveaux objectifs. Ils doivent viser d'une part à stabiliser les connaissances des élèves et d'autre part à les structurer, et peu à peu à les hiérarchiser. L'objectif d'initier à la déduction est aussi pris en compte. A cet effet, les activités qui permettent le développement des capacités à décortiquer et à construire des figures et des solides simples, à partir de la reconnaissance des propriétés élémentaires, occupent une place centrale.

Les travaux géométriques sont conduits dans différents cadres : espace ordinaire (cour de récréation, par exemple), espace de la feuille de papier uni ou quadrillé, écran d'ordinateur. La résolution des mêmes problèmes dans ces environnements différents, et les interactions qu'elle suscite, contribue à une approche plus efficace des concepts mis en œuvre.
Les connaissances géométriques permettent de modéliser des situations (par exemple représenter un champ par un rectangle) et de résoudre ainsi des problèmes posés dans l'espace ordinaire. Les formes géométriques (figures planes, solides) se trouvent dans de nombreux domaines : architecture, œuvres d'art, éléments naturels, objets d'usage courant… Ces mises en relation permettent peu à peu de dégager le caractère universel des objets géométriques par rapport à leurs diverses réalisations naturelles ou artificielles.

On notera que les objectifs mentionnent, pour prendre en compte les acquis antérieurs, la nécessité de les évaluer, soit encore de mettre en place des tests d'entrée.

On trouve ensuite des détails dans le programme du secteur Figures planes du domaine Géométrie. On cite ci-dessous ceux relatifs aux quadrilatères et aux triangles [ce qui est surligné en jaune n'est pas un objectif du socle pour l'année en cours mais le sera en 5^e dans le cas où il est est précédé d'un astérisque] :

Contenus
Propriétés des quadrilatères usuels
Propriétés des triangles usuels
Reproduction, construction de figures usuelles simples

Capacités
- Connaître les propriétés relatives aux côtés, aux angles, **aux diagonales* pour le rectangle et le carré.
- *Connaître les propriétés relatives aux côtés, aux angles, aux diagonales pour les quadrilatères suivants :*
    - **losange,*
    - *cerf-volant.*

Connaître les propriétés relatives aux côtés et aux **angles* des triangles suivants : triangle isocèle, triangle équilatéral, triangle rectangle.
- Utiliser ces propriétés pour reproduire ou construire ces figures.
- Construire une figure simple à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

[B2i]

Exemples d'activités, commentaires

Certaines des propriétés évoquées ont déjà été étudiées à l'école primaire (notamment celles relatives aux côtés, à la présence d'angles droits ou à celle d'axes de symétrie), **d'autres sont nouvelles (notamment celles relatives aux angles autres que les angles droits et celles relatives aux diagonales).-*

**La symétrie orthogonale est mise en jeu le plus fréquemment possible pour justifier les propriétés.*

La connaissance ainsi développée des figures ci-contre conduit à les situer les unes par rapport aux autres, en mettant en évidence leurs propriétés communes et des propriétés différentes. **Dans cette optique nouvelle, le carré est reconnu comme étant un losange particulier et un rectangle particulier car il vérifie les propriétés du losange et celles du rectangle.*

La connaissance ainsi développée des figures ci-contre conduit à les situer les unes par rapport aux autres, en mettant en évidence leurs propriétés communes et des propriétés différentes.

Les travaux de reproduction et de construction peuvent consister en :
- la copie conforme d'un modèle concret ou d'un dessin ;
- le dessin d'une figure à compléter, **constituant éventuellement un agrandissement ou une réduction d'une figure donnée ;*
- un dessin à partir d'un schéma codé à main levée, avec ou sans données numériques ;
- un dessin à partir d'un énoncé décrivant une figure.

Dans ce dernier cas, il existe en général plusieurs réalisations conformes à la description, ce qui peut donner lieu à des analyses et des échanges fructueux entre les élèves.

Les procédés utilisés pour la reproduction ou la construction dépendent des indications fournies à l'élève et des instruments disponibles. Pour les figures suivantes *: cerf-volant*, **losange*, carré, triangle isocèle, triangle équilatéral, leur construction à la règle graduée et au compas est un objectif de la classe de Sixième (dans la mesure où la construction ne fait pas intervenir le parallélisme).

Que savent donc les élèves sur les perpendiculaires à l'issue de l'école primaire ? Voici ce que disait le programme du cycle 3 encore en vigueur l'an dernier :

Fichier Édition Affichage Aller à Aide

Précédente Suivante 27 sur 37 175 %

Connaissances et capacités travaillées et attendues en fin de cycle 3	
Espace et géométrie	
CONNAISSANCES	**CAPACITÉS**
5.1 Repérage, utilisation de plans, de cartes - repérer une case ou un point sur un quadrillage ; - connaître les points cardinaux et leur incidence sur une carte ou un plan, en liaison avec la géographie.	Dans des cas concrets (plan de classe, d'école, du quartier, de ville, carte routière, carte de France, d'Europe) : - savoir se situer par rapport à des repères fixes (porte, mairie, Paris, pays limitrophes) ; - savoir représenter un déplacement simple sur une carte ou un plan ; - savoir évaluer une distance entre deux objets ou deux lieux en utilisant les indications de longueur données par le plan ou la carte, par lecture directe sans devoir recourir à l'échelle.
5.2 Relations et propriétés : alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, symétrie axiale - connaître et savoir utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : points alignés, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, segment, milieu, angle, figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite, axe de symétrie.	- vérifier, à l'aide des instruments : l'alignement de points (règle), l'égalité des longueurs de segments (compas ou instrument de mesure), la perpendicularité (équerre) et le parallélisme entre droites (écart constant), et effectuer les tracés correspondants ; - trouver le milieu d'un segment ; percevoir qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie et le vérifier en utilisant différentes techniques (pliage, papier calque, miroir) ; - compléter une figure par symétrie axiale en utilisant des techniques telles que pliage, papier calque, miroir ; - tracer, sur papier quadrillé, la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.
5.3 Figures planes : triangle (et cas particuliers), carré, rectangle, losange, cercle - connaître et savoir utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : triangle, triangle rectangle, *triangle isocèle, triangle équilatéral,* carré, rectangle, losange, cercle ; sommet, côté ; centre, rayon et *diamètre* pour le cercle.	- reconnaître de manière perceptive une figure plane (en particulier dans une configuration plus complexe), en donner le nom, vérifier son existence en ayant recours aux propriétés et aux instruments ; - décomposer une figure en figures plus simples ; - tracer une figure (sur papier uni, quadrillé ou pointé), soit à partir d'un modèle, soit à partir d'une description, d'un programme de construction ou d'un dessin à main levée ; - tracer un cercle dont on connaît le centre et le rayon ; *- décrire une figure en vue de l'identifier dans un lot de figures ou de la faire reproduire sans équivoque.*

On le voit, la distance est faible entre ce qui est écrit ici et le programme de la classe de sixième : la frontière se fait sans doute, en dehors du travail sur les angles autres que droits et les diagonales, par les techniques de détermination et de construction de droites parallèles et perpendiculaires, et notamment la justification de ces techniques – c'est cela qui va marquer l'entrée dans la géométrie déductive. Ce sont donc ces praxéologies qui doivent être au cœur de l'enseignement dispensé, motivées par le travail de reproduction (et donc de construction) de figures que l'on pourra situer dans des travaux d'établissement de plans ou de maquettes par exemple. Ils devront permettre de faire surgir une définition de deux droites perpendiculaires, de deux droites parallèles et une caractérisation que le programme cite explicitement :

Deux droites perpendiculaires sont définies comme deux droites sécantes déterminant quatre angles égaux (qui sont des angles droits).

Deux droites parallèles sont définies comme deux droites non séantes et caractérisées par le fait que si l'une est perpendiculaire à une troisième droite, l'autre l'est également.

Dans cette perspective, pour donner un *topos* suffisant aux élèves, on pourra mettre en place des « jeux de communication » en partageant la classe en trois par exemple, chaque partie de la classe ayant une figure différente à décrire, puis à reproduire en suivant la description effectuée par leurs camarades. Pour gérer au mieux ce type de travail, du point de vue du temps et de l'exploitation des données, on le pourra scinder en trois épisodes : description (le professeur ramasse les productions) ; reproduction (le professeur ramasse les productions) ; confrontation des deux et mise à l'épreuve collective que le professeur aura pu préparer notamment en constituant un recueil de productions à exploiter et un dispositif permettant de le travailler collectivement. Le travail de chacun des épisodes ne prenant pas obligatoirement toute la séance, cela justifie l'intérêt de travailler sur deux thèmes en parallèle.

Les questions suivantes n'ont pas été étudiées en séance ; on les laisse étudier hors classe et on y reviendra rapidement dans la séance de la rentrée.

*Ordre et intervalle en 2^de^*

Pour l'étude du thème « Ordre et intervalles », mon PCP me conseille une activité du type :
Remplir le tableau

a	b	Représentation de a et b	ordre de a et b	$a - b$
...	...	...	...	...

Les premiers couples (a ; b) pouvant être ordonnés avec le travail fait en collège, les derniers nécessitant le calcul de $a - b$. Qu'en pensez-vous ? Je ne vois pas mieux.
b) Pour le même thème, comparer deux expressions littérales est-il enjeu de l'étude ? Même question pour :
* déterminer un encadrement de $f(x)$, en en connaissant un de x,
* donner la solution d'une inéquation sous forme d'intervalle.

(7, 2^de^)

1. On reprendra d'abord le programme de seconde sur le domaine *Calcul et fonctions*.

Objectifs :
– Approfondir la connaissance des différents types de nombres.
– Expliciter, sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction.
– Étudier quelques fonctions de références, préparant à l'analyse.
– Progresser dans la maîtrise du calcul algébrique, sans recherche de technicité, toujours dans la perspective de résolution de problèmes ou de démonstration.
– Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques.
La plupart de ces objectifs concernent les trois années de lycée.
Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions. Comme la géométrie, les activités de calcul doivent être l'occasion de développer le raisonnement et l'activité de démonstration.
Lors de la résolution de problèmes, on dégagera, pour certains exemples étudiés, les différentes phases du traitement : mathématisation et mise en équation, résolution, contrôle de la cohérence des résultats et exploitation.
On exploitera les possibilités offertes par les tableurs, par les grapheurs et par les logiciels de géométrie.

Contenus	**Capacités attendues**	**Commentaires**
Nature et écriture des nombres. Notations **N**, **Z**, **D**, **Q**, **R**. Représentation des nombres dans une calculatrice. Nombres premiers.	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter un résultat donné par une calculatrice. Organiser un calcul à la main ou à la machine. Décomposer un entier en produit de nombres premiers.	On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. On travaillera sur les ordres de grandeur. On donnera un ou deux exemples de limites d'utilisation d'une calculatrice. On fera quelques manipulations de nombres en écriture scientifique. On se limitera à des exemples (du type 56 × 67) pour lesquels la connaissance des tables de multiplication suffit.
Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre.	Choisir un critère adapté pour comparer des nombres. Comparer a, a^2 et a^3 lorsque a est	La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres.

	positif. Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter.	
Fonctions	 Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule. Déterminer, dans chacun des cas, l'image d'un nombre.	On étudiera des situations issues, entre autres, de la géométrie, de la physique, de l'actualité ou de problèmes historiques. On réfléchira sur les expressions *être fonction de* et *dépendre de* dans le langage courant et en mathématiques. On donnera des exemples de dépendance non fonctionnelle (poids et taille, note au bac et moyenne de l'année). Les fonctions abordées ici sont généralement des « fonctions numériques d'une variable réelle » pour lesquelles l'ensemble de définition est donné. On pourra voir quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou même de fonctions à deux variables (aire en fonction des dimensions). L'utilisation de calculatrices ou d'ordinateurs amènera à considérer une fonction comme un dispositif capable de produire une valeur numérique quand on introduit un nombre (c'est-à-dire comme une « boîte noire »). Les notations $f(x)$, déjà introduite au collège, et f seront systématiquement utilisées. Il importe d'être progressif dans l'utilisation de ces écritures : le passage du nombre $f(x)$ à l'objet mathématique « fonction » noté f est difficile et demande un temps de maturation individuelle qui peut dépasser la classe de 2^{de}.
Étude qualitative de fonctions. Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.	S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. La perception sur un graphique de symétries ou de périodicité pourra conduire à une formulation analytique de ces propriétés. On soulignera le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante renverse l'ordre ; une définition formelle est ici attendue.
Premières fonctions de référence.	Établir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 1/x$.	D'autres fonctions telles que $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \|x\|$… pourront être découvertes à l'occasion de problèmes. Les résultats les concernant pourront être admis. Les positions relatives des diverses courbes ainsi découvertes seront observées et admises.

	Connaître la représentation graphique de $x \mapsto \sin x$ et de $x \mapsto \cos x$.	La définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour un réel x quelconque se fera en “enroulant **R**” sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de 30°, 45° et 60°.
Fonctions linéaires et fonctions affines.	Caractériser les fonctions affines par le fait que l’accroissement de la fonction est proportionnel à l’accroissement de la variable.	Exemples de non-linéarité. En particulier, on fera remarquer que les fonctions carré, inverse, … ne sont pas linéaires.
Fonctions et formules algébriques.	Reconnaître la forme d’une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés). Identifier l’enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule. Reconnaître différentes écritures d’une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…). Modifier une expression, la développer, la réduire selon l’objectif poursuivi.	Les activités de calcul doivent être l’occasion de raisonner et de démontrer. On évitera une activité trop mécanique et on s’efforcera de développer, avec des expressions littérales faisant intervenir une seule lettre, deux plus rarement, des stratégies s’appuyant sur l’observation, l’anticipation et l’intelligence du calcul. On multipliera les approches et on explicitera quelques procédures simples permettant d’infirmer ou de confirmer une formule. À l’occasion de certains travaux sur tableur, on distinguera la recherche et l’observation d’une loi empirique de la démonstration d’une formule. Des activités liées aux fonctions, aux équations ou aux inéquations mettront en valeur l’information donnée par la forme d’une expression et motiveront la recherche d’une écriture adaptée.
Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d’équations et d’inéquations.	Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d’une fonction. Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type : $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$; …	Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. On ne s’interdira pas de donner un ou deux exemples de problème conduisant à une équation qu’on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées.

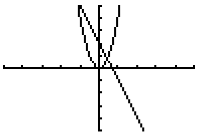
La présentation du domaine explicite assez clairement que les chapitres du secteur du calcul doit trouver sa raison d’être dans le secteur des fonctions. À quoi peut donc servir l’ordre des nombres dans le travail sur les fonctions ? Telle est la question que l’on peut s’efforcer d’examiner.

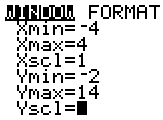
2. L’ordre apparaît bien entendu lié à la question des inéquations. Considérons ainsi le commentaire que nous avons surligné en bleu précédemment :

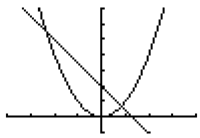
On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives.

Il semble suggérer la technique suivante :

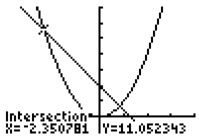
Soit à résoudre l’inéquation $2x^2 + 3x - 4 \leqslant 0$. Elle est équivalente à l’inéquation $2x^2 \leqslant -3x + 4$. La représentation graphique de ces deux fonctions de références donne d’une part une parabole tournée « vers le haut » de sommet (0, 0) et d’autre part une fonction affine décroissante dont l'ordonnée à l'origine est 4 ; on aura ainsi la parabole en dessous de la droite entre les points d'intersection, soit entre les solutions de l'équation $2x^2+3x-4=0$ comme en témoigne les représentations graphiques suivantes obtenue avec une calculatrice TI-82, d'abord sur la fenêtre classique [-10 ; 10] $\times$ [-10 ; 10], puis sur une fenêtre plus adaptée

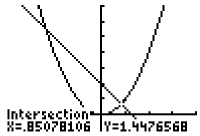






La calculatrice fournit des valeurs approchées des points d'intersection (voir ci-dessous), que l'on pourrait vouloir contrôler avant de faire confiance à la calculatrice dans l'établissement de résultats expérimentaux.





On sera alors amené à comparer deux nombres, donnés comme deux images d'un même nombre par deux fonctions. La question du critère de comparaison va être amenée en jouant sur les ensembles de nombres auxquels les images appartiennent : il est en effet d'une part peu commode de comparer, sur la table de la calculatrice, des nombres qui ont plusieurs chiffres de leur écriture décimale égaux alors qu'il est bien plus aisé d'y repérer un 0 ; d'autre part, la technique de la différence est plus performante à la calculatrice compte tenu notamment du fait que celle-ci travaille avec davantage de chiffres qu'elle n'en affiche.
Exemples
On voit de même surgir la question de la notation de l'ensemble des solutions à partir du moment où l'on accomplit « souvent » le type de tâches de résolution d'inéquations : en effet, la périphrase « x est compris entre x_1 et x_2, x_1 et x_2 compris » qui s'avère lourde à écrire sera remplacée par $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ puis par $x \in [x_1 ; x_2]$.

3. Ces types de tâches d'encadrement et de détermination d'intervalle(s) trouveront également une raison d'être dans la représentation graphique des fonctions à la calculatrice, notamment dans la justification de la détermination de la fenêtre de représentation graphique, ou encore dans la détermination des variations d'une fonction. C'est ainsi dans le cadre du travail sur les fonctions que ces notions d'ordre et d'intervalle seront particulièrement utiles : c'est donc au sein de ce travail qu'il faudra les faire apparaître. On aura alors une synthèse « ordre et intervalle », dont la matière aura émergé des travaux sur les fonctions. On retrouve un phénomène déjà signalé : l'écriture séquentielle du programme n'est pas un ordre d'exposition ; il faut dégager les liens fonctionnels entre les différents morceaux pour pouvoir créer une séquentialité qui tienne compte des besoins et des raisons d'être des différents thèmes d'étude.

TICE

Comment utiliser les séances en salle informatique pour valider des compétences B2i ? Par exemple lors d'une séance Geogebra sur Thalès en quatrième. Comment concrétiser dans la notation et la validation d'une année la validation des compétences ? (7, 4e)

Si suite à une séance informatique, on se rend compte que les élèves ont du mal avec l'outil informatique, peut-on faire une séance de « mise à niveau » sur une activité très simple pour leur faire découvrir un logiciel de mathématiques ? (7, 5e)

Comme on l'a déjà dit dans le séminaire, il s'agit de fonctionnaliser l'informatique dans l'étude des mathématiques qui figurent au programme : ce sont les types de tâches mathématiques qui donnent leur raison d'être aux types de tâches informatiques. C'est ce qui figure dans les programmes et qu'un texte de l'IGEN de mathématiques résume ainsi :

Par ses spécificités, l'outil informatique complète les moyens à la disposition des enseignants et des élèves pour mettre en œuvre ces différents aspects d'une véritable activité mathématique.
En effet, il permet notamment :

- d'obtenir rapidement une représentation d'un problème, d'un concept afin de lui donner du sens et de favoriser son appropriation par l'élève ;
- de relier différents aspects (algébrique, géométrique, ...) d'un même concept ou d'une même situation ;
- d'explorer des situations en faisant apparaître de façon dynamique différentes configurations ;
- d'émettre des conjectures à partir d'une expérimentation interactive lors de l'étude d'un problème comportant des questions ouvertes ou d'une certaine complexité, et de procéder à des premières vérifications ;
- de se consacrer à la résolution de problèmes issus de situations courantes, alors que les calculs sont longs ou complexes ;
- de procéder rapidement à la vérification de certains résultats obtenus.

Comme on l'a déjà signalé, on pourra préparer les séances informatiques en demi-groupes par des séances en classe entière qui permettront de rassembler la classe autour d'un point moyen et on portera attention à la question des traces écrites, comme on l'a vu faire partiellement par le professeur de 5e observé : à l'instar des autres techniques, les techniques « à informatique » doivent trouver leur place dans la synthèse.

On trouve la même problématique, de manière sans doute moins explicite, dans la circulaire publiée au JO du 27 juin 2006 sur la mise en place du B2i collège (les mêmes notations valent pour le lycée) :

Les compétences à acquérir pour la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication résultent d'une combinaison de connaissances, de capacités et d'attitudes à mobiliser dans des situations concrètes.

Ils ajoutent :

L'évaluation des compétences du brevet informatique et internet collège fait l'objet d'un travail régulier tout au long des quatre années du collège. Tous les enseignants sont susceptibles de contribuer à la validation de ces compétences.

C'est ainsi « au long cours » que vont se mettre en place les différentes compétences attendues des élèves, et le professeur doit gérer cette temporalité, qui s'avère quelque peu différente de celle qui rythme l'étude thématique mais qui se rapproche de celle liée à un PER. La vision « séance par séance » est, là comme ailleurs, non pertinente. Il conviendra, comme pour le reste, d'identifier des praxéologies et d'évaluer, au travers des tâches effectuées, si la maîtrise en est suffisante ou encore partiellement déficiente.

(À suivre)

Bonnes vacances... studieuses !

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 8 : mardi 18 novembre 2008

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. Observation et analyse // 3. Forum des questions // ~~4. Notice *Évaluation et notation*~~

0. Questions de la semaine

Toujours beaucoup de questions sur l'évaluation. On en citera une :

> a) Dans les contrôles, doit-on toujours créer les exercices sous forme de modélisation ou peut-on donner des exercices faisant appliquer une méthode mais qui manquent d'intérêt pédagogique ?
> b) Si l'on met des points pour la présentation d'un contrôle, doit-on les mettre en bonus ou noter le contrôle sur un peu moins de 20 ? (2^{de})

Quelques questions portent sur la détermination des OM et sur la réalisation des moments de l'étude (autres que le moment de l'évaluation). Par exemple :

> Je prépare mes séances sur les fonctions en classe de seconde. J'ai donc étudié le programme et j'ai rencontré une difficulté : il est précisé qu'il faut « identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule ». On ne peut définir une fonction par un tableau de données. Comment aborder cette manière de se donner une fonction le plus clairement possible ? (2^{de})

1. Problématique et fonctionnement du Séminaire

1.1. Recherche dans les archives

La prochaine recherche dans les archives est prévue le 2 décembre 2008.
Deux exposés seront au programme de cette séance.

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

> Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant au dispositif des ***modules*** en classe de Seconde ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

> 1. J'ai une classe très hétérogène. Je me demande s'il ne faudrait pas constituer des groupes de travail pendant l'heure de module. Comment constituer de tels groupes ? (5)

2. En module, un groupe a progressé plus rapidement que l'autre. Peut-on le prévoir ? Comment anticiper ? (2)
3. Comment aborder les modules en seconde ? (0)
4. Que faire en module (classe de 2de) ? Activité et synthèse me semblent hors de question… (2)
5. Utilisation des modules ? À quel moment peut-on faire travailler les élèves sur ordinateur sans utiliser les modules ? Peut-on se rajouter une heure pour faire un découpage ? (8)
6. En module, doit-on prévoir une séance « particulière » à chaque fois ou peut-on faire une séance d'exercices ? (4)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Nicolas Chekroun, Vincent Dambreville et Céline Goujon.

b) La deuxième recherche dans les *Archives* aura trait à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'axiome de Wallis*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse à la question ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

En quoi l'axiome de Wallis est-il pertinent pour l'étude de la géométrie ?

• Cette recherche est confiée au binôme formé de Vincent Boilard, Hamdoune Lazrek et Fanny Devaux.

On rappelle que les deux trinômes qui ont exposé lors de la séance du 7 octobre auront à expliciter en quoi la séance précédente leur a permis de modifier leurs praxéologies ou d'en créer de nouvelles.

1.2. Travail dirigé TICE

La prochaine séance de séminaire sera suivie d'une séance de TD consacrée à l'usage des TICE.
Les élèves professeurs concernés par cette séance sont ceux dont les noms suivent, auxquels s'ajouteront les élèves professeurs absents lors de la première séance.

Alexandra Devilers ; Bruno Michel ; Christophe Coupard ; Olivier Dumont ; Elodie Maysou ; Marion Rubin ; Patrick Azra-Rabilloud ; Arnaud;Combes ; Samuel Der Monsessian ; Nicolas Chekroun ; Raphaël Rigaud ; Florian Van Becelaere ; Hélène;Pujol ; Souaad;Benhadi ; Yanna Pons ; Hamdoune Lazrek ; Renaud Cortinovis ; Matthieu Bruno ; Fanny Devaux ; Laurent Petit ; Latifa Attafi.

1.3. Travail de TER : les compte rendus d'observation.
Développé oralement

2. Observation et analyse

2.1. Travail collectif dirigé à partir des travaux rendus (voir le fichier Travaux_OM.odt)

Secrétaires de séance : Élodie Maysou, David Félix, Hélène Derbesy, Samuel Der Monsessian

NB : on trouvera le ficher des travaux ainsi que les comptes rendus de séance qui ont permis de produire la synthèse ci-après sur Espar (dossier PCL2 2008-2009).

Cette synthèse sera reprise rapidement et développée lors de la prochaine séance de séminaire. On examinera notamment collectivement la question suivante, sur laquelle les participants sont invités à réfléchir :

Est-ce qu'on peut rendre disponible l'élément technologique « La courbe représentative d'une fonction du second degré admet pour axe de symétrie $x = a$, où a est l'abscisse du sommet de la parabole » dans le cadre du programme de seconde ?

Synthèse du travail collectif effectué

Outre la détermination de l'OM relative au type de tâches « déterminer le maximum d'une fonction du second degré », le travail a porté sur les techniques d'analyse de techniques et de technologies mathématiques.

On a notamment mis en évidence les points suivants.

À propos des techniques

① La ***technique*** doit être ***suffisamment détaillée*** pour qu'un individu ne sachant pas accomplir le type de tâches puisse le faire en suivant la description proposée. On arrête la description quand on arrive à des types de tâches considérés comme routiniers pour les élèves auxquels l'OM est destinée. Par exemple ici, la technique suivante est insuffisamment détaillée :

Une praxéologie possible est la suivante : nous pouvons exprimer l'aire du rectangle cherché en fonction de x, puis grâce à la calculatrice on peut imaginer tout un travail de lecture graphique pour déterminer le maximum de la fonction trouvée.

En effet, on ne sait pas de quel travail de lecture graphique à la calculatrice il s'agit ; de même, la technique suivante, pourtant bien plus explicite, est encore insuffisante :

À partir d'une expression adéquate donnée de la fonction, généralement sous forme canonique, conjecturer un majorant M de la fonction.
Montrer que pour tout x de l'ensemble de définition de f, on a $f(x) \leqslant M$ en étudiant le signe de la différence $f(x) - M$ (on montre que $f(x) - M \leqslant 0$. La fonction f étant sous forme canonique, la différence $f(x) - M$ est sous forme d'un carré donc son signe est plus facile à déterminer.
Montrer que ce majorant est atteint et est donc un maximum; autrement dit montrer qu'il existe un x_0 appartenant à l'ensemble de définition de la fonction tel que $f(x_0) = M$. Pour cela, on résout l'équation du second degré $f(x) = M$ en se servant de la forme adéquate de f; ce qui revient à résoudre une équation du type $(x - a)^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Il manque notamment la manière dont on va conjecturer un majorant et la manière dont la forme canonique va véritablement intervenir.

② Un autre aspect important de l'analyse des techniques consiste en l'examen de leur possibilité dans la classe considérée de deux points de vue : d'un côté, il s'agit de ***s'assurer que les types de tâches considérés comme routiniers***, bien connus, le sont effectivement (on dira alors qu'ils ***font partie du milieu***) ; d'un autre côté, on vérifiera que les ***éléments technologiques*** qui permettent de justifier et/ou de produire la technique sont ***effectivement au programme de la classe***, ou peuvent être rendus disponibles dans ce cadre. Ainsi par exemple, à propos de la technique précédente, peut-on se demander si la forme canonique figure au programme de la classe de seconde, ou encore si les élèves ont à savoir mettre une fonction du second degré sous forme canonique dans le cadre du programme de seconde. On notera à ce propos que la question des ressources, et notamment des ressources informatiques, est ici souvent importante. (Voir *infra*.)

À propos de technologie

③ Il faut mettre en évidence les éléments technologiques qui justifient et/ou permettent de produire la technique analysée dans ses composantes problématiques, et que l'on voit, dans la description de la technique, en quoi ces éléments ont effectivement une fonction technologique.

Ainsi, considérons le couple (τ, θ) suivant :

A partir de la forme canonique de la fonction qui est donnée, on montre que $f(x) \leq M$ sur un intervalle donné. On cherche en quel point le maximum M est atteint en résolvant l'équation $f(x) = M$ et en vérifiant que la ou les solutions trouvées appartiennent bien à l'intervalle de définition de la fonction *f*.

Éléments technologiques :
Définition du maximum d'une fonction : Dire que *f* atteint son maximum M en *a* sur l'intervalle I signifie que $f(x) \leq M$ pour tout *x* de I et $M = f(a)$.
Pour tout nombre réel *x*, $x^2 \geq 0$.
Pour tous nombres réels *x* et *y* , $x \geq y$ équivaut à $x - y \geq 0$.
Résolution de l'équation $(x + b)^2 = 0$, avec *b* un nombre réel.

On ne voit pas en quoi les 3 derniers éléments technologiques cités ont une fonction technologique par rapport à la technique énoncée, alors que la définition du maximum apparaît effectivement avoir une fonction de justification de la technique énoncée. (On notera que la technique ne dit pas comment déterminer M.)

À suivre...

2.2. La question de la modélisation

On poursuivra ici le travail d'analyse de l'OM à partir de l'étude amorcée lors de la dernière séance. On avait mis en évidence que le type de tâches « Déterminer le maximum d'une fonction du second degré » apparaît à la suite de la modélisation du problème posé, dont nous avions identifié deux étapes, géométrique et analytique. Examinons plus avant cette question de la modélisation.

On rappelle ci-dessous la situation qu'il s'agissait d'étudier :

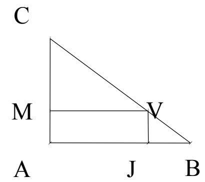
Un paysan possède un terrain qui a pour forme un triangle rectangle ABC, rectangle en A, avec AB = 4 km et AC = 3 km. Une nouvelle loi oblige notre paysan à travailler dans un champ de forme rectangulaire. Comme le paysan a construit sa grange contenant ses machines en A, il souhaite que A appartienne au champ. Enfin, pour des raisons économiques évidentes, notre paysan souhaite que son champ ait l'aire la plus grande possible. Pouvez-vous l'aider ?

La question de la détermination du maximum d'une fonction du second degré apparaît parce que l'on a à déterminer « l'aire la plus grande possible », soit la valeur maximale d'une grandeur, *a*, qui est ici une « grandeur produit », l'aire.

Le problème que l'on a à étudier apparaît donc comme un spécimen d'un type de tâches que l'on peut d'abord formuler ainsi :

Étant donné un système $\mathcal{S}$ et une grandeur a attachée à ce système, déterminer la valeur maximale prise par la grandeur a.

Le premier modèle effectué est matérialisé par le graphique suivant :



Il permet d'abord de mettre en évidence que la grandeur a est variable :

On peut par exemple, pour s'en convaincre, mesurer les longueurs AM et MV et effectuer leur produit. Une autre manière de faire est d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique – les deux techniques n'étant pas exclusives et pouvant être complémentaires.

On voit ensuite apparaître géométriquement, à partir du travail précédent, qu'une fois M fixé (ou V, ou encore J), ***tous les autres éléments sont fixés***. En d'autres termes, si l'on choisit le point M ***comme paramètre***, l'aire a est alors une fonction (inconnue) de $M \in [AC]$: $a = \varphi(M)$. Si l'on repère M sur [AC] par la distance $AM = x$, alors il existe une fonction f (dont l'expression nous est inconnue pour le moment) telle que $a = f(x)$.

Le type de tâches dont relève le problème soumis aux élèves peut alors être formulé ainsi :

Étant donné un système $\mathcal{S}$ et deux grandeurs ℓ et a attachées à ce système, telles que la seconde apparaisse comme dépendant – comme une *fonction* – de la première, déterminer la valeur de la grandeur ℓ pour laquelle la grandeur a prend une valeur maximale.

Et la technique peut se laisser analyser de la façon suivante :

En utilisant les propriétés du type de systèmes dont $\mathcal{S}$ est un spécimen, exprimer a en fonction de ℓ : $a = f(\ell)$; étudier alors le maximum de f sur l'ensemble des valeurs admissibles (possibles) de ℓ.

D'une manière générale, étant donné un système $\mathcal{S}_0$, qui peut être non mathématique (comme le champ du paysan, ci-dessus), pour produire des connaissances sur $\mathcal{S}_0$ on cherche à le « modéliser » par un système $\mathcal{S}_1$ ***mathématique*** – on parle alors de ***modélisation mathématique***. Il reste ensuite à « faire parler » $\mathcal{S}_1$, ce qu'on réalisera généralement par la construction d'une chaîne de modèles mathématiques $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, etc.

La problématique de la modélisation est clairement présente dans les programmes actuels. On citera ici ce passage du programme de 6^e^ entré en vigueur à la rentrée 2005 :

Les connaissances géométriques permettent de modéliser des situations (par exemple représenter un champ par un rectangle) et de résoudre ainsi des problèmes posés dans l'espace ordinaire. Les formes géométriques (figures planes, solides) se trouvent dans de nombreux domaines : architecture, œuvres d'art, éléments naturels, objets d'usage courant. Ces mises en relation permettent peu à peu de dégager le caractère universel des objets géométriques par rapport à leurs diverses réalisations naturelles ou artificielles.

Voici comment les notes du Séminaire 2004-2005 développaient cette question :

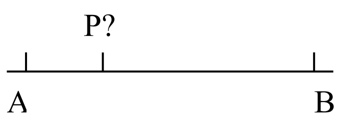
① Ce dernier développement insiste sur le fait que la géométrie est un outil de mathématisation, et plus exactement de… ***géométrisation***, c'est-à-dire de construction de ***modèles géométriques*** de ce que les textes examinés nomment des ***situations*** et que nous avons appelé plus des ***systèmes*** – le terme s'appliquant aussi bien à des entités mathématiques qu'à des réalités extramathématiques.

② D'une façon générale, le travail mathématique vise à rendre disponibles des outils de modélisation mathématique. Les systèmes de nombres et les calculs numériques, le calcul algébrique ainsi que le « calcul » sur les équations et inéquations, le calcul trigonométrique, le calcul vectoriel, le « calcul » des fonctions, le calcul des probabilités, etc., ont pour raison d'être essentielle le fait d'être des outils de modélisation mathématique – dont le rôle spécifique doit être chaque fois précisé –, c'est-à-dire des outils de ***construction de modèles*** et de ***travail*** de ces modèles – on les « travaille » pour les « faire parler ».

❶ Notons que, en beaucoup de cas, lorsque le système initial $\mathcal{S}_0$ est extramathématique, le premier modèle mathématique $\mathcal{S}_1$ est ***géométrique***. C'est ***ensuite*** que se déploient les outils numériques, algébriques, etc., afin de modéliser plus « efficacement » ce premier modèle. Un exemple historique de ce phénomène par ailleurs banal est fourni par un épisode qui prend place le 19 février 1795, lors de la quatrième leçon que Laplace (1749-1827) donne dans le cadre de l'éphémère École normale de l'an III en examinant le problème de physique suivant :

Deux lumières dont l'une [B] est quatre fois plus intense que l'autre [A], étant séparées par un intervalle de trois pieds, déterminer sur la droite qui les joint le point [P] qu'elles éclairent également.

Le premier modèle est ici un mixte de géométrie (voir le schéma ci-après) et de physique (la « force » de la lumière émise par une source décroît en $\frac{1}{x^2}$).



Ce premier modèle laisse place à un second modèle en forme d'équation : la droite (AB) étant munie d'un repère tel que $\overline{AB} = 3$, posons $x = \overline{AP}$; on a alors au point P cherché : $\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(3-x)^2}$. Le travail de ce modèle révèle l'existence non pas d'***une*** mais de ***deux*** solutions ! L'équation est en effet équivalente à $4x^2 - (3-x)^2 = 0$ et on a : $4x^2 - (3-x)^2 = 3(x-1)[x-(-3)]$. L'équation étudiée équivaut donc à $(x-1)[x-(-3)] = 0$: elle a ainsi deux solutions, l'une positive ($x = 1$) et qui correspond à un point P situé ***entre*** les deux lumières – ce à quoi l'on s'attendait –, l'autre ***négative*** ($x = -3$), et qui correspond au point P' symétrique de B par rapport à A – un point dont on aurait pu tout aussi bien, sans le secours de l'algèbre, ignorer l'existence, comme le souligne Laplace dans un bref panégyrique de l'outillage algébrique :

Ces solutions inattendues nous prouvent la richesse de la langue algébrique, à la généralité de laquelle rien n'échappe quand on la sait bien lire.

Deux générations avant Laplace, pourtant, on tenait encore les solutions négatives pour absurdes !

❷ Lorsque le système à propos duquel on s'interroge est déjà mathématique, la modélisation ne passe pas nécessairement par la géométrie. (...)

Pour terminer provisoirement sur cette question, il reste à déterminer si les types de tâches de modélisation font partie de l'organisation mathématique ou de l'organisation de l'étude. Si on ne peut pas véritablement le voir du point de vue de la séquence dont fait partie la séance observée, on peut en revanche examiner ce qui pourrait ou devrait exister. Nous nous y attacherons la semaine prochaine.

3. Forum des questions

Nous reprendrons d'abord rapidement les deux dernières questions de la séance précédente, que nous compléterons par l'étude de deux questions posées la dernière semaine d'étude.

*Ordre et intervalle en 2^de^*

Pour l'étude du thème « Ordre et intervalles », mon PCP me conseille une activité du type :
Remplir le tableau

a	*b*	Représentation de *a* et *b*	ordre de *a* et *b*	*a* – *b*
...	...	...	...	...

Les premiers couples (a ; b) pouvant être ordonnés avec le travail fait en collège, les derniers nécessitant le calcul de $a - b$. Qu'en pensez-vous ? Je ne vois pas mieux.
b) Pour le même thème, comparer deux expressions littérales est-il enjeu de l'étude ? Même question pour :
* déterminer un encadrement de $f(x)$, en en connaissant un de x,
* donner la solution d'une inéquation sous forme d'intervalle.

(7, 2^de^)

1. On reprendra d'abord le programme de seconde sur le domaine *Calcul et fonctions*.

Objectifs :
– Approfondir la connaissance des différents types de nombres.
– Expliciter, sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction.
– Étudier quelques fonctions de références, préparant à l'analyse.
– Progresser dans la maîtrise du calcul algébrique, sans recherche de technicité, toujours dans la perspective de résolution de problèmes ou de démonstration.
– Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques.
La plupart de ces objectifs concernent les trois années de lycée.
Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions. Comme la géométrie, les activités de calcul doivent être l'occasion de développer le raisonnement et l'activité de démonstration.
Lors de la résolution de problèmes, on dégagera, pour certains exemples étudiés, les différentes phases du traitement : mathématisation et mise en équation, résolution, contrôle de la cohérence des résultats et exploitation.
On exploitera les possibilités offertes par les tableurs, par les grapheurs et par les logiciels de géométrie.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Nature et écriture des nombres. Notations **N**, **Z**, **D**, **Q**, **R**. Représentation des nombres dans une calculatrice. Nombres premiers.	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter un résultat donné par une calculatrice. Organiser un calcul à la main ou à la machine. **D**écomposer un entier en produit de nombres premiers.	On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. On travaillera sur les ordres de grandeur. On donnera un ou deux exemples de limites d'utilisation d'une calculatrice. On fera quelques manipulations de nombres en écriture scientifique. On se limitera à des exemples (du type 56×67) pour lesquels la connaissance des tables de multiplication suffit.
Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre.	Choisir un critère adapté pour comparer des nombres. Comparer a, a^2 et a^3 lorsque a est positif. Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter.	La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres.
Fonctions		On étudiera des situations issues, entre autres, de la géométrie, de la physique, de l'actualité ou de problèmes historiques. On réfléchira sur les expressions *être fonction de* et *dépendre de* dans le langage courant et en mathématiques. On donnera des exemples de dépendance non fonctionnelle (poids et taille, note au bac et moyenne de l'année).
	Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule.	Les fonctions abordées ici sont généralement des « fonctions numériques d'une variable réelle » pour lesquelles l'ensemble de définition est donné. On pourra voir quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou même de fonctions à deux variables (aire en fonction des dimensions). L'utilisation de calculatrices ou d'ordinateurs amènera à considérer une fonction comme un dispositif capable de produire une valeur numérique quand on introduit un nombre (c'est-à-dire comme une « boîte noire »).
	Déterminer, dans chacun des cas, l'image d'un nombre.	Les notations $f(x)$, déjà introduite au collège, et f seront systématiquement utilisées. Il importe d'être progressif dans l'utilisation de ces écritures : le passage du nombre $f(x)$ à l'objet mathématique « fonction » noté f est difficile et demande un temps de maturation individuelle qui peut dépasser la classe de 2de.
Étude qualitative de fonctions. Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec un	S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. La perception sur un graphique de

	tableau de variation.	symétries ou de périodicité pourra conduire à une formulation analytique de ces propriétés. On soulignera le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante renverse l'ordre ; une définition formelle est ici attendue.
Premières fonctions de référence.	Établir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 1/x$.	D'autres fonctions telles que $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \|x\|$… pourront être découvertes à l'occasion de problèmes. Les résultats les concernant pourront être admis. Les positions relatives des diverses courbes ainsi découvertes seront observées et admises.
	Connaître la représentation graphique de $x \mapsto \sin x$ et de $x \mapsto \cos x$.	La définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour un réel x quelconque se fera en “enroulant **R**” sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de 30°, 45° et 60°.
Fonctions linéaires et fonctions affines.	Caractériser les fonctions affines par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable.	Exemples de non-linéarité. En particulier, on fera remarquer que les fonctions carré, inverse, … ne sont pas linéaires.
Fonctions et formules algébriques.	Reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés). Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule. Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…). Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi.	Les activités de calcul doivent être l'occasion de raisonner et de démontrer. On évitera une activité trop mécanique et on s'efforcera de développer, avec des expressions littérales faisant intervenir une seule lettre, deux plus rarement, des stratégies s'appuyant sur l'observation, l'anticipation et l'intelligence du calcul. On multipliera les approches et on explicitera quelques procédures simples permettant d'infirmer ou de confirmer une formule. À l'occasion de certains travaux sur tableur, on distinguera la recherche et l'observation d'une loi empirique de la démonstration d'une formule. Des activités liées aux fonctions, aux équations ou aux inéquations mettront en valeur l'information donnée par la forme d'une expression et motiveront la recherche d'une écriture adaptée.
Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations.	Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction. Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type : $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$;	Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problème conduisant à une

	$f(x) < g(x)$; …	équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées.

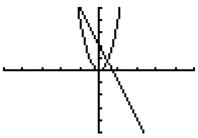
La présentation du domaine explicite assez clairement que les chapitres du secteur du calcul doit trouver sa raison d'être dans le secteur des fonctions. À quoi peut donc servir l'ordre des nombres dans le travail sur les fonctions ? Telle est la question que l'on peut s'efforcer d'examiner.

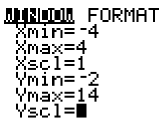
2. L'ordre apparaît bien entendu lié à la question des inéquations. Considérons ainsi le commentaire que nous avons surligné en bleu précédemment :

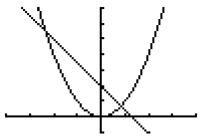
On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives.

Il semble suggérer la technique suivante :

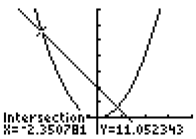
Soit à résoudre l'inéquation $2\,x^2+3\,x-4 \leqslant 0$. Elle est équivalente à l'inéquation $2\,x^2 \leqslant -3\,x+4$. La représentation graphique de ces deux fonctions de références donne d'une part une parabole tournée « vers le haut » de sommet (0, 0) et d'autre part une fonction affine décroissante dont l'ordonnée à l'origine est 4 ; on aura ainsi la parabole en dessous de la droite entre les points d'intersection, soit entre les solutions de l'équation $2\,x^2+3\,x-4 \leqslant 0$ comme en témoigne les représentations graphiques suivantes obtenue avec une calculatrice TI-82, d'abord sur la fenêtre classique [-10 ; 10] ·[-10 ; 10], puis sur une fenêtre plus adaptée.

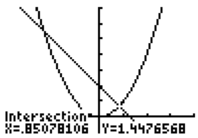






La calculatrice fournit des valeurs approchées des points d'intersection (voir ci-dessous), que l'on pourrait vouloir contrôler avant de faire confiance à la calculatrice dans l'établissement de résultats expérimentaux.





On sera alors amené à comparer deux nombres, donnés comme deux images d'un même nombre par deux fonctions. La question du critère de comparaison va être amenée en jouant sur les ensembles de nombres auxquels les images appartiennent : il est en effet d'une part peu commode de comparer, sur la table de la calculatrice, des nombres qui ont plusieurs chiffres de leur écriture décimale égaux alors qu'il est bien plus aisé d'y repérer un 0 ; d'autre part, la technique de la différence est plus performante à la calculatrice compte tenu notamment du fait que celle-ci travaille avec davantage de chiffres qu'elle n'en affiche.

Exemples

On voit de même surgir la question de la notation de l'ensemble des solutions à partir du moment où l'on accomplit « souvent » le type de tâches de résolution d'inéquations : en effet, la périphrase « x est compris entre x_1 et x_2, x_1 et x_2 compris » qui s'avère lourde à écrire sera remplacée par $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ puis par $x \in [x_1\,;\,x_2]$.

3. Ces types de tâches d'encadrement et de détermination d'intervalle(s) trouveront également une raison d'être dans la représentation graphique des fonctions à la calculatrice, notamment dans la justification de la détermination de la fenêtre de représentation graphique, ou encore dans la détermination des variations d'une fonction. C'est ainsi dans le cadre du travail sur les fonctions que ces notions d'ordre et d'intervalle seront particulièrement utiles : c'est donc au sein de ce travail qu'il faudra les faire apparaître. On aura alors une synthèse « ordre et intervalle », dont la matière

aura émergé des travaux sur les fonctions. On retrouve un phénomène déjà signalé : l'écriture séquentielle du programme n'est pas un ordre d'exposition ; il faut dégager les liens fonctionnels entre les différents morceaux pour pouvoir créer une séquentialité qui tienne compte des besoins et des raisons d'être des différents thèmes d'étude.

On complétera ce travail par l'examen de la question suivante, qui a trait également à la question de l'ordre en classe de seconde :

Dans le programme de seconde : « la valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres ». Il n'est pas question des inéquations du type $\lvert x-a\rvert < r$ ou des équations $\lvert x-a\rvert = r$. Ces inéquations sont-elles hors programme ou peut-on les considérer comme des façons de « caractériser les éléments d'un intervalle » ? (8, 2^{de} & 1^{re} STG))

Nous rappelons ici rapidement ce que nous avons déjà signalé lors de la séance 4 :

Deux aspects doivent être soulignés.
a) Lorsqu'on veut calculer la distance de deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) de $\mathbb{R}^2$, on utilise l'expression $\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$. L'application $((x_0, y_0), (x_1, y_1)) \mapsto d_2((x_0, y_0), (x_1, y_1))$ où $d_2((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ est une ***distance*** sur $\mathbb{R}^2$ qui dérive d'une ***norme***, à savoir $(x, y) \mapsto \lVert(x, y)\rVert = \sqrt{x^2+y^2}$. On peut donc écrire : $d_2((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \lVert(x_0, y_0) - (x_1, y_1)\rVert$. On retrouve ainsi, dans le cas du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ le cas général de la distance dans un espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$. Ce que propose alors le programme de 2^{de} – l'ancien comme l'actuel –, c'est d'appliquer ce même schéma à $\mathbb{R}$: on présente d'abord la ***norme***, qui est ici la ***valeur absolue***, soit l'application $x \mapsto \lvert x\rvert$, d'où l'on fait découler la ***distance*** $d_1(x_0, x_1) = \lvert x_0 - x_1\rvert$. En d'autres termes, utilisant la propriété de la distance sur $\mathbb{R}$ d'être ***invariante par translation***, on définit la distance de x à y comme la distance de $x - y$ à 0.
b) Dans une classe de 2^{de}, la construction de l'organisation mathématique correspondante doit suivre la même route, mais ***en sens inverse***, c'est-à-dire en partant du ***problème du calcul de la distance de deux réels***.
(...)

4. En résumé, la valeur absolue peut être regardée comme une notation introduite, à titre d'abréviation, par une définition à partir de notations déjà connues : les points M et N ayant pour abscisse respectivement x et y on a MN = $\sqrt{(x-y)^2}$. Pour simplifier, on pose :

$$\sqrt{(x-y)^2} = \lvert x-y\rvert$$

en sorte qu'on aura : MN = $\lvert x - y\rvert$. Bien entendu, il s'agit là d'un symbole qu'il conviendra apprendre à manipuler. Par exemple, les élèves devront savoir que la distance entre le point d'abscisse -3 et le point d'abscisse x vaut $\lvert x - (-3)\rvert = \lvert x + 3\rvert$. Ils pourront aussi apprendre à regarder une expression telle que $\lvert 2x + 10\rvert$ comme désignant le double de la distance du point d'abscisse x au point d'abscisse –5 : $\lvert 2x + 10\rvert = 2\lvert x + 5\rvert = 2\lvert x - (-5)\rvert$. C'est à cela que se limite le programme officiel quant au maniement de la valeur absolue…
(...)

Il reste à motiver le travail entrepris. L'observation d'un ouvrage du secondaire (Collection Repères, édition 2004) permet d'obtenir d'abord la situation suivante (exercice 84 page 53).

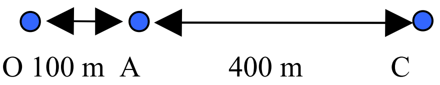
84 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations :

1. $|x-1| \leqslant 3$. **2.** $|x-5| \leqslant 2$.

3. Camille et Aurélien habitent la même rue à 400 m l'un de l'autre. Les parents d'Aurélien lui demandent de ne pas s'éloigner de plus de 300 m de la maison. Ceux de Camille demandent de ne pas s'éloigner de plus de 200 m.

On représente la rue par une droite graduée de repère $(O\,;A)$ (unité : 100 m). La maison d'Aurélien est en A et celle de Camille en C, avec $A \in [OC]$.

Déterminer la position de la rue où Aurélien et Camille peuvent jouer ensemble sans désobéir à leurs parents. (Utiliser les questions **1.** et **2.**)



Soit M un point où ils peuvent jouer ensemble. On doit avoir MA ≤ 300 m et MC ≤ 200 m. [On voit que le point O introduit dans l'énoncé ne sert à rien.]

Pour simplifier la modélisation , prenons A comme origine du repère.

Si x est l'abscisse de M on a alors $|x| \leq 300$ m et $|x - 400 \text{ m}| \leq 200$ m, soit $x \in [-300 \text{ m}\,;\,300 \text{ m}]$ et $x \in [200 \text{ m}\,;\,600 \text{ m}]$, soit encore $x \in [200 \text{ m}\,;\,300 \text{ m}]$, ou encore $|x - 250 \text{ m}| < 50$ m.

C'est la situation que l'on étudie ainsi qui conduit à introduire les équations $|x-a| < r$. Elle ne sont pas « hors programme » mais, à l'instar de la notion de valeur absolue, en classe de seconde, elles doivent être vue comme un ***moyen pour étudier*** , un ***outil d'étude***, et non comme une ***fin en soi***, un ***objet d'étude***. C'est ce que souligne le document d'accompagnement du programme de la classe :

Aucune étude particulière n'est demandée. Cette notation sera présentée essentiellement pour exprimer la distance entre deux points.

On n'aura donc pas à étudier des équations ou des inéquations du type cité en dehors de problèmes de distance et la première question du problème précédent n'aura pas lieu d'être.

TICE

Comment utiliser les séances en salle informatique pour valider des compétences B2i ? Par exemple lors d'une séance Geogebra sur Thalès en quatrième. Comment concrétiser dans la notation et la validation d'une année la validation des compétences ? (7, 4^e)
Si suite à une séance informatique, on se rend compte que les élèves ont du mal avec l'outil informatique, peut-on faire une séance de « mise à niveau » sur une activité très simple pour leur faire découvrir un logiciel de mathématiques ? (7, 5^e)

Comme on l'a déjà dit dans le séminaire, il s'agit de fonctionnaliser l'informatique dans l'étude des mathématiques qui figurent au programme : ce sont les types de tâches mathématiques qui donnent leur raison d'être aux types de tâches informatiques. C'est ce qui figure dans les programmes, par exemple dans l'introduction générale pour le collège :

Le travail en classe proprement dit doit être complété par des séances régulières en salle informatique où l'élève utilise lui-même les logiciels au programme (tableur, grapheur, logiciel de géométrie). Ces séances de travaux pratiques sur ordinateur doivent toujours avoir pour objectif l'appropriation et la résolution d'un problème mathématique. Tout travail en salle informatique doit aboutir à la production d'un écrit, manuscrit ou imprimé.

Un texte de l'IGEN[13] de mathématiques résume ainsi l'objet du travail à mener :

Par ses spécificités, l'outil informatique complète les moyens à la disposition des enseignants et des élèves pour mettre en œuvre ces différents aspects d'une véritable activité mathématique.
En effet, il permet notamment :
• d'obtenir rapidement une représentation d'un problème, d'un concept afin de lui donner du sens et de favoriser son appropriation par l'élève ;
• de relier différents aspects (algébrique, géométrique, ...) d'un même concept ou d'une même situation ;
• d'explorer des situations en faisant apparaître de façon dynamique différentes configurations ;
• d'émettre des conjectures à partir d'une expérimentation interactive lors de l'étude d'un problème comportant des questions ouvertes ou d'une certaine complexité, et de procéder à des premières vérifications ;
• de se consacrer à la résolution de problèmes issus de situations courantes, alors que les calculs sont longs ou complexes ;
• de procéder rapidement à la vérification de certains résultats obtenus.

Comme on l'a déjà signalé, on pourra préparer les séances informatiques en demi-groupes par des séances en classe entière qui permettront de rassembler la classe autour d'un point moyen et on portera attention à la question des traces écrites, comme on l'a vu faire partiellement par le professeur de 5e observé : à l'instar des autres techniques, les techniques « à informatique » doivent trouver leur place dans la synthèse.

On trouve la même problématique, de manière sans doute moins explicite, dans la circulaire publiée au JO du 27 juin 2006 sur la mise en place du B2i collège (les mêmes notations valent pour le lycée) :

Les compétences à acquérir pour la maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication résultent d'une combinaison de connaissances, de capacités et d'attitudes à mobiliser dans des situations concrètes.

Ils ajoutent :

L'évaluation des compétences du brevet informatique et internet collège fait l'objet d'un travail régulier tout au long des quatre années du collège. Tous les enseignants sont susceptibles de contribuer à la validation de ces compétences.

C'est ainsi « au long cours » que vont se mettre en place les différentes compétences attendues des élèves, et le professeur doit gérer cette temporalité, qui s'avère quelque peu différente de celle qui rythme l'étude thématique mais qui se rapproche de celle liée à un PER. La vision « séance par séance » est, là comme ailleurs, non pertinente. Il conviendra, comme pour le reste, d'identifier des praxéologies et d'évaluer, au travers des tâches effectuées, si la maîtrise en est suffisante ou encore partiellement déficiente.

Examinons par exemple la compétence 3 du B2i collège. Elle est déclinée en 7 compétences dans la feuille de position :

3 – Créer, produire, traiter, exploiter des données
3.1) Je sais modifier la mise en forme des caractères et des paragraphes, paginer automatiquement.
3.2) Je sais utiliser l'outil de recherche et de remplacement dans un document.

[13]IGEN = Inspection générale de l'éducation nationale.

3.3) Je sais regrouper dans un même document plusieurs éléments (texte, image, tableau, son, graphique, vidéo…).
3.4) Je sais créer, modifier une feuille de calcul, insérer une formule.
3.5) Je sais réaliser un graphique de type donné.
3.6) Je sais utiliser un outil de simulation (ou de modélisation) en étant conscient de ses limites.
3.7) Je sais traiter un fichier image ou son à l'aide d'un logiciel dédié notamment pour modifier ses propriétés élémentaires.

Le travail mené en classe de 4e et de 3e à propos de l'algèbre et de la statistique doit permettre au professeur de mathématiques de valider la compétence 4 :les types de tâches de cette praxéologie du tableur apparaîtront dans les techniques mathématiques. Et il faudra, au bout d'un certain temps, dans une séance de travail informatique, examiner si les élèves « savent » créer, modifier une feuille de calcul, insérer une formule. De même, la compétence 2 « utiliser l'outil de recherche et de remplacement dans un document » peut s'avérer très utile dans l'élaboration d'un tableau de données statistique. Supposons que l'on ait ainsi à étudier la série statistique suivante (des tailles d'élèves en centimètres), dont les valeurs sont séparées par un tiret (le signe –).

156 – 155 – 156 – 157 – 164 – 162 – 167 – 152 – 157 –
168 – 169 – 156 – 167 – 157 – 165 – 159 – 159 – 160 –
152 – 167 – 165 – 165 – 158 – 167 – 152 – 156 – 152 –
155 – 152 – 156 – 165 – 163 – 153 – 166 – 155 – 158 –
162 – 166 – 154 – 163 – 161 – 158 – 156 – 159 – 162 –
159 – 156 – 164 – 167 – 158 – 158 – 154 – 164 – 161 –
157 – 153 – 154 – 165 – 162 – 160 – 169 – 152 – 160 –
156 – 158 – 161 – 162 – 161 – 153 – 154 – 159 – 169 –
161 – 157 – 155 – 152 – 152 – 156 – 155 – 152 – 161 –
153 – 169 – 153 – 152 – 167 – 157 – 159 – 161 – 162 –
167 – 169 – 157 – 159 – 165 – 156 – 153 – 152 – 152 –
152

➔ Il est d'abord facile, sur les données précédentes, de déterminer l'effectif de la série : il y a 11 lignes comportant chacune 9 valeurs, plus une ligne ne comportant qu'une valeur : $11 \times 9 + 1 = 100$.

➔ Le logiciel utilisé permet une autre technique : on colle la série de valeurs dans un fichier vierge, et on demande de remplacer partout le tiret par lui-même : si n est l'effectif de la série, le logiciel va afficher $n - 1$ remplacements.

➔ La même technique permet de connaître l'***effectif*** de chacune des valeurs obtenues : en faisant remplacer 152 par 152, on trouve que l'effectif correspondant est de 13. Plus généralement, on obtient le tableau suivant.

Valeurs	**Effectifs**
152	13
153	6
154	4
155	5
156	10
157	7
158	6
159	7
160	3
161	7
162	6
163	2
164	4
165	6
166	2
167	7
168	1
169	5

La maîtrise de la praxéologie mathématique relative à la constitution d'un tableau des effectifs à partir d'une série brute supposera donc la maîtrise de la compétence informatique 3.4. C'est cela, notamment, qu'il faudra repérer et identifier.

À suivre

Les fonctions en seconde, encore

Je prépare mes séances sur les fonctions en classe de seconde. J'ai donc étudié le programme et j'ai rencontré une difficulté : il est précisé qu'il faut « identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule ». On ne peut définir une fonction par un tableau de données. Comment aborder cette manière de se donner une fonction le plus clairement possible ? (8, 2de)

Comme en de nombreuses occasions, une des clés de la difficulté signalée consiste à examiner les raisons d'être de la notion de fonction. Nous avons vu dans la première partie du Séminaire que l'une de ces raisons d'être consiste en la modélisation d'une grandeur « dépendante », soit une grandeur qui varie en fonction d'une autre. Considérons ainsi une grandeur variable en fonction du temps, une population de bactéries dans un milieu liquide par exemple. Ce que va donner la situation étudiée, ce n'est pas une expression algébrique de la grandeur considérée, mais un certain nombre des valeurs prises par la grandeur au cours du temps, un tableau de données donc : on ne sait de la fonction que ce que contient cette table de données. Bien entendu, une table de donnée seule ne caractérise pas une fonction, il faut lui adjoindre certaines connaissances : par exemple, on sait que la grandeur étudiée est une aire et qu'elle s'exprime comme une fonction du second degré d'une certaine longueur ; une table de valeurs contenant 3 points caractérise alors la fonction.

Synthèse

J'ai entendu parler d'un « fichier méthodologique » qu'on ferait remplir au fur et à mesure par les élèves (par exemple, chaque fois qu'on trouve une nouvelle méthode pour montrer qu'une droite est une bissectrice, on l'écrit, etc.) L'idée me plaît mais je ne sais pas comment le mettre en place : toutes les parties des cahiers sont utilisées et je ne me vois pas leur en demander un de plus. Je me dis qu'une feuille collée sur la couverture suffirait mais je m'attends aux problèmes posés par « les grosses écritures ». Comment font les professeurs qui l'utilisent ? (8, 6^{e} et 4^{e}) La synthèse doit-elle rester relativement succincte ou peut-on y inclure des exemples et petites applications même quand cela fait double emploi avec l'activité ? (8, 2de)

Faute de temps, l'étude de ces deux questions est reportée à la semaine prochaine, de même que le travail à propos de la notice ***Évaluation et notation***.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 9 : mardi 25 novembre 2008

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Observation et analyse // 2. Forum des questions // ~~3. Évaluation et notation~~

0. Questions de la semaine

Développé oralement.

1. Observation et analyse

1.1. Nous reprenons ici le travail sur l'analyse de l'organisation mathématique du compte rendu « modélisation et fonctions » amorcé depuis deux séances. On examinera d'abord la synthèse du travail figurant dans les notes de la séance précédente. On trouvera le ficher des travaux ainsi que les comptes rendus de séance qui ont permis de produire cette synthèse sur Espar (dossier PCL2 2008-2009).

Synthèse du travail collectif effectué

Outre la détermination de l'OM relative au type de tâches « déterminer le maximum d'une fonction du second degré », le travail a porté sur les techniques d'analyse de techniques et de technologies mathématiques.

On a notamment mis en évidence les points suivants.

À propos des techniques

① La ***technique*** doit être ***suffisamment détaillée*** pour qu'un individu ne sachant pas accomplir le type de tâches puisse le faire en suivant la description proposée. On arrête la description quand on arrive à des types de tâches considérés comme routiniers pour les élèves auxquels l'OM est destinée. Par exemple ici, la technique suivante est insuffisamment détaillée :

Une praxéologie possible est la suivante : nous pouvons exprimer l'aire du rectangle cherché en fonction de x, puis grâce à la calculatrice on peut imaginer tout un travail de lecture graphique pour déterminer le maximum de la fonction trouvée.

En effet, on ne sait pas de quel travail de lecture graphique à la calculatrice il s'agit ; de même, la technique suivante, pourtant bien plus explicite, est encore insuffisante :

À partir d'une expression adéquate donnée de la fonction, généralement sous forme canonique, conjecturer un majorant M de la fonction.

Montrer que pour tout x de l'ensemble de définition de f, on a $f(x) \leqslant M$ en étudiant le signe de la différence $f(x) - M$ (on montre que $f(x) - M \leqslant 0$. La fonction f étant sous forme canonique, la différence $f(x) - M$ est sous forme d'un carré donc son signe est plus facile à déterminer.
Montrer que ce majorant est atteint et est donc un maximum; autrement dit montrer qu'il existe un x_0 appartenant à l'ensemble de définition de la fonction tel que $f(x_0) = M$. Pour cela, on résout l'équation du second degré $f(x) = M$ en se servant de la forme adéquate de f; ce qui revient à résoudre une équation du type $(x - a)^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Il manque notamment la manière dont on va conjecturer un majorant et la manière dont la forme canonique va véritablement intervenir.

② Un autre aspect important de l'analyse des techniques consiste en l'examen de leur possibilité dans la classe considérée de deux points de vue : d'un côté, il s'agit de ***s'assurer que les types de tâches considérés comme routiniers***, bien connus, le sont effectivement (on dira alors qu'ils ***font partie du milieu***) ; d'un autre côté, on vérifiera que les ***éléments technologiques*** qui permettent de justifier et/ou de produire la technique sont ***effectivement au programme de la classe***, ou peuvent être rendus disponibles dans ce cadre. Ainsi par exemple, à propos de la technique précédente, peut-on se demander si la forme canonique figure au programme de la classe de seconde, ou encore si les élèves ont à savoir mettre une fonction du second degré sous forme canonique dans le cadre du programme de seconde. On notera à ce propos que la question des ressources, et notamment des ressources informatiques, est ici souvent importante. (Voir *infra*.)

À propos de technologie

③ Il faut mettre en évidence les éléments technologiques qui justifient et/ou permettent de produire la technique analysée dans ses composantes problématiques, et que l'on voit, dans la description de la technique, en quoi ces éléments ont effectivement une fonction technologique.

Ainsi, considérons le couple (τ, θ) suivant :

A partir de la forme canonique de la fonction qui est donnée, on montre que $f(x) \leqslant M$ sur un intervalle donné. On cherche en quel point le maximum M est atteint en résolvant l'équation $f(x) = M$ et en vérifiant que la ou les solutions trouvées appartiennent bien à l'intervalle de définition de la fonction f.

Éléments technologiques :
Définition du maximum d'une fonction : Dire que f atteint son maximum M en a sur l'intervalle I signifie que $f(x) \leqslant M$ pour tout x de I et $M = f(a)$.
Pour tout nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$.
Pour tous nombres réels x et y, $x \geqslant y$ équivaut à $x - y \geqslant 0$.
Résolution de l'équation $(x^2 + b) = 0$, avec b un nombre réel.

On ne voit pas en quoi les trois derniers éléments technologiques cités ont une fonction technologique par rapport à la technique énoncée, alors que la définition du maximum apparaît effectivement avoir une fonction de justification de la technique énoncée. (On notera que la technique ne dit pas comment déterminer M.)

On développera d'abord cette synthèse en donnant des techniques relatives au type de tâches T « Déterminer le maximum d'une fonction du second degré »n techniques qui ont émergé du travail effectué et que nous développerons.

Voici une première technique qui a émergé du travail effectué :

Si la fonction est donnée sous la forme $f(x)=a(x-d)^2+e$ et que a est négatif, $a(x-d)^2 \leqslant 0$ et on a que $f(x) \leqslant e$, soit que le maximum est e atteint en $x=d$.

Elle repose sur le fait que la fonction carrée est positive sur $\mathbb{R}$ et sur la définition d'un maximum. On a vu qu'elle posait le problème du cas où a est positif, qui ne peut pas être traité simplement de façon algébrique.

On peut alors modifier la technique pour utiliser davantage les ressources de la théorie des fonctions : on étudie les variations de la fonction f sur son intervalle de définition.

La fonction qui à x associe $(x-d)^2$ étant décroissante pour $x \leqslant d$ et croissante pour $x \geqslant d$, on peut en déduire les variations de la fonction f sur chacun de ces deux intervalles. On écrit alors les inégalités que vérifie la fonction sur les intervalles où elle est croissante et décroissante ce qui permet d'obtenir la valeur du maximum.

Cette technique repose alors sur la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction, sur le sens de variation de la fonction carrée, sur la définition d'un maximum

La voici mise en œuvre sur le spécimen étudié dans le compte rendu : $f(x)=\left(-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+3$.

La fonction qui à x associe $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ est décroissante pour $x \leqslant \frac{3}{2}$ et croissante pour $x \geqslant \frac{3}{2}$: on obtient donc pour $x \geqslant x' \geqslant \frac{3}{2}$, $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \geqslant \left(x'-\frac{3}{2}\right)^2$, soit encore $\left(-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \leqslant \left(-\frac{4}{3}\right)\left(x'-\frac{3}{2}\right)^2$ et finalement $\left(-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+3 \leqslant \left(-\frac{4}{3}\right)\left(x'-\frac{3}{2}\right)^2+3$ soit $f(x) \leqslant f(x')$ et f est décroissante pour $x \leqslant \frac{3}{2}$.

La fonction qui à x associe $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ étant décroissante pour $x \leqslant \frac{3}{2}$, on obtient pour $\frac{3}{2} \geqslant x \geqslant x'$, $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \leqslant \left(x'-\frac{3}{2}\right)^2$, soit encore $\left(-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \geqslant \left(-\frac{4}{3}\right)\left(x'-\frac{3}{2}\right)^2$ et finalement $\left(-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+3 \geqslant \left(-\frac{4}{3}\right)\left(x'-\frac{3}{2}\right)^2+3$ soit $f(x) \geqslant f(x')$ et f est croissante pour $x \leqslant \frac{3}{2}$.

On obtient donc, par la croissance de f sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right]$, que $f(x) \leqslant f\left(\frac{3}{2}\right)$ pour x appartenant à cet intervalle, puis par la décroissance de f sur $\left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$, $f(x) \leqslant f\left(\frac{3}{2}\right)$ pour x appartenant à cet intervalle. On a donc finalement, comme $f\left(\frac{3}{2}\right)=3$, que $f(x) \leqslant 3$ pour tout x réel et que donc la fonction f admet 3 comme maximum.

On peut développer la technique précédente pour traiter le cas où la fonction n'est pas donnée sous forme canonique :

Si la fonction n'est pas donnée sous la forme précédente,
déterminer à la calculatrice la valeur numérique du maximum ;

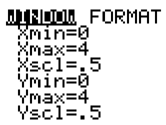
Pour cela, on représentera graphiquement la fonction, et on conjecturera la valeur du maximum, *e*, et la valeur en laquelle il est atteint, *d* ; on vérifiera à l'aide d'une table de valeurs de la fonction : la valeur *d* est obtenue comme le milieu de deux valeurs qui ont la même image par *f* et *e* = *f*(*d*).

écrire que $f(x)=a(x-d)^2+e$, où a est le coefficient du terme en x^2 et le vérifier en développant l'expression $a(x-d)^2+e$.

Déterminer le maximum de la fonction *f* à l'aide de la technique précédente.

Voici ce qu'on obtient avec le spécimen étudié : $f(x)=4x\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)x\right)$

Représentation graphique de la fonction :



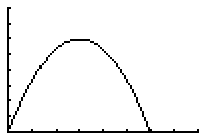
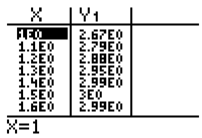


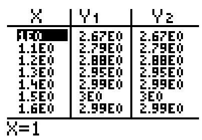
Table numérique :



X	Y1
1E0	2.67E0
1.1E0	2.79E0
1.2E0	2.88E0
1.3E0	2.95E0
1.4E0	2.99E0
1.5E0	3E0
1.6E0	2.99E0

X=1

Le maximum est obtenu en 1,5 et vaut 3. la fonction se met donc sous la forme $f(x)=\left(-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+3$, ce que l'on vérifie en tabulant les deux fonctions



X	Y1	Y2
1E0	2.67E0	2.67E0
1.1E0	2.79E0	2.79E0
1.2E0	2.88E0	2.88E0
1.3E0	2.95E0	2.95E0
1.4E0	2.99E0	2.99E0
1.5E0	3E0	3E0
1.6E0	2.99E0	2.99E0

X=1

et que l'on déduit de la TFD[14] en développant les deux expressions :

$$\left(-\frac{4}{3}\right)\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+3=\left(-\frac{4}{3}\right)x^2+4x-3+3=\left(-\frac{4}{3}\right)x^2+4x.$$

$$4x\left(1-\left(\frac{x}{3}\right)\right)=4x-\frac{4}{3}x^2$$

Outre les ingrédients technologiques précédemment cités, on peut ajouter que le maximum est l'ordonnée du point le plus haut et que la courbe d'une fonction du second degré est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=d$, où *d* est l'abscisse du sommet de la parabole.

On examinera maintenant collectivement la question suivante, sur laquelle les participants étaient invités à réfléchir :
Est-ce qu'on peut rendre disponible l'élément technologique « la courbe représentative d'une fonction du second degré admet pour axe de symétrie $x=a$, où a est l'abscisse du sommet de la parabole » dans le cadre du programme de seconde ?

[14] TFD = théorie fonctionnelle disponible.

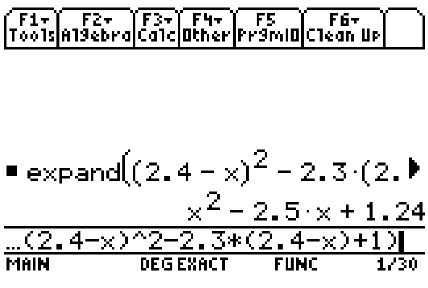
Un passage du commentaire relatif au thème intitulé « Étude qualitative de fonctions » indique ceci : « La perception sur un graphique de symétries ou de périodicité ***pourra***[15] conduire à une formulation analytique de ces propriétés. » La même terminologie est usitée en classe de première S, dont un commentaire précise : « On justifiera les symétries observées sur les représentations graphiques. » La différence entre les deux classes est que, en seconde, le fait qu'une courbe représentative apparaisse symétrique ***pourra*** donner lieu à une « formulation analytique », tandis qu'en première S, il ***faudra*** établir la symétrie analytiquement. Voyons donc ce que cela suppose dans le cas d'une fonction du second degré.

Exprimons le fait que la courbe représentative de la fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = d$. Les abscisses x et x' sont symétriques par rapport à d si $\frac{x+x'}{2} = d$, c'est-à-dire si $x' = 2d - x$. Pour que la courbe soit symétrique, il est donc nécessaire et suffisant que l'on ait toujours $f(2d - x) = f(x)$, soit ici $f(3 - x) = f(x)$[16].
Le calcul de $f(3-x)$ donne :
$4(3-x)\left(1-\frac{3-x}{3}\right) = 4(3-x)\left(1-\left(1-\frac{x}{3}\right)\right) = 4(3-x)\left(\frac{x}{3}\right) = 4x\left(1-\frac{x}{3}\right)$ et on a bien la symétrie cherchée.

Ce petit travail algébrique est bien à la portée des élèves, même si le résultat général n'a pas à être enregistré dans la TFD (théorie fonctionnelle disponible).

En voici un autre exemple, issu des *Archives du Séminaire :*

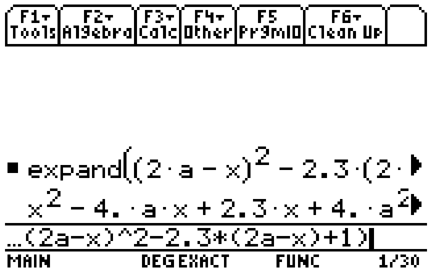
Considérons par exemple l'application $x \mapsto f(x) = x^2 - 2{,}3x + 1$. L'examen de la courbe représentative obtenue à l'écran d'une calculatrice graphique laisse penser à une symétrie par rapport à un axe « vertical », d'équation $x = a$. On suppose que la conjecture surgit, dans l'AER conduite en telle classe de seconde, que l'on pourrait bien avoir $a = 1{,}2$. Comment s'exprime analytiquement la symétrie supposée ? Les abscisses x et x' sont symétriques par rapport à a si $\frac{x+x'}{2} = a$, c'est-à-dire si $x' = 2a - x$. Pour que la courbe soit symétrique, il est donc nécessaire et suffisant que l'on ait toujours $f(2a - x) = f(x)$, soit ici $f(2{,}4 - x) = f(x)$. Or on a ceci :

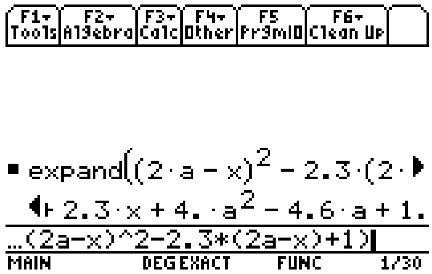


L'égalité n'est vraie que si $x^2 - 2{,}5x + 1{,}24 = x^2 - 2{,}3x + 1$, soit si $0{,}2x = 0{,}24$ et donc si $x = 1{,}2$, ce qui était évident sur l'écriture $f(2{,}4 - x) = f(x)$! Déception…

3) Pour en avoir le cœur net, on peut songer à résoudre en a l'équation $f(2a - x) = f(x)$, pour x donné ; on a d'abord ceci :

[15]. C'est nous qui soulignons.
[16]Une autre formulation a été proposée en séance : $f(d-x) = f(d+x)$; elle s'avère pertinente dans le cas où la fonction est donnée par sa forme canonique, et engendre davantage de calculs sinon.





On aurait ainsi : $f(2a - x) = x^2 - (4a - 2{,}3)x + 4a^2 - 4{,}6a + 1$. L'égalité $f(2a - x) = f(x)$, soit

$$x^2 - (4a - 2{,}3)x + 4a^2 - 4{,}6a + 1 = x^2 - 2{,}3x + 1$$

se récrit donc : $(4a - 4{,}6)a = (4a - 4{,}6)x$. On voit que l'égalité est vraie pour tout x si, et seulement si, $4a - 4{,}6 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = \dfrac{4{,}6}{4} = \dfrac{2{,}3}{2} = 1{,}15$.

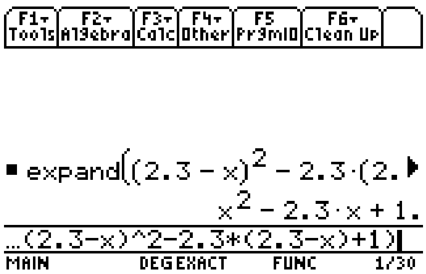
4) On arrive ainsi à une nouvelle conjecture que l'on devra vérifier soigneusement, en conduisant le calcul par exemple ainsi :

$f(2{,}3 - x) = (2{,}3 - x)^2 - 2{,}3(2{,}3 - x) + 1 = (2{,}3 - x)[(2{,}3 - x) - 2{,}3] + 1 = (x - 2{,}3)x + 1 = x^2 - 2{,}3x + 1$.

On peut multiplier les voies de calcul ; en posant $x' = 2{,}3 - x$ et en notant que $x + x' = 2{,}3$, on a par exemple :

$f(2{,}3 - x) - f(x) = f(x') - f(x) = x'^2 - x^2 - 2{,}3(x' - x) = (x' - x)[(x' + x) - 2{,}3] = 0$.

La conclusion semble sûre ; mais on la vérifiera tout de même à l'aide de la calculatrice.



NB : les vérifications « formelles » peuvent être remplacées par des vérifications utilisant les tables de valeurs des fonctions.

2. Forum des questions

Synthèse

J'ai entendu parler d'un « fichier méthodologique » qu'on ferait remplir au fur et à mesure par les élèves (par exemple, chaque fois qu'on trouve une nouvelle méthode pour montrer qu'une droite est une bissectrice, on l'écrit, etc.) L'idée me plaît mais je ne sais pas comment le mettre en place : toutes les parties des cahiers sont utilisées et je ne me vois pas leur en demander un de plus. Je me dis qu'une feuille collée sur la couverture suffirait mais je m'attends aux problèmes posés par « les grosses écritures ». Comment font les professeurs qui l'utilisent ? (8, 6e et 4e) La synthèse doit-elle rester relativement succincte ou peut-on y inclure des exemples et petites applications même quand cela fait double emploi avec l'activité ? (8, 2de)

1. Rappelons ici ce que nous avons déjà noté à propos de la synthèse ou encore du moment d'institutionnalisation qu'elle réalise.

Voici d'abord un extrait de l'introduction du programme du collège :

Pour être efficaces, les connaissances doivent être identifiées, nommées et progressivement détachées de leur contexte d'apprentissage. D'une part, toute activité (qui peut s'étendre sur plusieurs séances) doit être complétée par une synthèse. Celle-ci doit porter sur les quelques notions mises en évidence (définitions, résultats, théorèmes et outils de base) que, désormais, les élèves doivent connaître et peuvent utiliser. Elle est aussi l'occasion de dégager les méthodes de résolution de problèmes qui mettent en œuvre ces notions. Il convient, en effet, de préciser à chaque étape de l'apprentissage quelles connaissances sont désormais en place et donc directement utilisables. D'autre part, il est nécessaire de proposer des situations d'étude dont le but est de coordonner des acquisitions diverses. Dans cette optique, l'enseignant réalise, avec les élèves, des synthèses plus globales, à l'issue d'une période d'étude et propose des problèmes dont la résolution nécessite l'utilisation de plusieurs connaissances. Le traitement de ces problèmes permet de souligner le sens, l'intérêt, la portée des connaissances mathématiques, que ce soit dans d'autres disciplines ou dans la vie quotidienne (pourcentages, échelles, représentations graphiques...). Certains problèmes peuvent prendre appui sur des éléments empruntés à l'histoire des mathématiques. Les moyens modernes de communication (informatique, banques de données, audiovisuel...) sont également utilisés chaque fois que leur usage est justifié.

Puis des extraits des travaux que nous avons effectués :

Extrait 1

On ajoutera que c'est ***un des objets de la synthèse*** que de préciser, et donc de faire préciser aux élèves, le ou les types de tâches qui ont été étudiés (que l'on accompagnera naturellement des techniques et des éléments technologiques pertinents).

Extrait 2

Un trinôme propose « Démontrer la nature d'un quadrilatère (ici un parallélogramme) ». Le type de tâches T est effectivement un sous type de tâches du type de tâches « Déterminer la nature d'un quadrilatère », mais ce type de tâches est trop générique pour l'analyse de la séance observée. Il sera en revanche pertinent dès lors que l'on voudra faire une synthèse au niveau du secteur des figures planes.

Extrait 3

Comme précédemment, il s'agit, autant que faire se peut, de privilégier l'activité de l'élève. En outre, la fonction de la synthèse est de réaliser l'essentiel du moment de l'institutionnalisation : elle vient mettre donc mettre en forme l'OM qui a été produite dans la ou les AER. C'est cela qui doit guider les réponses à apporter. La synthèse ainsi ne doit ni être « copiée », ni « donnée sous forme de photocopies » mais ***élaborée par la classe*** sous la direction du professeur.

(...)

La dernière question citée met en lumière un point important, qui conditionne de fait largement la possibilité d'une synthèse réussie. La ***synthèse vient*** mettre en forme l'ensemble de l'OM qui a été construite dans la ou les AER à propos du thème enjeu de l'étude et travaillée dans les exercices. Il s'agit donc de ***mettre en forme une OML*** (locale) et non une OMP (ponctuelle). Pour « réussir » à accomplir correctement ce type de tâches didactique, il faut savoir souvent différer un peu les épisodes du moment d'institutionnalisation où on fait la synthèse. Nous reviendrons sur ce point.

Extrait 4

La deuxième question explicite relative à ce secteur évoque une synthèse de l'OM au niveau du secteur, tout en semblant en exclure le travail sur le thème des triangles isométriques et semblables. C'est cela que l'on entend par la réalisation de l'amalgamation de l'organisation mathématique au niveau du secteur : partir d'un petit nombre de grand types de tâches – déterminer une longueur, déterminer un angle, déterminer une aire pour l'essentiel ici – et mettre en forme l'OM régionale qui a émergé du travail effectué.

Ce qui est décrit dans la première question doit donc « naturellement » trouver sa place dans le « cahier de synthèse ». Ajoutons par exemple, en référence au travail effectué dans la première partie de la séance précédente, qu'en seconde, dans le travail sur les fonctions, on aura rencontré T : « Déterminer le maximum d'une fonction du second degré », T' : « Déterminer le maximum d'une fonction inverse », etc. qui seront amalgamés en un type de tâches « Déterminer le maximum d'une fonction » pour lequel les types de tâches T, T' etc apparaîtront comme sous types de tâches dans la description de la technique, et que cela devra figurer dans le cahier de synthèse.

2. Les notations précédentes permettent également de dégager que la synthèse doit contenir les pratiques : une manière d'en institutionnaliser est de faire figurer des exemples, mais on ne doit pas confondre cet aspect de l'institutionnalisation et le travail mené dans les AER.

Par exemple, la synthèse sur le thème du parallélogramme de la classe de 5^{e} observée comportait le théorème suivant, admis :

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

assorti du commentaire suivant :

Ce théorème sert à :
montrer que des segments se coupent en leur milieu ;
calculer des longueurs de segments.

Elle portait ainsi la trace des types de tâches, mais pas des techniques : on pourrait donc la compléter d'un exemple pour au moins l'un des deux types de tâches, l'autre pouvant être renvoyé à l'un des exercices où ce type de tâches a été travaillé.

NB : Dans l'étude des matériaux, on a été amené à développer les notions d'organisation mathématique ponctuelle, locale, régionale et globale. On trouvera ci-dessous, en guise de synthèse, un extrait des *Archives du Séminaire :*

① Quelle qu'en soit la nature, ***toute*** activité humaine peut être analysée comme mettant en œuvre une ou des organisations du type $[T/\tau/\theta/\Theta]$: toute activité peut être regardée comme consistant à ***accomplir une tâche t*** d'un certain ***type T***, ***au moyen*** d'une certaine ***technique*** $\boldsymbol{\tau}$, ***justifiée*** par une ***technologie*** $\boldsymbol{\theta}$, elle-même ***justifiable*** par une ***théorie*** $\boldsymbol{\Theta}$.

② Une organisation $[T/\tau/\theta/\Theta]$ est appelée, d'une manière générale, une ***praxéologie***, ou ***organisation praxéologique***. Le mot de « praxéologie » décalque la structure $[T/\tau/\theta/\Theta]$: le grec ***praxis***, « pratique », renvoie au bloc pratico-technique $[T/\tau]$, et ***logos***, « raison », « discours raisonné », au bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$.

③ Une praxéologie mathématique n'est évidemment rien d'autre qu'une ***organisation mathématique*** ; une praxéologie didactique, rien d'autre qu'une ***organisation didactique***. Ce qu'on nomme usuellement un ***savoir-faire*** peut être identifié à un bloc pratico-technique ou bloc ***praxique*** $[T/\tau]$; ce qu'on nomme ***savoir***, à un bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$. On peut aussi nommer ***savoir***, au sens large, une organisation praxéologique $[T/\tau/\theta/\Theta]$ tout entière. Mais dans tous les cas, l'appellation de savoir doit assumer une pression polémique : car ce nom tend à être réservé à certaines organisations praxéologiques, et refusé à d'autres, point sur lequel on va revenir. Enfin, on soulignera que la notion courante de ***connaissance***, telle notamment qu'on l'emploie dans l'expression ***« diffuser des connaissances »***, peut désigner un élément quelconque d'une praxéologie quelconque, et en particulier d'un « savoir ».

④ Un type de tâches T est très généralement ***motivé par une technique*** $\boldsymbol{\tau^*}$ ***relative à un autre type de tâches,*** $\boldsymbol{T^*}$, en ce sens que, pour accomplir une tâche $t^* \in T^*$ ***par la technique*** $\boldsymbol{\tau^*}$, on doit à un certain moment accomplir une tâche $t \in T$. Même si la dépendance de T^* à T peut être rompue (en remplaçant τ^* par une autre technique qui n'exige plus d'accomplir des tâches du type T), au sein d'une pratique donnée – celle du professeur ou celle de l'élève par exemple –, les types de tâches sont ainsi ***mutuellement dépendants***.

❶ À ces relations de motivation-dépendance entre couples (T_i, τ_i) répond souvent la création d'organisations praxéologiques intégrant, autour d'une technologie commune, θ, les divers types de tâches considérés : on retrouve ainsi la notion d'organisation praxéologique ***locale***, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in I}$.

❷ L'« amalgamation » peut se poursuivre : si des praxéologies locales admettent la ***même théorie*** Θ, on notera $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]_{i\in I_j, j\in J}$ ou, pour simplifier, $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]$, la praxéologie ***régionale*** qu'elles forment ensemble.

❸ De la même façon, on peut amalgamer un certain nombre de praxéologies régionales : on obtient alors une praxéologie ***globale***, $[T_{kji}/\tau_{kji}/\theta_{kj}/\Theta_k]$.

❹ La classification indiquée ici correspond *grosso modo* à celle des différents niveaux de détermination didactique (voir la séance 13) :

Sujet ↔ Organisation ***ponctuelle*** $[T/\tau/\theta/\Theta]$
Thème ↔ Organisation ***locale*** $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$
Secteur ↔ Organisation ***régionale*** $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]$
Domaine ↔ Organisation ***globale*** $[T_{kji}/\tau_{kji}/\theta_{kj}/\Theta_k]$

À propos de *topos*

① Que veut dire exactement le « topos de l'élève » ? (2[de], 9)

1. « Topos » signifie, en grec, « lieu » (qui vient du latin *locus*) : on le retrouve dans « topologie », « topographie », etc. Examiner le *topos de l'élève,* c'est examiner le lieu offert aux élèves dans l'étude d'une question *Q* (comment accomplir la tâche *t* ?) génératrice d'une certaine OM, lieu où ils vont pouvoir agir « en autonomie ». Cet examen passe solidairement, bien sûr, par l'examen du *topos* alloué au professeur ?

2. L'examen du *topos* de l'élève (et de celui du professeur) permet d'analyser et d'évaluer les techniques de réalisation des moments de l'étude. Il suppose ainsi l'investigation de l'ensemble des gestes didactiques que la création d'une OM peut supposer, à propos de chacun des moments de l'étude. Quelle est la place de l'élève dans l'élaboration de la technique et de sa technologie relative à un certain type de tâches, dans la mise en forme d'une synthèse, etc. ? L'examen à mener concerne également la place de l'élève dans la production du ***questionnement générateur*** de l'OM considéré : l'élève est-il par exemple réduit à suivre le déroulement d'un énoncé fixé à l'avance ou la classe participe-t-elle à la production de l'étude de *Q* par la production et l'étude de ***questions cruciales*** successives ?

3. Dans la préparation d'une organisation didactique relative à une OM déterminée, la préparation du *topos* de l'élève doit être soigneusement étudiée : elle passe d'une part par la donnée aux élèves de questions suffisamment ouvertes. Par exemple, dans l'énoncé que nous avons cité lors de l'étude de questions portant sur les valeurs absolues et que nous reproduisons ci-après, le découpage préalable des deux inéquations ainsi que la donnée de la modélisation limite fortement le *topos* de l'élève : on avait vu qu'une modélisation « plus simple » pouvait être mise en place, qui conduisait à deux autres équations.

84 Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations :

1. $|x-1| \leqslant 3$. 2. $|x-5| \leqslant 2$.

3. Camille et Aurélien habitent la même rue à 400 m l'un de l'autre. Les parents d'Aurélien lui demandent de ne pas s'éloigner de plus de 300 m de la maison. Ceux de Camille demandent de ne pas s'éloigner de plus de 200 m.

On représente la rue par une droite graduée de repère $(O ; A)$ (unité : 100 m). La maison d'Aurélien est en A et celle de Camille en C, avec $A \in [OC]$.

Déterminer la position de la rue où Aurélien et Camille peuvent jouer ensemble sans désobéir à leurs parents. (Utiliser les questions **1.** et **2.**)

Il faut cependant prendre garde que la préparation du *topos* de l'élève comporte un aspect crucial : la préparation de la possibilité que les élèves puissent venir occuper le topos qu'on a prévu pour lui. (voir ci-dessous)

② Ayant soumis à ma classe l'activité : « Un agriculteur veut inscrire un champ rectangulaire d'aire maximale dans un terrain triangulaire... », à la première question (orale) : « Comment modéliser cette situation ? », la classe a mis dix minutes à répondre : « On fait un dessin ». D'une manière générale, la classe est très passive (par ailleurs très docile) et visiblement en attente d'une organisation binaire de l'étude. Qu'en conclure ? Que faire ? J'envisage de donner désormais des activités très guidées, puis progressivement plus ouvertes... (2^{de}, 9)

1. Il ne faut, en ce type de situations, surtout ne pas reculer voire baisser les bras. Il faut persévérer, en examinant les raisons pour lesquelles les élèves n'ont pas pu démarrer. Ici, la première question que le professeur semble avoir posé paraît un peu abrupte, et peu compréhensible sans doute par les élèves, même si l'on peut se donner comme objectif que la classe puisse entendre et répondre à cette question d'ici la fin de l'année. Il faut également examiner si le professeur a donné suffisamment de *topos* aux élèves : ici encore, si la question de la modélisation a été posée d'emblée, le *topos* des élèves se trouve limité ; il n'en irait pas de même si le professeur a assuré la dévolution du problème et laissé les élèves travailler quelques minutes avant de poser la question. On peut encore s'interroger sur la possibilité qu'avaient les élèves d'investir le *topos* que le professeur avait prévu pour eux : on voit très souvent en effet dans l'observation et l'analyse de séance les élèves ne pas pouvoir venir occuper le *topos* prévu pour eux parce qu'ils n'ont pas les moyens et les ressources nécessaires pour le faire. On en donnera ci-dessous un exemple observé en classe de seconde.

2. Il s'agit d'une séance dans laquelle le professeur dirige l'étude d'une activité, débutée la veille, visant à faire émerger la propriété de linéarité de la moyenne. P a choisi une situation de calcul de la moyenne d'une série de nombres que la calculatrice ne peut traiter du type 1,2356891235698 ; 1,2356891235721 ; 1,2356891235543. La fabrication de l'organisation mathématique venant répondre à cette question nécessite que les élèves puissent expérimenter, soit en fabriquant d'autres spécimens du type de tâches qui eux peuvent être traités à l'aide de leur calculatrice, soit en ayant recours au tableur ou à la calculatrice d'un ordinateur, ou encore en combinant les deux, la technique fabriquée devant être mise à l'épreuve d'autres spécimens et les éléments technologiques justifiés. Or, au motif que la situation de départ ne peut pas être traitée avec une calculatrice « standard », P prive les élèves de calculatrice et donc de moyen pour expérimenter, ce qui conduit les élèves à ne pas pouvoir investir véritablement le *topos* et qui va donc créer de la passivité ou, selon les classes, de l'agitation.

L'amphithéâtre ayant été envahi, puis occupé, par des manifestants, le séminaire s'est arrêté en ce point...

Utiliser la calculatrice

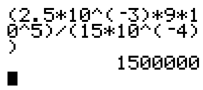
① Les élèves n'ont pas une pratique suffisante de leurs calculatrices (de divers modèles). Est-il raisonnable de consacrer une heure de classe spécialement dédiée à la pratique de la calculatrice (plutôt en demi-groupes)? Dois-je utiliser le modèle unique disponible dans l'établissement ? Ou vaut-il mieux donner des exercices spécifiques, réguliers, à faire chez soi, mais sans aide ? (2de, 9)

Comme en d'autres matières, les élèves ne peuvent pas avoir une pratique spontanée : il s'agit donc de les instruire en cette matière. Il ne s'agit pas pour autant de faire des séances uniquement fondées sur l'utilisation de la calculatrice mais d'expliciter, au fur et à mesure des besoins, les techniques relatives à un certain nombre de types de tâches. Ainsi on a vu précédemment que le tracé d'une courbe devait intégrer une étape « à la calculatrice » pour laquelle il s'agit de disposer d'une technique, dont certaines étapes (notamment celle du paramétrage de la fenêtre graphique) s'enrichiront au fur et à mesure que l'on explorera des spécimens.

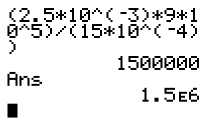
Si l'établissement dispose d'une calculatrice, c'est celle-ci qu'il faut utiliser de manière privilégiée. On pourra cependant prévoir une partie d'une séance en demi-groupe pour adapter les techniques aux modèles des élèves, en leur faisant préparer cette séance chez eux pour contrôler la dépense de temps.

② Je suis confrontée au problème suivant : dans les exercices types du brevet de la forme suivante $\dfrac{a\times 10^{n}\times c\times 10^{m}}{d\times (10^{p})^{q}}$, les élèves se jettent sur la calculette car elle donne le résultat sous forme d'écriture scientifique. Ils se débrouillent pour faire des étapes, on y croirait presque ! Doit-on leur interdire l'usage de la calculette bien qu'ils puissent l'avoir au brevet ? (6^{e} et 3^{e}, 8)

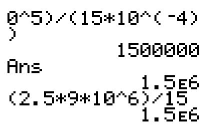
On ne peut pas priver les élèves du secours que donne la calculatrice dans le travail d'anticipation et de contrôle des calculs. Il faut au contraire s'en saisir et l'intégrer clairement dans les techniques fabriquées. À propos du type de tâches évoqué dans la question, supposons que l'on ait à calculer $\dfrac{2{,}5\ 10^{-3}\ 9\ 10^{5}}{15\ 10^{-4}}$. Une calculatrice donne d'abord :



Puis en mettant en écriture scientifique,



On voit donc que le dénominateur doit pouvoir se simplifier avec le numérateur, et que doit pouvoir apparaître au numérateur 10^{6}. Au numérateur, $10^{-3}\ 10^{5} = 10^{-3}\ 10^{6}\ 10^{-1} = 10^{-4}\ 10^{6}$. On obtient donc que $\dfrac{2{,}5\ 10^{-3}\ 9\ 10^{5}}{15\ 10^{-4}} = \dfrac{2{,}5\ 9\ 10^{6}}{15}$ ce que l'on peut vérifier à la calculatrice :



On a ensuite $15 = 5 \times 3$ et l'on doit faire apparaître un facteur 5 et un facteur 3 au numérateur ;
$2{,}5 \times 9 = 0{,}5 \times 5 \times 3 \times 3 = 0{,}5 \times 3 \times 15 = 1{,}5 \times 15$ et on obtient finalement le résultat cherché.

On obtient ainsi une technique pilotée par le résultat de la calculatrice, celle-ci permettant d'anticiper les transformations d'écriture à effectuer.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Travaux dirigés de didactique des mathématiques
Utiliser les TICE

➔ Séance 2 : mardi 25 novembre 2008 (17 h 20 – 18 h 50)

Programme de la séance. Expérimentation numérique : 1. Contrôler, éprouver une assertion // 2. Formuler une assertion

Expérimentation numérique : 1. Contrôler, éprouver une assertion

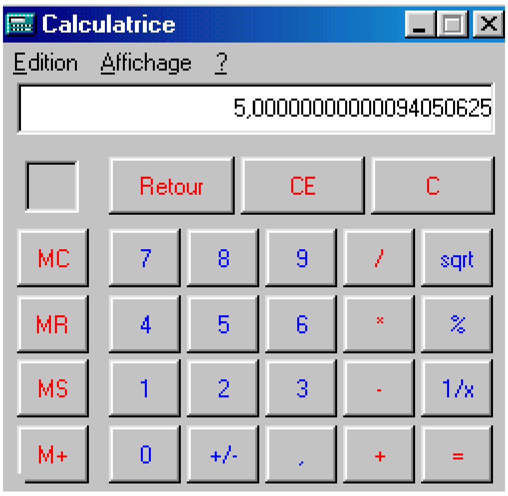
Est-ce que $\sqrt{5}$ = 2,2360679775 ?

Dans une classe de 4[e], un calcul de longueur amène à calculer $\sqrt{5}$. Utilisant leur calculatrice, les élèves obtiennent $\sqrt{5}$ = 2,2360679775. Certains s'interrogent : est-ce que $\sqrt{5}$ est le nombre décimal 2,2360679775 ? Le professeur propose de mettre à l'étude cette question lors de la prochaine séance de travail.

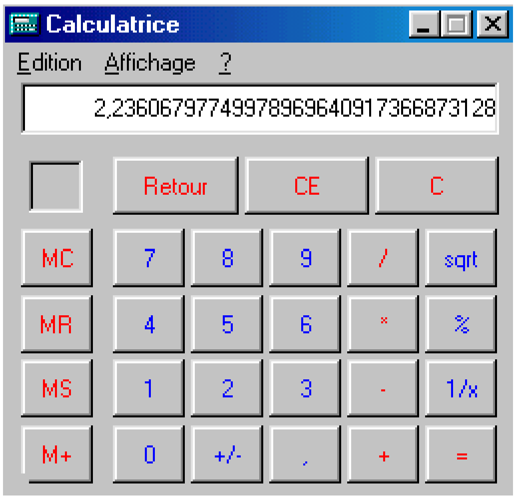
Il débute la séance en faisant rappeler le problème posé aux élèves ; la classe met en œuvre une première vérification avec la calculatrice dont dispose les élèves : ils élèvent 2,2360679775 au carré et obtiennent 5.

Le professeur propose alors de changer de calculatrice, pour s'assurer du résultat, et de travailler avec la calculatrice de l'ordinateur.

En faisant le produit (en copiant et en collant le nombre) dans la calculatrice de l'ordinateur, on obtient :



La même calculatrice affiche pour la racine de 5 :



On peut remarquer que la dernière décimale donnée par la calculatrice des élèves provenait d'un arrondi.
On met en mémoire ce nombre et on l'élève au carré : on obtient 5.

Prévenu par la manipulation précédente, on peut vouloir éprouver ce résultat.

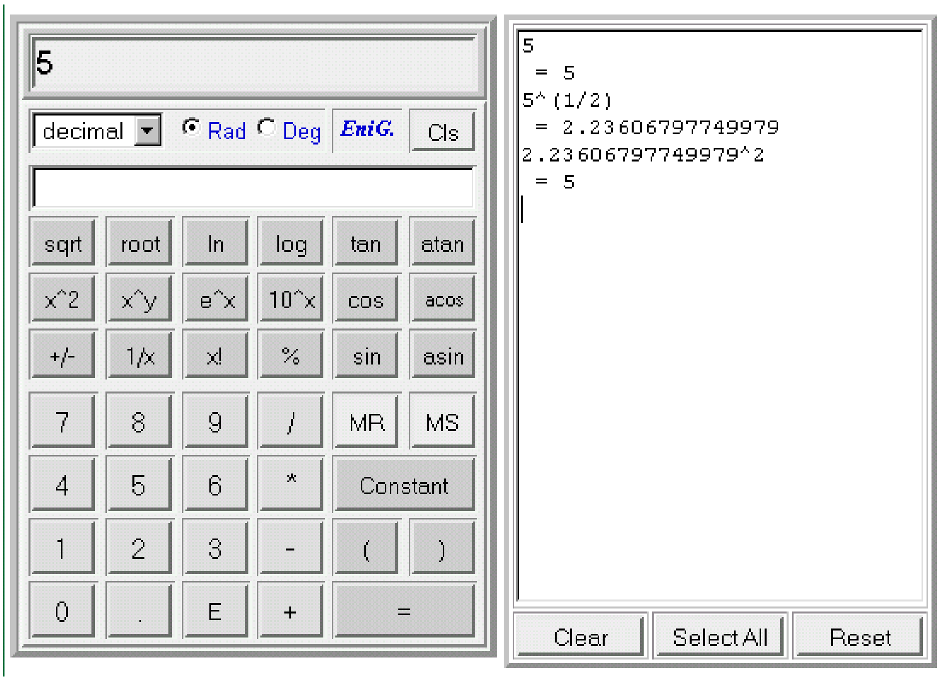
Fabriquer un dispositif utilisant la calculatrice de l'ordinateur pour éprouver le résultat précédent.

Réponse : on rappelle le nombre 2,23606797749978969640917366873128 mis en mémoire ; on soustrait 2,236 et on multiplie par 100 000. On obtient : 6,79774997896964091736687312**762355**, ce qui permet d'obtenir des décimales supplémentaires, dont la dernière n'est pas sure.

D'autres techniques peuvent être mises en œuvre : par exemple, on copie le nombre obtenu (2,236067977499789696409173668731) dans word et on le soustrait à $\sqrt{5}$. On obtient : 2,7623547411359311987088805554098e-31, ce qui donne de nombreuses décimales supplémentaires.

On peut bien évidemment utiliser d'autres calculatrices, et notamment des calculatrices en ligne.
C'est ce que nous avons fait lors de la séance puisque les ordinateurs de la salle informatique ne disposait pas de la calculatrice...

Par exemple : http://www.ktf-split.hr/periodni/fr/calc4chem.html , qui offre l'avantage de garder la trace des calculs effectués



ou encore http://www.calculator.com/calcs/calc_sci.html.

ou bien une calculatrice « de précision absolue » qui donne jusqu'à 99 chiffres significatifs :

http://blaisefacy.free.fr/zonefw/logiciels/CalculatriceW.exe

Le travail pourrait être prolongé par l'examen du problème suivant :
un nombre entier peut-il être le carré d'un nombre décimal non entier ?
Une étude expérimentale à l'aide de la calculatrice devrait faire apparaître que, s'il en était ainsi, le carré du dernier chiffre de l'écriture décimale devrait se terminer par 0, ce qui n'est pas possible.
(à développer)

Expérimentation numérique : 2. Formuler une assertion

Une classe de 4e travaille sur la comparaison de deux nombres relatifs, et plus précisément sur la comparaison de deux nombres en écriture fractionnaire. Dans cette perspective, un professeur se propose de soumettre aux élèves le problème suivant :

Les nombres a, b, k et ℓ étant positifs, est-ce qu'on a toujours $a/b < (a + k) / (b + \ell)$?

A – Proposer un dispositif expérimental utilisant la calculatrice de l'ordinateur permettant de se faire une bonne idée de la réponse à la question.

Ayant mis en œuvre ce dispositif expérimental, la classe se pose maintenant le problème suivant : à quelle(s) condition(s) a-t-on $a/b < (a + k) / (b + \ell)$?

B – Proposer un dispositif utilisant la calculatrice de l'ordinateur permettant de formuler un résultat expérimental.

On établira un fichier texte qui consigne les dispositifs expérimentaux et les expérimentations effectuées : ces fichiers seront relevés sur une clé usb à la fin de la séance et envoyés à m.artaud@aix-mrs.iufm.fr et f.queval@aix-mrs.iufm.fr.

Réponse express : il s'agissait de fabriquer un corpus de spécimens du type de problèmes et de tester avec la calculatrice le rangement. On peut par exemple, après un temps de travail collectif qui aura pour but de dévoluer le problème, répartir le travail d'expérimentation suivant des équipes, chaque équipe étant chargée de produire une dizaine de résultats expérimentaux.

$a/b < (a + k) / (b + \ell)$?

$a/b = 56/84 =_c 0{,}6666666666666666666666666666667$

on prend d'abord $k = \ell$;

$k = \ell = 15$; $k = \ell = 87$; $k = \ell = 1012$; $k = \ell = 15879423$;

on obtient successivement pour $(a + k) / (b + \ell)$:
$71/99 =_c 0{,}71717171717171717171717171717171717$
$140/171 =_c 0{,}81871345029239766081871345029239 8$
$1068/1096 =_c 0{,}97445255474452554744525547445255 5$
$15879479/15879507 =_c 0{,}99999823672107704603171874290555 7$

On change le rapport a/b : $a/b = 259/84 =_c 3{,}0833333333333333333333333333333333$

Avec les mêmes valeurs de k et de ℓ on obtient :
$274/99 =_c 2{,}7676767676767676767676767676767677$
$346/171 =_c 2{,}0233918128654970760233918128655$
$1271/1096 =_c 1{,}1596715328467153284671532846 7153$
$15879682/15879507 =_c 1{,}0000110204932684623017578568 4027$

On prend maintenant $k \neq \ell$: $k = 256378945$ et $\ell = 25634859758$.

$a/b = 25635847963/9568478523 =_c 2{,}6791979415931641946373421357785 5$.
$(a + k) / (b + \ell) =_c 0{,}7355048746037415609948301311782 63$

Il est clair que l'assertion n'est pas toujours vraie. Une mise en commun de l'ensemble des spécimens des valeurs des équipes doit permettre d'émettre des conjectures sur les conditions sous lesquelles ce résultat est vérifié. Ici, le choix opéré d'avoir commencé par $k = \ell$ permet de faire apparaître que c'est vérifié quand $a/b < k/\ell$, ; ça ne l'est pas quand $a/b > k/\ell$, assertions qu'il faut alors éprouver avec un corpus expérimental plus étoffé, avant de déduire de la TND (notamment du fait que $p/q < r/s$ équivaut à $ps < qr$ lorsque p, q, r et s sont positifs) le résultat :

$a/b < (a + k) / (b + \ell)$ équivaut à $a(b + \ell) < b(a + k)$ équivaut à $ab + a\ell < ab + bk$ équivaut à $a\ell < bk$ équivaut à $a/b < k/\ell$.

Nous reviendrons sur ce travail et sur le travail produit par les binômes par le biais d'une synthèse en Séminaire.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 10 : mardi 2 décembre 2008

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Évaluation et notation // 2. Forum des questions // 3. Recherche dans les archives

0. Questions de la semaine

Une proportion d'absence de questions inquiétante : sur les 43 élèves professeurs présents, 14 n'ont pas soumis de questions. Le découpage de questions est un geste de l'étude fondamental et on rappelle que c'est par les questions de la semaine que passe une part essentielle de l'apport des participants au travail du Séminaire : les prendre au sérieux est une dimension du respect que chacun doit porter à la formation, aux formateurs et aux formés.

Parmi les questions posées, un thème se fait jour, celui des conseils de classe, directement ou par l'intermédiaire des bulletins scolaires :

> Comment remplir les appréciations sur les bulletins ? On m'a conseillé de ne mettre que des remarques encourageantes, mais c'est difficile, surtout d'en trouver 35 !! (AC, 2de, 10)

Certains s'interrogent sur la conception des organisations mathématiques :

> Sur le thème « Repères et vecteurs » en classe de seconde, le document d'accompagnement précise : « On définira la multiplication d'un vecteur par un réel indépendamment du repérage ». Il encourage cependant à garder la notion de repérage comme base de cette étude. Comment motiver alors la multiplication d'un vecteur par un réel ? (EM, 2de, 10)

Nous étudierons cette question la semaine prochaine.

Le thème évaluation et notation continue d'être fortement présent :

> Pour le premier trimestre mes deux cinquièmes ont environ 13,5 et 14 de moyenne. Faut-il légèrement augmenter la difficulté des travaux notés ou puis-je rester sur ce genre de notes ? (NM, 5^{e}, 10)

Le thème du C2i2e apparaît à travers la question suivante :

> Peut-on avoir des précisions sur la validation du C2i2e ? Quel est le commentaire à faire lorsqu'on poste un document dans le portfolio ? Compétences visées ? Descriptif de la situation ? (SDM, 4^{e}, 10)

1. Notice *Évaluation et notation*

On avait distribué avant les vacances une notice sur l’évaluation et la notation à étudier. Les trinômes avaient à examiner les éléments de réponses qu’elle permet d’apporter aux questions reproduites ci-après. On a rassemblé dans le fichier Travaux évaluation_notice$.odt (disponible sur Espar) les travaux effectués par les groupes que nous avons examiné collectivement en séance. Exceptionnellement, ce travail ne donnera pas lieu à une synthèse dans les notes du Séminaire.

Le niveau de notes de mes élèves est faible. Dois-je simplifier mes contrôles ? (2^{de}, 4)
L’interrogation écrite surprise est-elle une solution pour préserver un travail constant des élèves ? (2^{de}, 0)

Trinômes : (Sylvain Astier, Alexandra Devilers, Elodie Maysou) ; ; (Christophe Coupard, Alain Gleyze) ;

Si un contrôle est raté, comment y remédier ? Quelle est la meilleure solution ? Rajouter des points à tout le monde, multiplier par un coefficient, augmenter le barème, ne rien faire ? (5^{e} et 4^{e}, 5)

Suite à une interrogation écrite de 15 minutes que j’ai proposée à mes élèves, j’ai réalisé que le niveau est très bas. Que faire ? Remarque : l’interrogation était sur les ensembles de nombres. (2^{de}, 3)

Trinômes : (Olivier Dumont, Marianne Kiledjian, Nicolas Laurent) ; (Anne Martinet, Marion Rubin, Elodie Vadé) (Daniela Caraffa-Bernard, Bruno Michel)

À la réunion parents-profs de 4^{e}, on m’a demandé quelle était la cause de la chute des notes en mathématiques lors du passage de la 5^{e} à la 4^{e}, d’après ce qu’ils ont entendu…
J’ai répondu tant bien que mal en argumentant notamment sur un raisonnement géométrique plus poussé, le nombre d’étapes intermédiaires étant généralement plus important entre l’énoncé et la solution, etc. (à cause des nombreux nouveaux théorèmes : droite milieux, Pythagore, Thalès, cosinus, …) (5^{e} & 4^{e}, 2)

Aucun élève n’a su bien répondre à une question du DM1. Dois-je l’enlever du barème ? (2^{de}, 4)

Trinômes : **(**Souaad Benhadi, Sihame El Khaine, David Félix) ; (Francine Bert, Yanna Pons, Benjamin Faure) ;

En général, en rédigeant un contrôle, on prévoit un barème. Dans quelle mesure peut-on adapter ce barème si par exemple un exercice a posé un problème particulier à l’ensemble de la classe ? Une question difficile doit-elle rapporter plus de points même si peu d’élèves ont répondu correctement ? (2^{de}, 5)

Est-ce que le niveau des contrôles doit dépendre du niveau de la classe ou doit-il être indépendant ? (2^{de}, 3)

Trinômes : (Vincent Boilard, Hamdoune Lazrek, Fanny Devaux) ; (Renaud Cortinovis, Matthieu Bruno, Sylvain Samat).

Comment savoir que l’on évalue bien une copie ? (2^{de}, 5)

Lorsqu’un DS a été mal réussi, est-ce qu’il faut le refaire ? Comment le compter dans la moyenne ? (4^{e}, 7)

Trinômes : **(**Rodolphe Arnaud, Arnaud Combes, Mounir El Farri) ; (Nelly Bofelli, Samuel Der Monsessian) ;

Comment évaluer un devoir de géométrie avec des démonstrations à faire ? Comment noter ? Prendre en compte la rédaction, les propriétés utilisées,... la mise en relation des divers éléments ? (2^{de}, 7)

Suite à un contrôle, j’ai parcouru rapidement les copies (sans les corriger) et je pense que la moyenne sera élevée (c’est mérité car les élèves ont très bien travaillé ce chapitre). Dois-je corriger plus sévèrement, ou corriger « normalement » ? (5^{e}, 7)

Trinômes : (Nicolas Chekroun, Vincent Dambreville, Céline Goujon) ; (Nicolas Mizoule, Raphaël Rigaud, Florian van Becelaere) ; (Antoine Noël, Hélène Pujol).

On ajoutera ci-dessous quelques questions posées ces trois dernières semaines, qui trouvent des éléments de réponses dans la notice étudiée et que nous avons étudiées collectivement.

Moi, j'ai du mal à faire une correction de devoir surveillé en classe (avec la classe) car ceux qui ont plus de 16 ne se sente pas obligés de suivre (sauf s'ils sont interrogés) et ceux qui ont moins de 5 ne s'y intéressent pas du tout, ils se disent que c'est du passé. J'ai du mal à diriger tout le monde en même temps... Alors, comment faire une correction adaptée, qui apporterait quelque-chose à tout le monde ? (SEK, 5^e, 9)

Nous avons déjà dit en plusieurs occasions qu'il ne s'agissait pas de faire une correction *in extenso* mais de faire un rapport de correction, qui mette en évidence les points principaux sur lesquels la classe a buté lors du devoir surveillé. C'est cela qui permet de rassembler la classe dans ce dispositif. Voir notice évaluation et notation page 5.

Ma classe de seconde a obtenu 12,5 de moyenne a un devoir de deux heures. Un professeur m'a dit : « Tu pourras donc faire plus dur la prochaine fois ! ». Ne doit-on pas se réjouir d'une moyenne élevée plutôt que de vouloir la faire baisser ? (2de, 10)
Pour le premier trimestre mes deux cinquièmes ont environ 13,5 et 14 de moyenne. Faut-il légèrement augmenter la difficulté des travaux notés ou puis-je rester sur ce genre de notes ? (5e, 10)
Lors de Devoirs Maison, certains élèves se font grandement aider (par leur famille ou autre). En effet, ils utilisent des résultats non vus en cours, ni dans les classes précédentes. Faut-il sanctionner de telles réponses ou plus guider les questions pour les « forcer » à y répondre avec les connaissances vues en cours ? (5e, 10)
La moyenne de la dernière interrogation est faible (≈ 6), que puis-je faire ? Puis-je donner le même sujet à faire à la maison et faire la moyenne des deux notes ? Puis-je redonner le même type d'interrogation de 15 minutes et faire la moyenne ? (2de, 10)
J'ai pour habitude, lorsque je donne un DM le jeudi, que l'heure du vendredi permette de répondre aux questions qui pourraient surgir. Malgré cela, le dernier DM a été mal compris pour une grande partie de la classe. J'ai alors décidé de ne pas le noter. N'est-ce pas trop « pénaliser » ceux qui ont travaillé plusieurs heures à ce DM et avantager ceux qui ne l'ont pas rendu et ceux qui l'ont bâclé ? (2de & 1re STT, 10)

2. Forum des questions

On reproduit ci-dessous deux questions que nous n'avions pas eu le temps d'examiner collectivement la semaine dernière : les matériaux de réponses présents dans les notes de la séance 9 sont à étudier : nous y reviendrons rapidement la semaine prochaine.

Utiliser la calculatrice

① Les élèves n'ont pas une pratique suffisante de leurs calculatrices (de divers modèles). Est-il raisonnable de consacrer une heure de classe spécialement dédiée à la pratique de la calculatrice (plutôt en demi-groupes)? Dois-je utiliser le modèle unique disponible dans l'établissement ? Ou vaut-il mieux donner des exercices spécifiques, réguliers, à faire chez soi, mais sans aide ? (2de, 9)
② Je suis confrontée au problème suivant : dans les exercices types du brevet de la forme suivante $\dfrac{a\times 10^n \times c \times 10^m}{d\times(10^p)^q}$, les élèves se jettent sur la calculette car elle donne le résultat sous forme

d’écriture scientifique. Ils se débrouillent pour faire des étapes, on y croirait presque ! Doit-on leur interdire l’usage de la calculette bien qu’ils puissent l’avoir au brevet ? (6e et 3e, 8)

On les complétera par une étude rapide de la question suivante :

Concernant la validation du B2i en 4e,est-ce qu'on doit prévoir une séance où on fait un « test » sur les ordinateurs ou est-ce que la validation se fait tout au long de l'année ? (4e, 10)

Forum express

La plupart de mes élèves soutiennent fermement qu'elles n'ont jamais étudié le théorème de la droite des milieux. Dois-je remédier en leur faisant un point sur ce théorème ou peut-on s'en passer ? (2de & 1re STT, 9)

Le théorème des milieux n’est qu’un cas particulier du théorème de Thalès, et il semble peu probable que les élèves soutiennent aussi fermement qu’elles n’ont jamais étudié le théorème de Thalès... Il est par ailleurs probable que la « renommée » du théorème de Thalès ait écrasé le modeste théorème des milieux.

Malgré de nombreuses heures passées sur le théorème de Thalès, mes élèves ont encore certaines difficultés à l'appliquer : quand on résout les exercices en classe, ils fournissent les bonnes réponses mais dès qu'ils doivent travailler à la maison, les résultats sont décevants. Dois-je encore passer quelques séances sur cette notion alors que le chapitre suivant a été commencé et que le programme doit être poursuivi ? (4e, 9)

1. Il faut savoir arrêter l’étude d’un thème, et laisser à la charge des élèves la responsabilité de la poursuite de l’apprentissage : au bout d’un certain temps de travail, le temps supplémentaire passé dessert l’objectif poursuivi. En effet, les élèves qui ne sont pas encore au point vont se dire que, si l’on y passe tant de temps, c’est que c’est un point particulièrement difficile, et donc, que ce n’est pas pour eux. On risque même de voir régresser certains élèves moyens. Il faut également tenir compte du fait que le temps d’enseignement n’est pas superposable avec le temps d’apprentissage et que laisser les choses reposer peut se révéler plus producteur, sachant en outre que, pour le thème cité dans la question, le programme de troisième en reprendra l’étude.

2. Ce qui est décrit dans la question semble évoquer un problème supplémentaire : celui du manque d’autonomie des élèves. Il faut en ce cas examiner les dispositifs d’étude mis en place ainsi que l’organisation mathématique que l’on a mis aux mains des élèves : il peut arriver que les techniques dont on a muni les élèves soient trop peu détaillées, ou encore que dans les dispositifs d’étude, le topos du professeur soit dominant, ce qui laisse les élèves démunis quand ils sont placés en relative autonomie.

Je commence le chapitre « triangle » en classe de cinquième et je débute ce chapitre avec la somme des mesures des angles dans un triangle. Dans l'activité que j'ai proposée, il y avait une première partie « I. Conjecture » où les élèves avaient à mesurer les angles avec le rapporteur. Est-ce que je dois faire une séance où l'on reprend l'utilisation du rapporteur ? (5e, 10)

La mesure des angles avec un rapporteur est un enjeu du programme de 6e : même dans cette classe, il ne s’agit pas de travailler cela « à vide », mais dans le cadre d’une organisation mathématique qui en nécessite la mise en œuvre. Le programme de 5e contient des organisations mathématiques qui nécessitent la mobilisation d'une technique de mesure des angles avec le rapporteur : c'est l'occasion, lors de l'étude de la première d'entre elles, d'abord de vérifier par un test d'entrée la position de la classe par rapport à la maîtrise de cette technique, et d'en reprendre l'étude si cela s'avère nécessaire, toujours en fonction, durant un temps qu'il convient de ne pas surestimer.

> Pour faire une organisation mathématique complète et surtout pour trouver tous les types de tâches d'une séquence je dois m'aider :
>
> - de l'étude du programme officiel ;
>
> - des exercices que l'on peut trouver dans les manuels.
>
> Y a -t-il autre chose de capital que j'oublie ? (6^e & 3^e)

Oui : les documents d'accompagnement et les archives du séminaire !

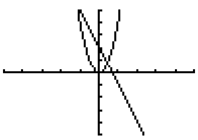
> **Comparer *a*, a^2 et a^3**
>
> Quel est l'intérêt, la raison d'être de la notion d'ordre en classe de seconde ? (comparaison de a, a^2, a^3) (2^{de}, 9)
>
> Raison d'être de la comparaison de a, a^2 et a^3 ? (Après recherche sur le séminaire des années antérieures.)
>
> (2^{de}, 10)

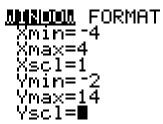
1. Nous avons déjà dit des choses à propos de la notion d'ordre : nous avons notamment situé le type de tâches « déterminer l'ordre de deux nombres » dans l'étude de types de tâches sur les fonctions.
On rappelle d'abord ci-dessous un extrait du document d'accompagnement du programme de seconde, cité lors de la séance 1 du séminaire :

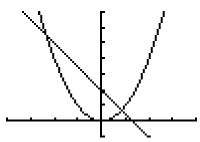
> Le programme rassemble sous un titre unique un bilan sur les ensembles de nombres, les problèmes de calcul numérique et algébrique et l'étude des fonctions. C'est une invitation forte à chaque enseignant pour qu'il construise son cours en faisant interagir ces divers éléments : calcul numérique ou littéral et recherche d'images, résolution d'équations par le calcul ou dans un environnement graphique, de façon approchée ou exacte, ordre entre les nombres et variations de fonctions, etc.

Nous avions également cité la comparaison de l'image d'un nombre par deux fonctions différentes, ou encore la résolution d'inéquations, toujours d'un point de vue fonctionnel. On en rappelle ci-dessous un exemple, donné lors de la séance 7 :

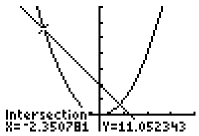
Soit à résoudre l'inéquation $2x^2+3x-4\leqslant 0$. Elle est équivalente à l'inéquation $2x^2\leqslant -3x+4$. La représentation graphique de ces deux fonctions de références donne d'une part une parabole tournée « vers le haut » de sommet (0, 0) et d'autre part une fonction affine décroissante dont l'ordonnée à l'origine est 4 ; on aura ainsi la parabole en dessous de la droite entre les points d'intersection, soit entre les solutions de l'équation $2x^2+3x-4=0$ comme en témoigne les représentations graphiques suivantes obtenue avec une calculatrice TI-82, d'abord sur la fenêtre classique [-10 ; 10] × [-10 ; 10], puis sur une fenêtre plus adaptée

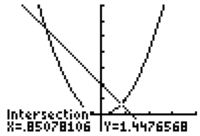






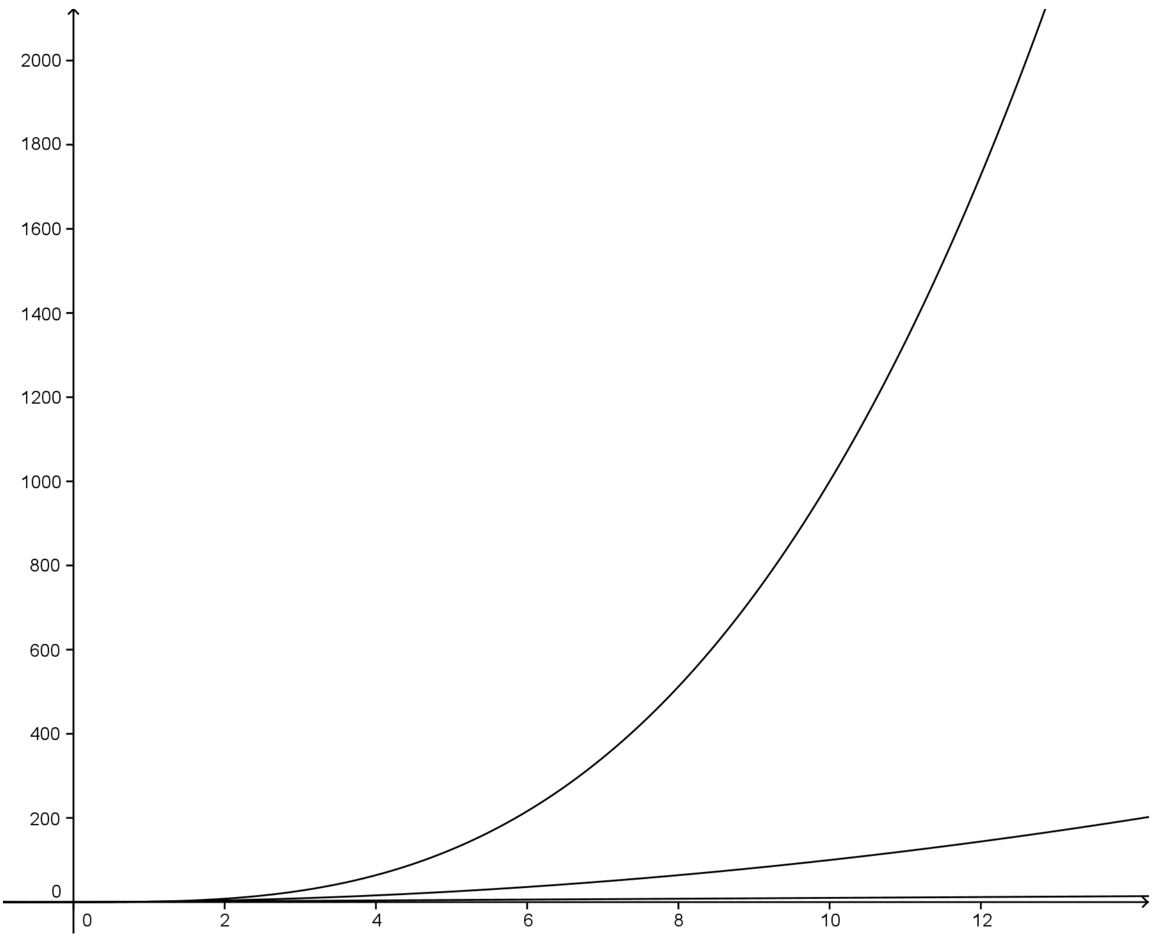
La calculatrice fournit des valeurs approchées des points d'intersection (voir ci-dessous), que l'on pourrait vouloir contrôler avant de faire confiance à la calculatrice dans l'établissement de résultats expérimentaux.





On sera alors amené à comparer deux nombres, donnés comme deux images d'un même nombre par deux fonctions.

1. En gardant cette même idée de l'étude des fonctions pour motiver le travail algébrique, supposons que l'on ait la représentation graphique des fonctions qui à x associe respectivement x, x^2 et x^3 sur l'intervalle [0 ;12], et que l'on ait à reconnaître la courbe représentative de ces fonctions.



La chose est peu claire a priori pour un élève de seconde, mais des argument numériques permettent d'identifier les trois fonctions : par exemple le fait que $10^2 = 100$ tandis que $10^3 = 1000$, du moins sur l'intervalle [2 ; 12]. La position relative des trois courbes obtenue est-elle toujours valide très au delà de 12 ? et en deçà de 2 ? C'est cette question qui conduira à mettre en évidence l'ordre entre x, x^2 et x^3, le travail expérimental à la calculatrice (notamment à l'aide des tables des fonctions) mettant en évidence, comme on en a maintenant l'habitude, les faits numériques, faits qu'il s'agit ensuite de déduire de la théorie disponible. Ce qui conduira à l'étude d'inéquations :par exemple $x^2(x-1)\geqslant 0,\ x(x-1)\geqslant 0,\ x(x^2-1)\geqslant 0$.

3. Recherches dans les archives

Deux exposés étaient au programme de cette séance.

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant au dispositif des ***modules*** en classe de Seconde ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. J'ai une classe très hétérogène. Je me demande s'il ne faudrait pas constituer des groupes de travail pendant l'heure de module. Comment constituer de tels groupes ? (5)
2. En module, un groupe a progressé plus rapidement que l'autre. Peut-on le prévoir ? Comment anticiper ? (2)
3. Comment aborder les modules en seconde ? (0)
4. Que faire en module (classe de 2^{de}) ? Activité et synthèse me semblent hors de question… (2)
5. Utilisation des modules ? À quel moment peut-on faire travailler les élèves sur ordinateur sans utiliser les modules ? Peut-on se rajouter une heure pour faire un découpage ? (8)
6. En module, doit-on prévoir une séance « particulière » à chaque fois ou peut-on faire une séance d'exercices ? (4)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Nicolas Chekroun, Vincent Dambreville et Céline Goujon. Compte tenu de l'absence de deux des membres du trinôme, cet exposé est reporté à la semaine prochaine.

b) La deuxième recherche dans les *Archives* a trait à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'axiome de Wallis*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse à la question ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

En quoi l'axiome de Wallis est-il pertinent pour l'étude de la géométrie ?

• Cette recherche est confiée au binôme formé de Vincent Boilard, Hamdoune Lazrek et Fanny Devaux.

Commentaires : on a insisté sur le fait que l'axiome de Wallis, qui est équivalent au 5^e axiome d'Euclide, est un ingrédient de la théorie qui fonde et qui justifie le travail expérimental en géométrie.

Les deux trinômes qui ont exposé lors de la séance du 7 octobre ont explicité en quoi la séance précédente leur a permis de modifier leurs praxéologies ou d'en créer de nouvelles.

À la faveur de ce travail, on a examiné rapidement les deux questions suivantes :

L'aide individualisée ne profite pas à certains de mes élèves très en difficulté. Peut-on arrêter de les faire venir ?Comment justifier cet « abandon » ? Comment justifier auprès des élèves qu'un élève ayant eu 12 au DS soit inscrit en aide alors qu'un autre ayant eu 5 ne soit pas inscrit ? (2de, 10)

Compte tenu des textes sur l'aide individualisée, il est anormal de priver d'aide individualisée les élèves qui en ont le plus besoin... Il faut prendre garde au fait que les élèves, et surtout les élèves les plus en difficulté, sont des systèmes « à évolution lente » et qu'il faut en nombre de cas ne pas s'arrêter aux premiers obstacles. En outre, maintenir les contraintes en place est une partie essentielle du rôle du professeur

J'ai un élève handicapé moteur en 5^e ; lorsque je corrige ses devoirs, je suis beaucoup plus souple avec lui; il a des difficultés à écrire, et de ce fait, à construire des figures géométriques. Je lui demande moins de justifications (par exemple). J'ai rencontré la mère de cet élève qui est de mon avis, la principale du collège est de cet avis aussi. Cependant, l'AVS qui est en classe avec lui, est sans cesse en train de me dire qu'il ne faut pas, qu'il doit être pénalisé comme les autres. Qu'en penser ? Quelle attitude dois-je adopter ? (JF, 5^e, 4^e et 3^e, 9)

Comme nous l'avons vu en ce qui concerne les élèves dyslexiques, il faut faire très attention de ne pénaliser les élèves souffrant de handicap en adoptant avec eux une attitude par trop compassionnelle. Ainsi dans le cas évoqué, c'est sans doute l'AVS qui s'approche le plus de ce qu'il faut adopter : il s'agit de trouver une stratégie qui permet de pallier au mieux le handicap d'écriture, mais qui ne soit pas au détriment de l'étude des mathématiques comme l'est la technique consistant à le priver d'une partie du travail de justification. On peut envisager par exemple que cet élève ait à sa disposition un (petit) ordinateur portable muni du logiciel Geogebra sur lequel il fasse les figures, ou encore qu'il décrive à l'AVS la construction de la figure, celui-ci l'exécutant.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 11 : mardi 9 décembre 2008

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Forum des questions // 2. Recherches dans les archives // 3. Observation, analyse et évaluation

1. Forum des questions

Vecteurs et repérage

Je prépare mon cours sur les vecteurs. Il est précisé dans le programme que la colinéarité des vecteurs et l'alignement de trois points sont étudiés « un repère étant fixé ». Mon PCP tient à ce que je fasse du calcul vectoriel sans faire intervenir les coordonnées. Quels sont les avantages et les inconvénients à séparer calcul vectoriel et géométrie analytique ? (2de, 9)

Sur le thème « Repères et vecteurs » en classe de seconde, le document d'accompagnement précise : « On définira la multiplication d'un vecteur par un réel indépendamment du repérage ». Il encourage cependant à garder la notion de repérage comme base de cette étude. Comment motiver alors la multiplication d'un vecteur par un réel ? (2de, 10)

1. La partie consacrée à la géométrie du programme de 2de comporte d'emblée l'injonction suivante :

Le calcul vectoriel et analytique est limité au minimum : entretien des acquis du collège ; utilisation en physique.

En matière de repérage et de vecteurs, on y trouve les notations suivantes :

Contenus

Repérage dans le plan.

Multiplication d'un vecteur par un réel

Capacités attendues

Repérer des points d'un plan, des cases d'un réseau carré ou rectangulaire ; interpréter les cartes et les plans. Un repère étant fixé, exprimer la colinéarité de deux vecteurs ou l'alignement de trois points.

Commentaires

On pourra réfléchir aux avantages des divers types de repérage. On évoquera, en comparant les repérages sur la droite, dans le plan (voire sur la sphère ou dans l'espace), la notion de dimension.

On n'utilisera le calcul vectoriel que pour faciliter le repérage des points, justifier le calcul de coordonnées et caractériser des alignements.

Et le document d'accompagnement inclut, quant à lui, le développement ci-après :

Repères et vecteurs

Le programme met nettement l'accent sur la notion de repérage : on a voulu assurer à l'ensemble des élèves, quelle que soit leur orientation ultérieure, la maîtrise indispensable en ce domaine qu'exigent aussi bien l'interprétation de plans et de cartes que l'utilisation de tableurs ou la compréhension des représentations graphiques.

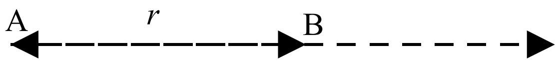
La place du calcul vectoriel est réduite ; celui-ci est maintenu par souci de cohérence avec les choix faits dans le programme de collège, pour permettre d'entretenir les acquis (les vecteurs y sont introduits à partir des translations et ensuite définis en termes de direction, sens et longueur) et fournir l'indispensable pour résoudre les problèmes de repérage ; le choix a été fait de réserver à la classe de 1re le développement de la géométrie vectorielle pour tous les élèves dont le cursus l'exigera.

On définira la multiplication d'un vecteur par un réel indépendamment du repérage ; la définition étant acquise, ainsi que ses propriétés et sa traduction en terme de colinéarité de vecteurs ou d'alignement de points, on l'appliquera dans le seul cadre de la géométrie analytique.

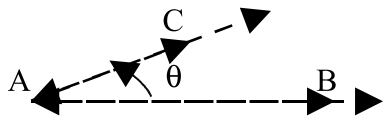
2. On examinera ci-dessous un extrait des archives du Séminaire (2001-2002)

Il est donc clair que la notion « générale » de ***repérage*** se voit allouée une place non négligeable dans l'actuel programme de 2de. Il s'agit là d'une notion qui permet de ***repenser*** tout un ensemble de « gestes » géométriques plus traditionnels, qu'on peut en fait regarder comme participant du repérage.

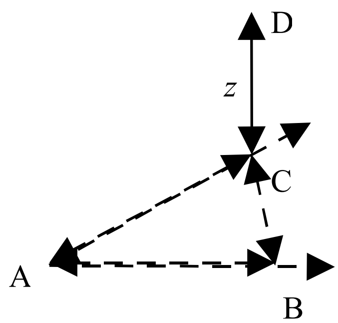
① Ainsi, déterminer la distance r de deux points A et B dans un espace plan, c'est (par exemple) repérer le point B par rapport au système de coordonnées polaires dont le pôle est A, et dont l'axe est la droite (AB) orientée de A vers B.



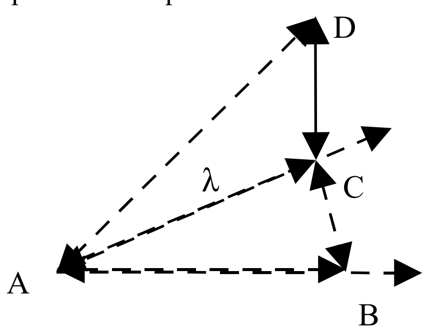
② Déterminer un angle , c'est repérer la seconde coordonnée du point C dans le système de coordonnées polaires identique au précédent.



③ De même encore, repérer la hauteur d'un point D c'est repérer D (par exemple) dans le système de coordonnées cylindriques issu du système de coordonnées polaires indiqué pus haut.



④ Dans le cas précédent, la détermination de l'angle permettrait le repérage de D dans le système de coordonnées sphériques associé au système de coordonnées polaires indiqué.



– Il faut alors souligner que la question du repérage ***précède*** celles des systèmes de coordonnées et des repères, et en particulier ***précède la question des vecteurs***. De fait, dans les programmes de collège, la question du repérage organise tout un ***secteur*** intitulé précisément ***Repérage, distances et angles*** :

Classe de 6^e^
Abscisses positives sur une droite graduée.
Repérage par les entiers relatifs, sur une droite graduée (abscisse) et dans le plan (coordonnées).
Classe de 5^e^
Repérage sur une droite graduée, distance de deux points. Repérage dans le plan (coordonnées).
Inégalité triangulaire.
Classe de 4^e^
Relation de proportionnalité : représentation graphique.
Théorème de Pythagore et sa réciproque.
Distance d'un point à une droite. Tangente à un cercle.
Cosinus d'un angle aigu.
Classe de 3^e^
Représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine.
Coordonnées du milieu d'un segment.
Coordonnées d'un vecteur.
Distance de deux points.
Trigonométrie dans le triangle rectangle.

– Cette logique des programmes reprend l'ordre historique : les vecteurs apparaissent tardivement, et sont d'abord un moyen de « repérage ».

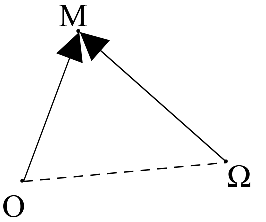
① Les manuels d'il y a un demi-siècle appelaient d'ailleurs ***repère d'un point*** M par rapport à une origine O le vecteur , en soulignant la bijection entre points du plan et vecteurs. On établissait alors le théorème fondamental suivant :

« Un vecteur [= bipoint] est égal au repère de son extrémité diminué du repère de son origine »

En d'autres termes, on disposait dès lors de l'égalité $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{OB}$ – $\overrightarrow{OA}$, qui s'écrit encore $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{AO}$ + $\overrightarrow{OB}$ (« relation de Chasles »).

② La technologie des vecteurs permet la création de ***techniques d'une puissance redoutable***.

❶ Soit un repère cartésien d'origine O (où se trouve un certain observateur). On a repéré un point par ses coordonnées (x, y). On voudrait connaître ses coordonnées par rapport à un autre observateur, situé en Ω.



Pour cela, on détermine le « repère de M » par rapport à Ω : $\overrightarrow{\Omega M}$ = $\overrightarrow{OM}$ – $\overrightarrow{O\Omega}$. Si Ω a pour coordonnées (ξ, ζ), les coordonnées de M par rapport à Ω sont (x–ξ, y–ζ).

❷ Supposant établis un certain nombre de résultats clés du calcul vectoriel élémentaire, considérons un parallélogramme ABCD. On a :

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC};$$

$$\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

Il vient donc : $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{CO}$. Un manuel d'autrefois concluait alors en ces termes (où la notation |AB| désigne simplement la distance AB) :

« Les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{CO}$ qui ont en commun le point O sont opposés. Donc par définition :

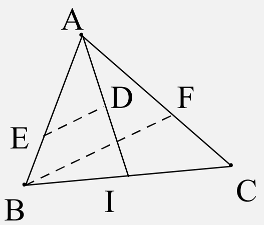
1° les points A, O, et C sont alignés ;

2° |AO| = |CO|.

Ainsi O est aussi le milieu de la diagonale AC. »

– L'exemple précédent peut être interprété en termes de repérage : par rapport au centre O, les extrémités d'une diagonale d'un parallélogramme sont symétriques l'une de l'autre. Au demeurant, le programme indique bien que la technologie vectorielle peut être utilisée pour établir l'alignement de points. En revanche, le changement de programme est certainement l'occasion de se défaire d'une technique dont la mise en œuvre a tourmenté des générations de lycéens, ainsi que d'une partie du stock de problèmes à laquelle elle était appliquée, où « l'objectif est de démontrer des égalités vectorielles en utilisant la relation de Chasles », par le choix « judicieux » d'une suite compositions et de décompositions vectorielles. Il existe en effet une technique beaucoup plus efficace, fondée sur un fait fondamental, le fait que tout vecteur peut s'exprimer à l'aide de trois points non alignés du plan, ou, en d'autres termes, que ***le plan est de dimension 2***. C'est cette technique qu'illustre l'exemple ci-après.

Soit un triangle ABC, I le milieu de [BC], D le milieu de [AI]. On définit les points E et F par : $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$. Démontrer que les droites (ED) et (BF) sont parallèles.



On a : $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right)-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=-\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Par ailleurs, $\boldsymbol{\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{12}{5}\left(-\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{12}{5}\left(-\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{12}{5}\overrightarrow{ED}}$. D'où la conclusion attendue.

3. Ce dernier exemple met en évidence la technique qu'il s'agit de faire émerger : pour montrer que les droites (ED) et (BF) sont parallèles, on va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires, et pour cela repérer ces deux vecteurs par rapport à deux vecteurs connus, soit encore exprimer les vecteurs dans un repère, le repère $\left(A\,,\,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$ ici, la donnée des deux égalités fixant de fait le repère de travail.

On peut bien entendu modifier cette technique pour la rendre « visiblement » analytique : on exprimera alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BF}$ dans le repère $\left(A\,,\,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$, ce qui conduira à l'obtention des deux égalités vectorielles de la même façon que précédemment : $\overrightarrow{ED}=-\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$. Dans le repère $\left(A\,,\,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{ED}$ a ainsi $\left(-\frac{5}{12}\,;\,\frac{1}{4}\right)$

pour coordonnées et $\overrightarrow{BF}\left(-1\ ;\frac{3}{5}\right)$. Le rapport des abscisses valant $\frac{-\frac{5}{12}}{-1}=\frac{5}{12}$ et le rapport des ordonnées $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{12}$, les vecteurs sont colinéaires.

4. On voit ainsi en quoi la multiplication d'un vecteur par un réel est essentielle en matière de repérage. La difficulté signalée par la deuxième question n'en est une que si l'on superpose l'émergence de l'OM et sa mise en forme : ce que dit le document d'accompagnement, c'est que si l'on a à faire émerger la multiplication d'un vecteur par un réel comme ingrédient essentiel d'une technique de repérage, la définition que l'on en donnera dans la synthèse devra, elle, être indépendante de ce contexte, comme l'est par exemple la définition suivante issue d'un ouvrage de seconde :

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel quelconque. On appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k le vecteur $k\vec{u}$ défini de la façon suivante :

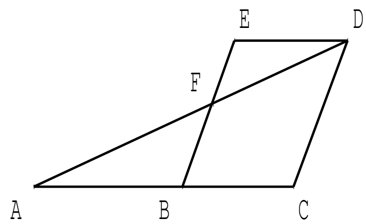
si $\vec{u}=0$ ou $k=0$, alors $k\vec{u}=0$;

si $\vec{u}\neq 0$ et $k>0$, alors $k\vec{u}$ est le vecteur dont la direction est celle de $\vec{u}$, le sens est celui de $\vec{u}$, la norme est égale à celle de $\vec{u}$ multipliée par k ;

si $\vec{u}\neq 0$ et $k<0$, alors $k\vec{u}$ est le vecteur dont la direction est celle de $\vec{u}$, le sens est opposé à celui de $\vec{u}$, la norme est égale à celle de $\vec{u}$ multipliée par $-k$.

Peut-on faire du calcul littéral en géométrie (en classe de 2de) ? J'ai proposé l'exercice ultra-classique suivant (application du théorème de Thalès) :

On a six points A, B, C, D, E, F tels que BCDE est un parallélogramme, B $\in$ [AC], {F} = (AD) $\cap$ (BE). On pose $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$. Montrer que $EF=\frac{ab}{a+b}$.



Le maître de stage me dit de n'utiliser que des longueurs explicites : calculer avec des longueurs indéfinies « c'est une époque révolue ». Pourtant ici le calcul littéral me semble pertinent : on peut calculer facilement $BF=\frac{ac}{a+b}$ et en déduire $EF=\frac{ab}{a+b}$. Pourquoi ces nombres sont-ils de la même forme? Le fait qu'on obtienne deux expressions semblables suggère une autre méthode de résolution : on peut compléter ACD en un parallélogramme pour trouver tout de suite EF. Ce serait resté invisible avec des valeurs numériques. (10, 2de)

La situation proposée est effectivement intéressante, mais la difficulté des élèves devant la manipulation de formules est réelle. Il faut donc essayer de contourner cette difficulté par la manière de faire étudier la situation. On demande aux participants d'y réfléchir pour la prochaine séance.

À suivre

Utilisation des TICE et C2i2e

On reprendra d'abord brièvement deux questions que nous n'avons pas eu le temps d'examiner collectivement lors de la séance 9 :

Utiliser la calculatrice

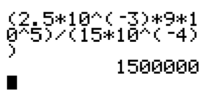
① Les élèves n'ont pas une pratique suffisante de leurs calculatrices (de divers modèles). Est-il raisonnable de consacrer une heure de classe spécialement dédiée à la pratique de la calculatrice (plutôt en demi-groupes)? Dois-je utiliser le modèle unique disponible dans l'établissement ? Ou vaut-il mieux donner des exercices spécifiques, réguliers, à faire chez soi, mais sans aide ? (PAR, 2^{de}, 9)

Comme en d'autres matières, les élèves ne peuvent pas avoir une pratique spontanée : il s'agit donc de les instruire en cette matière. Il ne s'agit pas pour autant de faire des séances uniquement fondées sur l'utilisation de la calculatrice mais d'expliciter, au fur et à mesure des besoins, les techniques relatives à un certain nombre de types de tâches. Ainsi on a vu précédemment que le tracé d'une courbe devait intégrer une étape « à la calculatrice » pour laquelle il s'agit de disposer d'une technique, dont certaines étapes (notamment celle du paramétrage de la fenêtre graphique) s'enrichiront au fur et à mesure que l'on explorera des spécimens.

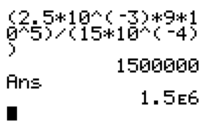
Si l'établissement dispose d'une calculatrice, c'est celle-ci qu'il faut utiliser de manière privilégiée. On pourra cependant prévoir une partie d'une séance en demi-groupe pour adapter les techniques aux modèles des élèves, en leur faisant préparer cette séance chez eux pour contrôler la dépense de temps.

② Je suis confrontée au problème suivant : dans les exercices types du brevet de la forme suivante $\dfrac{a\times 10^n \times c \times 10^m}{d\times(10^p)^q}$, les élèves se jettent sur la calculette car elle donne le résultat sous forme d'écriture scientifique. Ils se débrouillent pour faire des étapes, on y croirait presque ! Doit-on leur interdire l'usage de la calculette bien qu'ils puissent l'avoir au brevet ? (NB, 6^e et 3^e, 8)

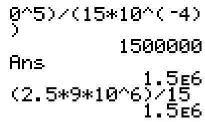
On ne peut pas priver les élèves du secours que donne la calculatrice dans le travail d'anticipation et de contrôle des calculs. Il faut au contraire s'en saisir et l'intégrer clairement dans les techniques fabriquées. À propos du type de tâches évoqué dans la question, supposons que l'on ait à calculer $\dfrac{2{,}5\ 10^{-3}\ 9\ 10^5}{15\ 10^{-4}}$. Une calculatrice donne d'abord :



Puis en mettant en écriture scientifique,



On voit donc que le dénominateur doit pouvoir se simplifier avec le numérateur, et que doit pouvoir apparaître au numérateur 10^6. Au numérateur, $10^{-3}\ 10^5 = 10^{-3}\ 10^6\ 10^{-1} = 10^{-4}\ 10^6$. On obtient donc que $\dfrac{2{,}5\ 10^{-3}\ 9\ 10^5}{15\ 10^{-4}} = \dfrac{2{,}5\ 9\ 10^6}{15}$ ce que l'on peut vérifier à la calculatrice :



On a ensuite $15 = 5 \times 3$ et l'on doit faire apparaître un facteur 5 et un facteur 3 au numérateur ; $2,5 \times 9 = 0,5 \times 5 \times 3 \times 3 = 0,5 \times 3 \times 15 = 1,5 \times 15$ et on obtient finalement le résultat cherché.

On obtient ainsi une technique pilotée par le résultat de la calculatrice, celle-ci permettant d'anticiper les transformations d'écriture à effectuer.

On les complétera par une étude rapide des questions suivantes :

1. Concernant la validation du B2i en 4^e^,est-ce qu'on doit prévoir une séance où on fait un « test » sur les ordinateurs ou est-ce que la validation se fait tout au long de l'année ? (4^e^, 10)
2. Combien de séances de TICE peut-on se permettre de faire en classe de seconde dans l'année ? (2^de^, 11)
3. Est-ce qu'il faut garder une épreuve écrite (par exemple, impressions ou fichiers) des activités TICE que j'effectue régulièrement en salle informatique avec mes élèves de 5^e^ ? (5^e^, 11)
4. L'usage des TICE en classe de seconde se limite souvent aux calculatrices graphiques des élèves pour les parties calcul et fonctions et statistiques. Certains élèves ont des difficultés pour pouvoir acheter ces calculatrices, est-ce du ressort de l'assistante sociale de l'établissement ? (2^de^, 11)
5. Le lycée avait demandé aux élèves de seconde d'acheter la TI 82 Stat. Tous les élèves l'ont achetée sauf une élève. Comment gérer le problème ? (2^de^, 11)

1. Comme nous l'avons déjà dit en une occasion au moins (voir séance 8), l'étude des compétences du B2i doit s'intégrer dans le travail d'étude des mathématiques ; il n'y a donc pas lieu de prévoir formellement une heure qui a pour objet l'évaluation de ces compétences. En revanche, le professeur peut se donner un point de rendez-vous pour évaluer telle compétence « B2i » qui aura été suffisamment travaillée en la mettant à l'œuvre pour réaliser l'étude de telle OM (l'objet de la premier de la séance étant clairement l'étude de l'OM). S'il s'avère que certains élèves ne sont encore pas au point, il remettra à l'œuvre cette compétence dans l'étude d'une autre OM.

2. On notera d'abord que la formulation de la question donne le sentiment que les séances TICE seraient une sorte de supplément que l'on s'autorise au détriment de ce qui constitue l'objet du travail, l'étude des mathématiques au programme. On a déjà vu qu'il n'en est rien : l'utilisation des TICE figure au programme d'étude du collège et du lycée, et cela dans deux directions : d'une part intégrée dans des OM, où elle permet notamment de réaliser les étapes de vérification et de contrôle ; d'autre part dans la réalisation du moment exploratoire et du moment technologico-théorique, notamment par l'intermédiaire de l'expérimentation. Voici par exemple ce que note l'introduction du programme de seconde :

L'informatique, devenue aujourd'hui absolument incontournable, permet de rechercher et d'observer des lois expérimentales dans deux champs naturels d'application interne des mathématiques : les nombres et les figures du plan et de l'espace. Cette possibilité d'expérimenter, classiquement plus propre aux autres disciplines, doit ouvrir largement la dialectique entre l'observation et la démonstration, et, sans doute à terme, changer profondément la nature de l'enseignement. Il est ainsi nécessaire de familiariser le plus tôt possible les élèves avec certains logiciels ; en seconde l'usage de logiciels de géométrie est indispensable. Un des apports majeurs de l'informatique réside aussi dans la puissance de simulation des ordinateurs ; la simulation est ainsi devenue une pratique scientifique majeure : une approche en est proposée dans le chapitre statistique.

Le point de vue qu'il s'agit d'adopter est ainsi résolument un point de vue fonctionnel : on fera autant de séances TICE qu'il s'avèrera nécessaire à la mise en place des OM au programme de la classe.

3. Dans cette perspective, on notera que, comme pour l'activité d'enseignement ordinaire, il convient de garder des traces écrites des travaux effectués : l'introduction du programme de collège contient d'ailleurs l'injonction suivante :

Le travail en classe proprement dit doit être complété par des séances régulières en salle informatique où l'élève utilise lui-même les logiciels au programme (tableur, grapheur, logiciel de géométrie). Ces séances de travaux pratiques sur ordinateur doivent toujours avoir pour objectif l'appropriation et la résolution d'un problème mathématique. Tout travail en salle informatique doit aboutir à la production d'un écrit, manuscrit ou imprimé.

4. et **5.** On notera d'abord que, comme on l'a souligné plus haut, la limitation des usages mentionnés ne doit pas être la règle : l'utilisation de logiciels de géométrie figure explicitement aux programmes des classes de collège et de lycée, comme celle des tableurs par exemple – même si l'usage des calculatrices permet d'intégrer plus facilement les TICE aux OM puisque les élèves en dispose de manière ordinaire.

Le problème signalé de non disponibilité d'une calculatrice graphique en classe de seconde est un problème complexe : même si le programme nécessite que les élèves en aient une, en effet, rien ne peut obliger telle famille à en acquérir une. On peut ainsi envisager de consacrer une partie du budget à acquérir un certain nombre de calculatrices qui pourront être prêtées, voire demander une subvention pour ce faire au conseil régional dont dépendent les lycées, ou encore demander un prêt d'un lot de calculatrices auprès d'un constructeur.

Peut-on avoir des précisions sur la validation du C2i2e ? Quel est le commentaire à faire lorsqu'on poste un document dans le portfolio ? Compétences visées ? Descriptif de la situation ? (4e, 10)

On trouvera ci-dessous le référentiel qui figure dans la Circulaire nº 2005-222 du 19 décembre 2005.

I – Le référentiel national du C2i ® niveau 2 "enseignant"

A – Compétences générales liées à l'exercice du métier

Domaines	Compétences
A.1. **Maîtrise de l'environnement numérique professionnel**	1. Identifier les personnes ressources TIC et leurs rôles respectifs, dans l'école ou l'établissement, et en dehors (circonscription, bassin, académie, niveau national...).
	2. S'approprier différentes composantes informatiques (lieux, outils...) de son environnement professionnel.
	3. Choisir et utiliser les ressources et services disponibles dans un environnement numérique de travail (ENT).
	4. Choisir et utiliser les outils les plus adaptés pour communiquer avec les acteurs et usagers du système éducatif.
	5. Se constituer et organiser des ressources en utilisant des sources professionnelles.

A.2. **Développement des compétences pour la formation tout au long de la vie**	1. Utiliser des ressources en ligne ou des dispositifs de formation ouverte et à distance (FOAD) pour sa formation.
	2. Se référer à des travaux de recherche liant savoirs, apprentissages et TICE.
	3. Pratiquer une veille pédagogique et institutionnelle, notamment par l'identification des réseaux d'échanges concernant son domaine, sa discipline, son niveau d'enseignement.
A.3. **Responsabilité professionnelle dans le cadre du système éducatif**	1. S'exprimer et communiquer en s'adaptant aux différents destinataires et espaces de diffusion (institutionnel, public, privé, interne, externe...).
	2. Prendre en compte les enjeux et respecter les règles concernant notamment : – la recherche et les critères de contrôle de validité des informations ; – la sécurité informatique ; – le filtrage internet.
	3. Prendre en compte les lois et les exigences d'une utilisation professionnelle des TICE concernant la protection des libertés individuelles et de la sécurité des personnes, notamment : – la protection des libertés individuelles et publiques ; – la sécurité des personnes ; – la protection des mineurs ; – la confidentialité des données ; – la propriété intellectuelle ; – le droit à l'image.
	4. Respecter et faire respecter la charte d'usage de l'établissement, dans une perspective éducative d'apprentissage de la citoyenneté.

B - Compétences nécessaires à l'intégration des TICE dans sa pratique

Domaines	Compétences
B.1. **Travail en réseau avec l'utilisation des outils de travail collaboratif**	1. Rechercher, produire, partager et mutualiser des documents, des informations, des ressources dans un environnement numérique.
	2. Contribuer à une production ou à un projet collectif au sein d'équipes disciplinaires, interdisciplinaires, transversales ou éducatives.
	3. Concevoir des situations de recherche d'information dans le cadre des projets transversaux et interdisciplinaires.
B.2. **Conception et préparation de contenus d'enseignement et de situations d'apprentissage**	1. Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE.
	2. Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de classe.
	3. Intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation.
	4. Préparer des ressources adaptées à la diversité des publics et des situations pédagogiques en respectant les règles de la communication.

B.3. ***Mise en œuvre pédagogique***	1. Conduire des situations d'apprentissage en tirant parti du potentiel des TIC : – travail collectif, individualisé, en petits groupes ; – recherche documentaire.
	2. Gérer l'alternance, au cours d'une séance, entre les activités utilisant les TICE et celles qui n'y ont pas recours.
	3. Prendre en compte la diversité des élèves, la difficulté scolaire en utilisant les TICE pour gérer des temps de travail différenciés, en présentiel et/ou à distance..
	4. Utiliser les TICE pour accompagner des élèves, des groupes d'élèves dans leurs projets de production ou de recherche d'information.
	5. Prendre une décision pédagogique pertinente face à un incident technique.
B.4. **Mises en œuvre de démarches d'évaluation**	1. Identifier les compétences des référentiels TIC (B2i ou C2i) mises en œuvre dans une situation de formation proposée aux élèves, aux étudiants.
	2. S'intégrer dans une démarche collective d'évaluation des compétences TIC.
	3. Exploiter les résultats produits par des logiciels institutionnels d'évaluation des élèves.
	4. Concevoir des démarches d'évaluation et de suivi pédagogique à l'aide de logiciels appropriés.

Pour obtenir le C2i2e, il s'agit de valider 5 des 9 items figurant en vert ci-dessus et les 18 autres. C'est plutôt les formateurs chargés des TICE à l'IUFM qui s'occuperont de valider les items du groupe A alors que les formateurs « disciplinaires » se chargeront de la validation des items du groupe B. Pour les professeurs stagiaires de l'enseignement privé, on reproduit ci-dessous la liste des items dont FORMIRIS est censé s'occuper :

A11 ; A12 ; A13 ; A15 ; A21 ; A31 ; A32 ; A33 ; A34 ; B11 ; B12 ; B13 ; B31 ; B 33 ; B34.

L'IUFM peut cependant valider des items parmi ceux-ci que FORMIRIS n'aurait pas validés : nous suggérons donc aux élèves-professeurs concernés de déposer une copie de leur travail sur ces items dans le portfolio IUFM.

Il s'agit de mettre dans le portfolio des pièces, commentées, manifestant l'acquisition de chacun des items : il peut bien entendu y avoir plusieurs « dossiers » par items, ou encore un dossier correspondant à plusieurs items. Le commentaire à apporter doit contenir une description rapide de la séance dans laquelle les TICE ont été utilisées, et de l'utilisation qui était prévue, ainsi que quelques éléments d'analyse et d'évaluation de la séance. Nous reviendrons ultérieurement sur ces aspects.

Le portfolio étant constitué sur Espar, il faut utiliser au mieux les ressources de cet ENT pour le structurer.

À suivre

2. Recherche dans les archives

Un exposé est au programme de cette séance.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant au dispositif des ***modules*** en classe de Seconde ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. J'ai une classe très hétérogène. Je me demande s'il ne faudrait pas constituer des groupes de travail pendant l'heure de module. Comment constituer de tels groupes ? (5)

2. En module, un groupe a progressé plus rapidement que l'autre. Peut-on le prévoir ? Comment anticiper ? (2)

3. Comment aborder les modules en seconde ? (0)

4. Que faire en module (classe de 2^{de}) ? Activité et synthèse me semblent hors de question… (2)

5. Utilisation des modules ? À quel moment peut-on faire travailler les élèves sur ordinateur sans utiliser les modules ? Peut-on se rajouter une heure pour faire un découpage ? (8)

6. En module, doit-on prévoir une séance « particulière » à chaque fois ou peut-on faire une séance d'exercices ? (4)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Nicolas Chekroun, Vincent Dambreville et Céline Goujon.

Commentaires
On rappelle la règle pour les exposés : il s'agit de rapporter des éléments $\mathcal{R}^{\Diamond}$ issus des archives du Séminaire de façon à ce que le collectif des participants puisse se fabriquer une réponse $\mathcal{R}^{\heartsuit}$ aux questions proposées.

3. Observation, analyse et évaluation

3.1. Structure et contenu de la séance

La séance observée se situe dans l'étude du domaine « Nombres et calcul », et plus précisément du secteur du « calcul littéral » en classe de 4^e. Elle participe de l'étude du thème « Développement » de ce secteur, dont on trouvera ci-dessous un extrait du programme de la classe.

2. Nombres et calculs
La résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le domaine littéral. Les exercices de technique pure ne sont pas à privilégier.
(…)
Le calcul littéral qui a fait l'objet d'une première approche en classe de cinquième, par le biais de la transformation d'écritures, se développe en classe de quatrième, en veillant à ce que les élèves donnent du sens aux activités entreprises dans ce cadre, en particulier par l'utilisation de formules issues des sciences et de la technologie.

Contenus	Compétences	Exemples d'activité, commentaires
2.2. Calcul littéral Développement	– Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant	L'apprentissage du calcul littéral doit être conduit très progressivement à partir de

	aux variables des valeurs numériques. – Réduire une expression littérale à une variable, du type : $3x$ - $(4x$ - $2)$, $2x^2$ - $3x + x^2$. (…)	situations qui permettent aux élèves de donner du sens à ce type de calcul. L'intégration des lettres et des nombres relatifs dans les expressions algébriques représente une difficulté importante qui doit être prise en compte. À cette occasion, le test d'une égalité par substitution de valeurs numériques aux lettres prend tout son intérêt. Le travail proposé s'articule autour de trois axes – utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; – utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ; – utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique). La transformation d'une expression littérale s'appuie nécessairement sur la reconnaissance de sa structure (somme, produit) et l'identification des termes ou des facteurs qui y figurent. L'attention de l'élève sera attirée sur les formes réduites visées du type $ax+b$ ou $ax^2 + bx + c$. Les situations proposées doivent exclure tout type de virtuosité et répondre à chaque fois à un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique, établissement d'un résultat général). En particulier, les expressions à plusieurs variables introduites a priori sont évitées. (…)

La séance se compose de 4 épisodes de longueurs inégales.

Après une entrée en classe structurée, la classe commence par faire un bilan du travail de la séance ayant eu lieu le matin, travail qui portait sur l'évaluation, en utilisant un tableur, d'un programme de calcul. On en vient ensuite à une activité dont le travail comprend deux épisodes : le premier où les élèves ont à calculer la valeur d'un programme de calcul, une mise en commun des résultats amenant à conjecturer qu'il donne le double du nombre de départ ; puis le second où les élèves travaillent par équipes à conjecturer une autre expression de programmes de calcul, avec une utilisation du tableur, ce travail étant mis en commun à la fin de la séance.
La séance se termine, après la sonnerie, par la donnée du travail à faire hors classe.

Nous avons observé et commenté les deux premiers épisodes. Nous en rédigerons l'analyse et des éléments d'évaluation lors de la prochaine séance.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

NB : à la suite d'un copier/coller malheureux, une question dont on devait continuer l'étude n'apparaissait pas dans les notes de la séance 11. Cet oubli a été réparé, et nous reprendrons l'étude de cette question lors de la séance 13.

➔ Séance 12 : mardi 16 décembre 2008

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine //1. Observation, analyse et évaluation // 2. Forum des questions // 3. Problématique et fonctionnement du Séminaire

0. Questions de la semaine

Des questions sur la ***fabrication des organisations mathématiques***, par exemple :

J'ai l'impression que les élèves ont en général du mal avec les puissances d'un nombre relatif alors que les puissances de 10 sont plus « facilement » maîtrisées. Dans ce cas, vaut-il mieux commencer ce thème par le cas particulier des puissances de 10 ou alors rester sur le « schéma usuel » du cas général, puis particulier ? (12, 4^{e})

Des questions sur les ***conseils de classe*** qui prennent différentes formes, par exemple :

Sur quels critères doit-on se baser pour émettre un avis favorable ou défavorable pour un passage en première S ? Un élève peut-il aller contre l'avis du conseil de classe et « forcer » le passage en S malgré un avis défavorable ? (12, 2de)

Faute de temps pour le moment, on renvoie au document « Changer le conseil de classe » figurant sur le site, dans la rubrique *Documents* de la page d'accueil.

Des questions qui ont déjà été travaillées ! Par exemple :

Plusieurs élèves qui vont en soutien le soir font leurs exercices de math aidés par des professeurs (de sciences physiques par exemple). Il arrive que leurs exercices contiennent des erreurs ou utilisent des techniques non vues. Les élèves ne comprennent pas que ça puissent être faux alors qu'ils les ont fait avec un professeur. Comment réagir face à cette situation ? (12, 4^{e})

On renvoie donc au travail qui a été fait à ce propos dans le séminaire ainsi qu'à l'étude des notices déjà distribuées.

Des questions évoquent l'avancée du temps de l'étude sous diverses formes, par exemple :

Lorsque de nombreux élèves sont absents (grèves, à partir de combien d'élèves minimum présents peut-on poursuivre ce qui était prévu ? (12, 2^{de})
Mes élèves trouvent que cela va trop vite, qu'ils ont trop de travail. La question est la suivante : faut-il conserver le rythme ou ralentir ? (12, 2^{de})

Nous les aborderons au mois de janvier.

1. Observation, analyse et évaluation

On rappelle d'abord la structure et contenu de la séance qui figurait dans les notes de la dernière séance.

La séance observée se situe dans l'étude du domaine « Nombres et calcul », et plus précisément du secteur du « calcul littéral » en classe de 4^e. Elle participe de l'étude du thème « Développement » de ce secteur, dont on trouvera ci-dessous un extrait du programme de la classe.

2. Nombres et calculs
La résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le domaine littéral. Les exercices de technique pure ne sont pas à privilégier.
(…)
Le calcul littéral qui a fait l'objet d'une première approche en classe de cinquième, par le biais de la transformation d'écritures, se développe en classe de quatrième, en veillant à ce que les élèves donnent du sens aux activités entreprises dans ce cadre, en particulier par l'utilisation de formules issues des sciences et de la technologie.

Contenus	Compétences	Exemples d'activité, commentaires
2.2. Calcul littéral Développement	– Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques. – Réduire une expression littérale à une variable, du type : $3x - (4x - 2)$, $2x^2 - 3x + x^2$.	L'apprentissage du calcul littéral doit être conduit très progressivement à partir de situations qui permettent aux élèves de donner du sens à ce type de calcul. L'intégration des lettres et des nombres relatifs dans les expressions algébriques représente une difficulté importante qui doit être prise en compte. À cette occasion, le test d'une égalité par substitution de valeurs numériques aux lettres prend tout son intérêt. Le travail proposé s'articule autour de trois axes – utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; – utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ; – utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique). La transformation d'une expression littérale s'appuie nécessairement sur la reconnaissance de sa structure (somme, produit) et l'identification des termes ou des facteurs qui y figurent. L'attention de l'élève sera attirée sur les formes réduites visées du

	(…)	type $ax+b$ ou $ax^2 +bx+c$. Les situations proposées doivent exclure tout type de virtuosité et répondre à chaque fois à un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique, établissement d'un résultat général). En particulier, les expressions à plusieurs variables introduites a priori sont évitées. (…)

La séance se compose de 4 épisodes de longueurs inégales.

Après une entrée en classe structurée, la classe commence par faire un bilan du travail de la séance ayant eu lieu le matin, travail qui portait sur l'évaluation, en utilisant un tableur, d'un programme de calcul. On en vient ensuite à une activité dont le travail comprend deux épisodes : le premier où les élèves ont à calculer la valeur d'un programme de calcul (je prends un nombre, je le multiplie par -3 et j'ajoute 8, puis je multiplie le résultat obtenu par 5 et j'ajoute 17 fois le nombre de départ ; enfin je retranche 40), une mise en commun des résultats amenant à conjecturer qu'il donne le double du nombre de départ ; puis le second où les élèves travaillent par équipes à conjecturer une autre expression de programmes de calcul, avec une utilisation du tableur, ce travail étant mis en commun à la fin de la séance.
La séance se termine, après la sonnerie, par la donnée du travail à faire hors classe.

La séance observée , on l'a dit, participe de l'étude du calcul littéral et mobilise, pour ce faire, les programmes de calcul. Est-ce une bonne ou une mauvaise chose ? C'est cette question que nous étudierons ici en examinant les deux extraits ci-après des archives du Séminaire 2004-2005.

Extrait 1

① Partons du commencement. Comme il en va en matière d'arithmétique, de géométrie ou de statistique, l'algèbre se construit comme la science d'un certain ordre de faits, les ***faits algébriques***. Mais l'adjectif « algébrique » est ici opaque. Une assertion géométrique a trait à un « fait spatial » et peut, à ce compte-là, être trouvée ***vraie*** ou ***fausse***. Mais on peut se demander à quoi se réfère, par exemple, « l'assertion » qui s'énonce ainsi :

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx -xy) = x^3+ y^3+ z^3 - 3xyz.$$

Qu'en est-il, de même, de l'assertion selon laquelle $3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2)$? Que signifie le fait de dire – de prétendre – que ces assertions algébriques sont vraies ou fausses ?

② L'algèbre est victime du même phénomène que la géométrie ou la statistique : on y dispose d'une ***théorie toute faite***, dans laquelle on peut déduire les faits algébriques précédents, mais, faute de savoir ***de quoi cette théorie est la théorie***, de quoi nous parlent les assertions algébriques qu'on peut y démontrer, on ne sait pas ***construire*** cette théorie.

❶ S'il n'en était pas ainsi, il n'y aurait guère de raison – on va le voir – pour qu'on s'interroge sur la manière de « faire comprendre » aux élèves pourquoi ***on n'a pas***, par exemple, $3x^2 = 6x$, ou pourquoi ***on a bien*** $4x - 11x = -7x$.

❷ Il est usuel de parler d'***expression*** algébrique, sans que l'on sache ce que cette « expression » ***exprime*** ! Pour qu'il en aille autrement, il convient de partir de ce dont nous parle l'algèbre : $3x^2$ est par exemple l'expression algébrique (ou littérale) d'un ***programme de calcul***, à savoir le programme de calcul qui, étant donné un nombre x, « renvoie » le nombre $3x^2$, et qui, donc, pour $x = 1$, renvoie 3, pour $x = 4$ renvoie 48, etc.

L'algèbre élémentaire est la science ***des programmes de calcul*** (sur les nombres), et en particulier la science ***du calcul sur les programmes de calcul***.

③ La notion de ***programme de calcul*** se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières classes du collège : elle correspond, concrètement, à l'activité consistant à « faire un calcul », c'est-à-dire à opérer sur des nombres d'une manière déterminée, selon un certain programme.

❶ À propos des fonctions ***affines***, le programme de 3e précise par exemple :

Pour des valeurs de a et b numériquement fixées, le processus de correspondance sera aussi explicité sous la forme « je multiplie par a puis j'ajoute b ».

❷ La notion de programme ainsi construite, qui est un objet de la pratique mathématique, reste à ce stade un objet ***non mathématisé***. Si on peut « exécuter un programme de calcul », on ne saurait guère se poser de problème à propos des programmes de calcul, énoncer des théorèmes les concernant, etc. Or c'est précisément tout cela que la mathématisation algébrique de la notion de programme de calcul va permettre de faire.

④ Lorsque la notion d'expression algébrique est dûment introduite au collège comme mathématisant la notion de programme de calcul (arithmétique), en effet, un certain nombre de difficultés « traditionnelles » prennent un tout autre sens – quand elles ne disparaissent pas tout à fait.

❶ Ainsi la question « Que vaut $x + 3$? » devient-elle ***dénuée de sens*** : l'expression $x + 3$ est l'expression algébrique d'un programme de calcul (« Au nombre donné, ajouter 3 ») et n'a donc pas à « valoir » quelque chose.

❷ En revanche, on peut, de manière tout à fait légitime et pertinente, se demander si, par exemple, $x + 3$ et $3x$, « c'est pareil », c'est-à-dire s'il s'agit ou non de deux expressions algébriques, formellement distinctes, de programmes de calcul ***équivalents***.

❸ Non seulement cette question a un sens, mais en outre on dispose pour y répondre d'une technique permettant de trancher. En l'espèce, pour $x = 1$, le programme $x + 3$ « renvoie » 4, tandis que le programme $3x$ renvoie 3 ; par suite, $x+3 \neq 3x$.

❹ Même si cette remarque ne saurait bien sûr être exploitée telle quelle au collège aujourd'hui, on peut noter que les expressions $x + 3$ et $x - 2$, par exemple, qui ne définissent pas des programmes de calcul équivalents sur $\mathbb{N}$, par exemple, sont pourtant équivalentes sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, où l'on a donc $x + 3 \equiv x - 2$. Deux programmes de calcul ne sont donc pas équivalents dans l'absolu, mais relativement à un ***système de nombres*** donné.

⑤ Il convient de souligner que la définition de la notion d'expression algébrique comme formulation symbolique d'un programme de calcul est celle que retiennent tous les ouvrages classiques d'algèbre élémentaire, même si l'expression « programme de calcul » n'y apparaît pas explicitement.

❶ Dans une *Algèbre* publiée en 1932 pour l'enseignement primaire supérieur, on lit ainsi :

On appelle expression algébrique le résultat de une ou plusieurs opérations algébriques non encore effectuées et représentées par les signes conventionnels déjà définis.

❷ Les mêmes auteurs définissent ensuite une notion essentielle dans cette perspective, celle de ***valeur numérique*** d'une expression algébrique :

On appelle valeur numérique d'une expression algébrique, pour certaines valeurs attribuées aux lettres qui y figurent, le nombre que l'on obtient en remplaçant les lettres par leurs valeurs et en effectuant les calculs indiqués.

❸ Ils précisent alors le lien entre ***formule***, ***expression algébrique*** et ***valeur numérique*** d'une expression algébrique :

Chaque fois qu'on a une formule, le second membre est une expression algébrique et, pour calculer la valeur de la quantité fournie par cette formule, on calcule la valeur numérique de l'expression pour certaines valeurs des lettres. Ainsi, par exemple, l'aire S d'un cercle de rayon R est donnée par la formule $S = \pi R^2$ où $\pi = 3{,}1416$. $\pi R^2 = 3{,}1416R^2$ est une expression algébrique.

❹ Les auteurs de l'*Encyclopédie autodidactique Quillet* (1958) écriront semblablement :

Définition. *– On appelle expression algébrique un ensemble de lettres et de nombres réunis entre eux par des signes indiquant une suite d'opérations qu'il faut effectuer.*
Ex. : $3\,a\,b$, $\frac{x-y}{5}$, $3c\sqrt{a+b}$, $(a^2+b)\,(a-b^2)$.
...
Valeur numérique d'une expression algébrique. Soit l'expression $3\,a\,b$. Connaissant les valeurs particulières $a = 2$, $b = 5$, on peut calculer l'expression $3\,a\,b$ en remplaçant les lettres par leur valeur. On a : $3\,a\,b = 3\times2\times5 = 30$. La valeur numérique de $3\,a\,b$ est 30.

❺ Dans ce contexte mathématique, le type de tâches consistant à déterminer la valeur numérique d'une expression algébrique donnée pour un jeu de valeurs donné occupe une place importante, du moins pour les commençants : ainsi l'*Encyclopédie Quillet* propose-t-elle à ses lecteurs de calculer par exemple la valeur numérique des expressions $3a + 2b$, $5a - 3(b + c)$, $2a^2b + 5ab^2$, etc., pour $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$. C'est ce que prévoit encore aujourd'hui le programme de 5e, où figure à titre de compétence exigible le type de tâches suivant :

Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques données.

Il en va de même en classe de 4e, où l'on travaille plus directement encore sur le type de tâches indiqué, comme le précise cet extrait de la rubrique des « Compétences exigibles » :

Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.

⑥ Quels sont les premiers grands types de tâches de l'algèbre élémentaire ?

❶ Un premier type de problèmes est celui du passage de la formulation ***rhétorique*** (ou littéraire, « en mots », sous forme de ***règle***) d'un programme de calcul à la formulation ***symbolique*** (ou littérale), c'est-à-dire à l'expression algébrique de ce même programme de calcul.

❷ La résolution de ce type de problèmes est elle-même poussée en avant par le type de problèmes fondamental suivant :

Étant donné deux programmes de calcul P et Q, reconnaître si P et Q sont équivalents ou non sur un domaine numérique $\mathcal{D}$ donné, c'est-à-dire si l'on a $P(x, y, ...) = Q(x, y, ...)$ pour tous $x, y, ... \in \mathcal{D}$.

C'est ce type de problèmes qui justifie la mathématisation de la notion rhétorique de « règle » par la notion algébrique de « formule » et qui conduit ***à développer le calcul algébrique***.

❸ Supposons ainsi que l'on veuille comparer les deux programmes de calcul P et Q ci-après, dont la formulation, empruntée à un manuel d'algèbre ancien, se coule dans un langage daté :

Programme *P*. Étant donné deux entiers, prendre le quart de l'excès du premier sur le double du second, puis ajouter le double du second.

Programme de calcul *Q*. Étant donné deux entiers, ajouter au premier le sextuple du second, puis diviser par 4.

L'exécution de ces programmes de calcul sur divers couples d'entiers suggère qu'ils sont équivalents. Leur expression algébrique est, respectivement,

$$\frac{x-2y}{4} + 2y \text{ et } \frac{x+6y}{4}.$$

Pour établir leur équivalence, on devra montrer que

$$\vdash_{\text{TAD}} \frac{x-2y}{4} + 2y \equiv \frac{x+6y}{4}$$

ce qui suppose de créer une théorie algébrique adéquate, dans laquelle on puisse établir que l'on a : $\frac{x-2y}{4} + 2y \equiv \frac{1}{4}x - \frac{2y}{4} + 2y \equiv \frac{1}{4}x - \frac{y}{2} + \frac{4}{2}y \equiv \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}y$ et $\frac{x+6y}{4} \equiv \frac{x}{4} + \frac{6y}{4} \equiv \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}y$.

❹ Il est relativement rare, en fait, que l'on ait à comparer deux programmes de calcul *P* et *Q* donnés *a priori*. Très généralement, la tâche mathématique pertinente s'énonce ainsi :

Étant donné un programme de calcul *P*, déterminer un programme de calcul *Q* équivalent à *P* mais plus « simple » que *P*.

Ainsi, on démontrera par exemple que l'on a $\frac{x-2y}{4} + 2y \equiv \frac{x-2y}{4} + \frac{8y}{4} \equiv \frac{x+6y}{4}$, où le premier programme, d'expression algébrique $\frac{x-2y}{4} + 2y$, est ***donné***. Le tout premier usage du calcul algébrique consiste ainsi à « simplifier » l'expression algébrique d'un programme de calcul.

❺ L'énoncé précédent doit être généralisé en y remplaçant « simple » par « plus adéquat », « mieux adapté », l'expression algébrique idoine, dans un travail mathématique déterminé, n'étant pas toujours l'expression la plus « simple ». C'est ce à quoi invite le programme de 2[de] en présentant comme exigible la maîtrise des types de tâches suivants :

Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…).
Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi.

À titre d'exemple, considérons ainsi le programme de calcul suivant :

Programme *P*. Étant donné quatre entiers, multiplier la somme des carrés des deux premiers par la somme des carrés des deux suivants.

On a : $P(3, 11, 8, 5) = (3^2+11^2)(8^2+5^2) = 130 \times 89 = 11570$. Considérons alors le programme suivant :

Programme *Q*. Étant donné quatre entiers, d'une part multiplier le premier et le troisième, le deuxième et le quatrième, puis élever au carré la somme des deux produits, d'autre part calculer la différence entre le produit du premier et du quatrième et le produit du deuxième et du troisième, puis élever au carré cette différence, enfin faire la somme des deux carrés obtenus.

On a : $Q(3, 11, 8, 5) = (3\times8 + 11\times5)^2 + (11\times8 - 3\times5)^2 = 79^2 + 73^2 = 6241 + 5329 = 11570$. L'équivalence $P \equiv Q$, vérifiée dans le cas précédent, est vraie, et peut être établie ainsi. Le programme *P* a pour expression algébrique $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$. Or on a l'identité suivante (dite de Lagrange) : $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \equiv (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$. L'expression algébrique figurant au membre de droite est celle du programme de calcul *Q* : on a donc $P \equiv Q$. Cette équivalence permet en particulier de conclure que « l'ensemble des entiers sommes de deux carrés est clos pour la multiplication ». Ainsi a-t-on, comme on l'a vu plus haut, $(3^2+11^2)(8^2+5^2) = 79^2 + 73^2$.

Suite de l'extrait est laissée à lire en autonomie

⑦ Arrêtons-nous un instant sur le problème suivant : dans une classe de 2[de], les élèves doivent calculer l'image de 3 par la fonction $x \mapsto 2(x-1)^2+4$. Certains élèves développent préalablement l'expression algébrique du « programme de calcul », ce qui n'est sans doute pas la meilleure façon de faire ! Que peut faire le professeur dans une telle situation ?

❶ Sans doute la forme donnée par l'énoncé est-elle « mieux adaptée » au calcul demandé que la forme « développée », donnée par l'équivalence $2(x-1)^2+4 \equiv 2x^2-4x+6$. La manière dont le professeur peut réagir à cet égard doit cependant être soigneusement analysée.

❷ Il convient d'abord, en effet, d'aider les élèves à s'engager dans un rapport « opportuniste » à la forme des expressions algébriques, qui conduirait ici, sans doute, à calculer à partir de l'expression initiale, mais qui pourrait aussi, dans un univers moins « frileux » en matière de calcul, conduire à écrire :

$$2(x-1)^2+4 \equiv 2(x-1)(x-3)+4(x-1)+4 \equiv 2(x-1)(x-3)+4x.$$

❸ La construction d'un tel rapport au calcul algébrique doit s'étayer sur un commerce ***en partie ludique*** avec ce calcul, et l'on ne devra pas, en la matière, s'effaroucher de gestes de calcul d'abord ***non optimaux***. Tout au contraire, on cherchera à agir pour faire évoluer ces gestes sous la pression des « faits » (et non des injonctions professorales), en proposant par exemple aux élèves des tâches du type suivant :

On désire évaluer l'expression $2(x-1)^2+4$ pour les valeurs suivantes de x : –2, 1, 3, 8.

1) Pour chacune de ces valeurs, préciser laquelle des formes suivantes de l'expression donnée est la plus « économique » :

$E_0 = 2(x–1)^2+4$;

$E_1 = 2x^2–4x+6$;

$E_2 = 2(x–1)(x–3)+4x$;

$E_3 = 2(x–4)(x+2) + 22$.

On vérifiera chaque fois que l'on a bien égalité algébrique entre l'expression E_0 et l'expression proposée.

2) Indiquer une valeur de x pour laquelle l'évaluation de $2(x-1)^2+4$ à partir de l'expression développée E_1 serait la plus économique.

C'est clairement la forme E_3 qui est la mieux adaptée pour $x = -2$, la forme E_0 pour $x = 1$, la forme E_2 pour $x = 3$. Pour $x = 8$, on peut hésiter entre les formes E_0 et E_3. Quant à la forme E_1, elle serait la plus économique pour évaluer l'expression E_0 en $x = 0$. La notion d'économie employée ici devra, contre la tendance narcissique à en faire une question de goût, de penchant, de « Moi je préfère… », être progressivement ***objectivée*** : une forme économique pourra être « définie », de manière encore un peu imprécise, comme une forme qui exige ***le moins possible d'opérations élémentaires*** de calcul tout en assurant ***la plus forte fiabilité*** des calculs à effectuer. Ainsi peut-on penser que, pour un même nombre d'opérations, le calcul auquel conduit E_3, soit $2(8-4)(8+2)+22 = 2\times4\times10+22 = 80+22 = 102$, est plus économique, parce que plus ***fiable***, que le calcul qu'amène E_0, à savoir $2(8-1)^2+4 = 2\times7^2+4 = 2\times49+4 = 98+4 = 102$.

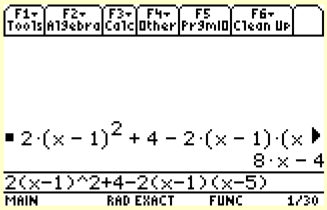
⑧ Il est à peine utile de souligner que le type de tâches consistant à ***produire*** une expression algébrique adaptée à un calcul numérique donné est d'une autre difficulté que celle qui précède, et surtout appelle souvent un travail supérieur en complexité à celui nécessaire pour évaluer directement l'expression donnée quelle qu'en soit la forme ! Ces observations, justes en elles-mêmes, ne doivent cependant pas constituer un motif de ne pas aborder ce type de tâches.

❶ On pourra par exemple mettre en place la technique de réécriture suggérée plus haut à travers les exemples donnés : pour calculer $2(x-1)^2+4$ en $x = 5$, on peut écrire par exemple :

$$2(x–1)^2 + 4 \equiv 2(x–1)(x–5) + [2(x–1)^2+4 – 2(x–1)(x–5)] \equiv \ldots+2(x–1)(x–1–x+5)+4$$

$$\equiv \ldots+8(x–1)+4 \equiv \ldots+8x–4.$$

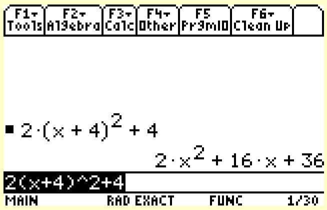
On pourra alléger la tâche en confiant le calcul du crochet à un logiciel de calcul formel :



❷ On pourra aussi effectuer un ***changement de variable*** pour se ramener à l'évaluation en $x = 0$. Ainsi pour $x = 5$, on posera $X = x - 5$, soit $x = X + 5$; on obtient ici :

$$2(x - 1)^2 + 4 \equiv 2(X + 5 - 1)^2 + 4 \equiv 2(X + 4)^2 + 4.$$

Dans le cas présent, le calcul se fait aisément à l'aide de la forme obtenue ici. Dans le cas général, on pourra développer l'expression obtenue, en confiant ce développement à une calculatrice symbolique :



À cet égard, on ne s'effarouchera pas de la remarque vipérine, mais obtuse, selon laquelle, « tant qu'à utiliser une calculatrice symbolique, on peut aussi bien évaluer l'expression donnée à l'aide d'une calculatrice ordinaire ». Et on réfléchira plutôt au problème du professeur qui souhaite ***fabriquer*** des exercices relatifs au type de tâches proposé plus haut, et doit en conséquence ***produire*** des expressions « mieux adaptées ».

Commentaires développés oralement

Extrait 2

• On avait laissé de côté la dernière fois une question fondamentale, celle ***des raisons d'être de l'algèbre !*** Pourquoi donc serait-il intéressant de calculer sur les programmes de calcul ?

① Une réponse émerge du travail déjà accompli : le calcul sur les programmes de calcul – exprimés algébriquement – permet d'engendrer des programmes de calcul ***équivalents*** et conduit ainsi à répondre à la question « ces deux programmes de calcul sont-ils équivalents ? »

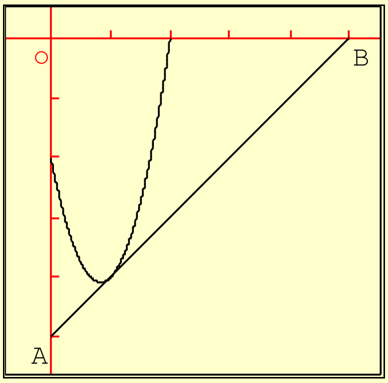
❶ Il suffit pour cela de récrire l'expression algébrique des programmes de calcul en question sous forme canonique, ce qui permettra de conclure (si les écritures canoniques des programmes de calcul sont identiques, les programmes sont équivalents ; sinon, non…). On établit ainsi que les programmes de calcul d'expression algébrique

$$10[(a - 5) + (b - 5)] + [5 - (a - 5)][5 - (b - 5)]$$

et ab sont équivalents (voir la séance 14). On a par exemple, d'une part, $10[(a - 5) + (b - 5)] \equiv 10b - 10[5 - (a - 5)]$, et, d'autre part, $[5 - (a - 5)][5 - (b - 5)] \equiv 10[5 - (a - 5)] - b[10 - a]$; en sorte que : $10[(a - 5) + (b - 5)] + [5 - (a - 5)][5 - (b - 5)] \equiv 10b - b[10 - a] \equiv ab$.

❷ La notion de ***forme algébrique*** d'un programme de calcul est essentielle. La forme $(3x + 1)(x - 2)$ du programme de calcul $P(x) = 3x^2 - 5x - 2$ permet de voir que les valeurs numériques de ce programme sont positives lorsque $x > 2$: par exemple, on a $P(3) = (3{\cdot}3 + 1)(3 - 2) = 10$. Mais la forme $3\left(-\left(\frac{1}{3}\right) - x\right)(2 - x)$

montre qu'il en est de même quand $x < \frac{-1}{3}$. On a par exemple $4\,P\left(-\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 3 + 5{\cdot}2 - 8 = 5$ et donc $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 1{,}25$. Le graphique ci-après suggère que, pour tout x, on a : $P(x) \geq Q(x) = x - 5$.



C'est ce que confirme la suite d'équivalences suivante : $P(x) = (x - 5) + [(3x^2 - 5x - 2) - (x - 5)] \equiv Q(x) + (3x^2 - 6x + 3) \equiv Q(x) + 3(x - 1)^2$.

❸ La notion de ***forme*** est centrale en beaucoup de questions. Si $P(x, y, ...)$ est un programme de calcul, on dit qu'un nombre entier n est ***de la forme P*** s'il existe des entiers a, b, ... tels que $P(a, b, ...) = n$; lorsque P est exprimé algébriquement, on dit que n peut s'écrire ***sous la forme P(x, y, ...)***. Ainsi pourra-t-on dire que 10 est de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$ puisque on a : $10 = 1+2+3+4 = \frac{4(4+1)}{2}$. La notion d'expression algébrique permet ainsi de mathématiser, avec un relativement haut degré de généralité, la notion de « forme » d'un nombre. Considérons ainsi le problème suivant :

Soit deux entiers impairs successifs (comme 5 et 7, ou 41 et 43). Montrer que la somme de ces entiers est un multiple de 4.

On peut donner de ce problème une solution « arithmétique » (c'est-à-dire pré-algébrique) :

Un entier impair est égal à un entier pair, moins un ; l'entier impair suivant est alors égal à l'entier pair, plus un ; la somme des deux entiers impairs est donc égale à deux fois l'entier pair, ce qui est un multiple de 4.

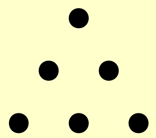
La « solution algébrique » procède autrement :

Un entier impair s'écrit ***sous la forme*** $2n + 1$, où n est un entier quelconque ; son successeur dans la suite des entiers impairs ***s'écrit alors*** $(2n + 1) + 2$, soit encore $2n + 3$ puisqu'on a l'équivalence $(2n + 1) + 2 \equiv 2n + 3$. La somme des deux impairs successifs ***s'écrit donc*** $(2n + 1) + (2n + 3)$, et donc $4(n+1)$ puisqu'on a les équivalences :

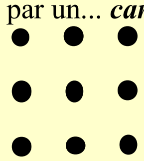
$$(2n + 1) + (2n + 3) \equiv 4n + 4 \text{ et } 4n + 4 \equiv 4(n + 1).$$

L'expression obtenue, qui exprime algébriquement le programme « Étant donné un entier, prendre son successeur et le multiplier par 4 », ***montre*** que la somme de deux impairs successifs est un multiple de 4.

❹ Très tôt, l'attention des mathématiciens grecs a été attirée par la notion de forme d'un nombre. Mais ils ne disposaient pas de la notation algébrique et devaient donc employer un vocabulaire spécial : les entiers de la forme $2n$ et $2n + 1$ étaient ainsi appelés respectivement nombres ***pairs*** et nombres ***impairs***, terminologie que nous avons conservée, les entiers de la forme $2n(2m + 1)$ étant, eux, nommés nombres ***pairement impairs***, tandis que les entiers de la forme $2(2p + 1)(2m + 1)$, c'est-à-dire les entiers de la forme $2(2q + 1)$, étaient désignés comme ***seulement pairement impairs*** – terminologie qui se comprend mais que nous avons aujourd'hui oubliée. Quant aux entiers de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$, c'étaient les nombres ***triangulaires***, nom dû au fait que, dans la vieille tradition pythagoricienne des ***nombres figurés***, on les représentait sous la forme d'un triangle, tandis qu'un nombre ***carré*** – de la forme n^2 – était figuré par un... ***carré***.



6 = 1+2+3 =
Nombre triangulaire



9 = 3 × 3
Nombre carré

Cette manière de penser la forme des nombres entiers (les Grecs anciens parlaient aussi de nombres ***pentagones***, etc.) avait pourtant un défaut majeur : elle resta forcément peu développée, et surtout ***elle ne permettait guère de calculer***. La proposition 33 du livre IX des ***Éléments*** d'Euclide (vers 300 av. J.-C.) est par exemple la suivante (d'après Jean Itard, *Les livres arithmétiques d'Euclide*, Hermann, 1961, p. 194) :

Si la moitié d'un nombre est impaire ce nombre est seulement pairement impair.

En d'autres termes, si n est un entier tel qu'il existe un entier m vérifiant $\frac{n}{2} = 2m + 1$, alors n est de la forme $2(2m + 1)$ – ce qui est trivial, mais qu'Euclide doit démontrer ainsi :

Car que le nombre A ait une moitié impaire. Je dis que A est seulement pairement impair. Il est évident qu'il est pairement impair car sa moitié, qui est impaire, le mesure au moyen d'un nombre pair [à savoir, 2]. Je dis de plus qu'il est seulement pairement impair. Car si A était pairement pair, un nombre pair le mesurerait au moyen d'un nombre pair, donc sa moitié bien qu'impaire serait mesurée par un nombre pair. Ce qui est absurde. Donc A est seulement pairement impair. CQFD.

❺ La notion de « forme d'un nombre » permet, au collège, une initiation ***fonctionnelle*** (et non pas seulement ***formelle***) au calcul algébrique : elle motive son introduction et son développement. À cet égard, on se rappellera que la problématique de la forme et de l'information qu'elle apporte ne concerne pas que les expressions ***littérales***, mais aussi bien déjà les expressions (purement) numériques, comme le rappelle ce passage du programme de 3^e^ déjà rencontré lors de la séance 8 :

Ces résultats, que l'on peut facilement démontrer à partir de la définition de la racine carrée d'un nombre positif, permettent d'écrire des égalités telles que

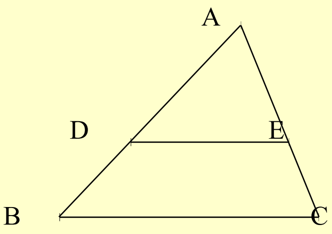
$$\sqrt{45} = 3\sqrt{5},\ \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

On habituera ainsi les élèves à écrire un nombre sous la forme la mieux adaptée au problème posé.

La forme $\sqrt{45}$ de $3\sqrt{5}$ montre ainsi que $3\sqrt{5} < 7$ $(= \sqrt{49})$. La forme $\sqrt{\tfrac{4}{3}}$ de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ montre notamment que $\frac{2}{\sqrt{3}}$ est compris entre 1 et $\sqrt{2}$ puisqu'on a : $1 = \sqrt{\tfrac{4}{4}} < \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{4}{3}} < \sqrt{\tfrac{6}{3}} = \sqrt{2}$. C'est là une information que, il est vrai, la forme $\frac{2}{\sqrt{3}}$ apporte également : $1 = \frac{2}{\sqrt{4}} < \frac{2}{\sqrt{3}} < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

② Il est une seconde grande raison d'être du calcul algébrique, plus fameuse encore que la première sans doute : elle se rattache à la résolution de problèmes par le biais de leur ***mise en équation***, et de la ***résolution de l'équation*** obtenue. Ce second type de tâches exige, au-delà du calcul permettant de passer d'un programme P à un programme Q équivalent, un nouveau calcul, le ***calcul « équationnel »***.

❶ D'une manière générale, cet emploi essentiel peut se décrire ainsi : on recherche un nombre inconnu, x, sur lequel on dispose d'une information du type suivant : pour un certain programme de calcul P, $P(x)$ prend une valeur connue k : $P(x) = k$. ***Résoudre l'équation*** $P(x) = k$ c'est alors chercher le ou les nombres x qui vérifient l'égalité $P(x) = k$. À titre d'exemple, considérons le problème suivant :



Soit un triangle ABC tel que BC = 10, CA = 9, AB = 11. Soit D ∈ [AB] et E ∈ [AC] tels que (DE)//(BC). Déterminer la valeur que doit avoir BD pour que DE = 7.

On a ici $\frac{AD}{AB} = \frac{7}{10} = 0{,}7$. Or on a : $\frac{AD}{AB} = \frac{11-x}{11} = 1 - \frac{x}{11}$. On a donc l'équation : $1 - \frac{x}{11} = 0{,}7$. (On trouve $x = 3{,}3$.)

❷ Le schéma précédent admet une généralisation : étant donné des programmes $P(x, y, ...)$ et $Q(x, y, ...)$, que l'on ignore si $P \equiv Q$ ou que l'on sache que P Q, on peut se demander ***pour quelles valeurs*** du n-uplet $(x, y, ...)$ on a $P(x, y, ...) = Q(x, y, ...)$. Considérons le problème suivant :

Le quintuple d'un nombre diminué de 6 est égal au double de ce nombre augmenté de 27. Quel est ce nombre ?

L'énoncé indique que, pour un certain nombre à déterminer, l'***inconnue*** x, deux programmes de calcul, P et Q, « renvoient » le même nombre – lequel n'est pas précisé. Ces programmes de calcul (que l'énoncé donne sous forme rhétorique) s'écrivent algébriquement $P(x) = 5x - 6$ et $Q(x) = 2x + 27$. On a clairement $P \neq Q$, puisque, par exemple $P(2) = 4$ et $Q(2) = 31$. Le problème revient donc à trouver x (s'il existe !) tel que $P(x) = Q(x)$, c'est-à-dire tel que $5x - 6 = 2x + 27$.

❸ C'est en ce point que peut s'enclencher le ***calcul équationnel***. Alors que le calcul sur les expressions algébriques permet par exemple d'écrire que $5x - 6 \equiv (7x - 6) - 2x$, c'est-à-dire, plus généralement, permet de remplacer ***séparément*** chacun des membres par une expression équivalente, le ***calcul équationnel*** permet de modifier les deux membres ***de façon concertée***, et par exemple de passer de l'équation $5x - 6 = 2x + 27$ à l'équation

$$(5x - 6) - 2x = (2x + 27) - 2x$$

tandis que le calcul algébrique permet ensuite de « réduire » chacun des membres :

$$\begin{cases} (5x-6)-2x \equiv 3x-6 \\ (2x+27)-2x \equiv 27 \end{cases}$$

On est ainsi conduit à l'équation $3x - 6 = 27$, etc.

Commentaires développés oralement. On renvoie également à la lecture du document d'accompagnement des programmes du collège « Du numérique au littéral » qui fait référence au Séminaire cité précédemment.

Le travail effectué prend ainsi appui sur l'une des deux grandes raisons d'être de l'algèbre : deux programmes de calcul sont-ils équivalents ?, elle-même motivée par la question de la forme des nombres, motivation qui n'apparaît pas dans la séance observée.

Travail collectif dirigé sur l'analyse didactique et l'évaluation des deux premiers épisodes

On trouvera ci-dessous les principaux éléments qui ont été évoqués.

Analyse

Les deux premiers épisodes que nous avons commentés participent alors de la première rencontre avec le type de tâches « réduire une expression littérale à une variable », par l'intermédiaire de la rencontre avec le type de tâches T : « Déterminer un programme de calcul “plus simple” équivalent à un programme de calcul donné ».

La première rencontre a véritablement lieu quand le professeur annonce :
P : « On arrive à un problème de calcul équivalent au programme de calcul compliqué... » Un élève : « On peut compresser ! » P : « Voilà. Compresser, réduire...

C’est le type de tâches T’ : « exécuter un programme de calcul » qui est central dans ces épisodes. T’ est considéré ici comme routinier, cela étant d’abord légitimé par le fait qu’il figure au programme de la classe de 5e, comme en témoigne l’extrait suivant :

Contenu
Enchaînement d’opérations
Capacités
Effectuer une succession d’opérations donnée sous diverses formes (par calcul mental, posé ou instrumenté), uniquement sur des exemples numériques.
Effectuer une succession d’opérations donnée sous diverses formes (par calcul mental, posé ou instrumenté), uniquement sur des exemples numériques.
Commentaires
(...)
L’ambiguïté introduite par la lecture courante, comme par exemple « 3 multiplié par 18 plus 5 » pour $3 \times (18 + 5)$, pour l’auditeur qui n’a pas l’écriture sous les yeux, conduit à privilégier l’utilisation du vocabulaire et de la syntaxe appropriés, par exemple : « le produit de 3 par la somme de 18 et de 5 ». C’est l’occasion de faire fonctionner le vocabulaire associé : terme d’une somme, facteur d’un produit

Cela est confirmé par le rappel du travail réalisé lors de la séance précédente, effectué au début de la séance, qui permet de constituer une partie du milieu nécessaire à la réalisation de l’émergence de l’OMP relative à T. On a donc là un moment de travail de l’OMP relative à T’, qui permet de préparer et d’aboutir à la réalisation du moment de première rencontre avec T (et, plus tard, du moment exploratoire).
La professeure fait vivre aux élèves la situation suivante : « un programme de calcul ayant été exécuté à partir d’un nombre donné; déterminer ce nombre à partir de la donnée du résultat », le rôle des élèves étant le choix du nombre, l’exécution du programme de calcul avec le secours de la calculatrice et la communication du résultat, tandis que le professeur doit deviner le nombre dont chacun est parti.
La professeure mène le travail oralement : le programme de calcul est annoncé oralement, les élèves devant l’exécuter au fur et à mesure ; la mise en commun est également pour l’essentiel orale ; le professeur note à la fin le début du programme de calcul et son expression réduite pour faire apparaître T.

Évaluation
On peut noter d’abord une problématisation correcte des OM étudiées, avec la mise en scène de l’une des raisons d’être de l’algèbre élémentaire qui laisse a priori du *topos* aux élèves.
Cependant ce *topos* est de fait limité par l’absence d’écrits explicitée plus haut, tant dans la donnée du programme de calcul que dans son exécution puis sa mise en commun, notamment parce que les élèves n’ont alors pas assez de *milieu* pour contrôler le calcul qu’ils effectuent, ce qui est vraisemblablement la principale source des erreurs de calculs rencontrées, ou encore qu’ils ne peuvent pas véritablement travailler sur les résultats de l’exécution du programme de calcul pour au moins contrôler le travail effectué par P.
Il en va de même dans le moment de première rencontre avec T, où l’écriture complète de l’équivalence des deux programmes de calculs aurait donné davantage de milieu à la collectivité pour faire émerger T. À cet égard, le bruit relevé dans le compte rendu et que l’on observe dans l’enregistrement vidéo est d’abord un symptôme du manque de milieu, et donc de topos, des élèves.

2. Forum des questions

Comment aider les élèves à comprendre que des expressions littérales représentent des nombres (classe de seconde) ? Par exemple : « on ne peut pas montrer que AB = CD puisqu'on ne connaît pas la valeur de AB ». (9, 2de)

1. Comme l'indique le document d'accompagnement du programme du collège « Du numérique au littéral », « l'emploi du signe « = » comme symbole exprimant qu'on a affaire à deux expressions d'un même objet mathématique devient prédominant » au collège ; on l'a vu notamment dans le cadre de l'équivalence de programmes de calculs. Ainsi, lorsque l'on a à montrer que AB = CD, on a à montrer que ces deux « expressions », AB d'un côté et CD de l'autre, désignent le même objet mathématique, la même longueur sans doute ici. Le problème est alors déplacé : on sait depuis l'école primaire montrer que deux longueurs sont égales sans se préoccuper de montrer l'égalité de leurs mesures, en les superposant par exemple, ou encore en cinquième en montrant qu'on obtient l'une par image de l'autre dans une symétrie axiale.

2. Ce qui n'a ainsi pas émergé dans la construction de l'OM, c'est le ***type de tâches*** « Montrer l'égalité de deux longueurs », sous-type de tâches du type de tâches plus générique « montrer l'identité de deux expressions d'un même objet mathématique ». La technique relative à ce type de tâches comportera plusieurs éléments et devra apparaître explicitement dans la synthèse. On pourra par exemple y trouver :

Pour montrer que deux longueurs sont égales, on pourra montrer :
- que les longueurs apparaissent respectivement dans deux figures qui sont images l'une de l'autre par une transformation qui conserve les longueurs, on montre alors que les extrémités de l'un des segments sont les images des extrémités de l'autre par cette transformation ;
- que les longueurs sont deux côtés opposés d'un parallélogramme ;
- que les longueurs sont deux côtés homologues de deux triangles isométriques ;
- que leurs mesures sont égales : pour cela, on peut exprimer ces (mesures de) longueurs en fonction de (mesures de) longueurs données de la figure en utilisant le théorème de Pythagore, le théorème de Thalès, la trigonométrie, et montrer qu'elles ont la même expression.

Bien entendu, chaque ingrédient devra renvoyer à au moins un exercice (activité, problème) où il aura été mis en fonction.

3. On notera que ce type de réactions des élèves doit être considéré avec la plus grande attention d'abord comme le symptôme d'un manque dans la conception de l'organisation mathématique. C'est seulement quand un examen soigneux révèle qu'il n'en est rien que l'on ira chercher la cause du problème dans la mise en forme de l'OM, souvent insuffisante au niveau du secteur on l'a déjà dit, ou dans la manière dont l'émergence avec les élèves de cette organisation mathématique s'est déroulée, notamment du point de vue du *topos* des élèves.

Pendant notre stage de pratique accompagnée, toutes les interventions des membres du trinôme ont été « médiocres ». Est-ce pénalisant pour la formation ? Est-ce « normal » ?... (12, 5e)

1. Il faut d'abord prendre garde au fait que les interventions effectuées étant soigneusement analysées dans la perspective du travail de TER, on y voit nombre de défauts sur lesquels on ne se penche pas, à tort, pour les séances du stage en responsabilité. Cela étant, le verdict prononcé

s'avère effectivement être la norme. Cela tient à plusieurs raisons, dont la principale est sans doute le fait que le stage de pratique accompagnée intervenant généralement dans le mois d'octobre, quelquefois au début du mois de novembre, les praxéologies dont disposent les élèves professeurs sont encore peu au point et surtout fragiles. Le changement de classe les déstabilise suffisamment pour que, malgré le travail effectué en collaboration avec le professeur d'accueil, les quelques ingrédients acquis dans le cadre du stage en responsabilité ne puissent pas être réalisés dans le cadre du stage de pratique accompagnée. Le fait de n'avoir pas en charge l'étude du thème dans son ensemble ajoute sans doute encore au manque de robustesse des praxéologies.

2. Il faut bien évidemment tirer tout le parti possible de cet échec (relatif sans doute) en ce qu'il révèle sans doute les aspects non encore au point des praxéologies professionnelles, qu'il s'agit dès lors de travailler énergiquement avec le secours du tuteur, du maître de stage et du séminaire.
Le dossier de stage comporte 6 rapports, le rapport du professeur d'accueil du stage de pratique accompagnée étant l'un de ces rapports. Ces professeurs et la commission de validation étant habitués au phénomène décrit, il s'avère peu pénalisant pour l'évaluation de la formation, excepté dans le cas où l'élève professeur a manifestement manqué de travail ou montré certaines limitations en concordance avec les autres rapports. On ajoutera que le compte rendu d'onservation figurant dans le mémoire de TER est anonyme, et que les jurys n'ont pas à savoir qui a réalisé la séance observée.

Est-ce qu'on doit utiliser « le langage des élèves » ou reformuler ce qu'ils disent pour élever le niveau d'expression ? (11, 6e & 5e)

1. La question de la formulation est un aspect qui se trouve au cœur de la fabrication d'un *topos* suffisamment étendu pour les élèves : il convient donc d'y porter une grande attention, et d'examiner les décisions prises à l'aune de l'effet qu'elles auront précisément sur le *topos*. Ainsi, on prendra garde que l'exigence de formulation ne vienne pas écraser le travail véritable qu'il s'agit de mener, comme il en va par exemple dans l'épisode suivant de correction d'un exercice :

P : « On avait 2 cercles concentriques. Comment montrer que ABCD est un parallélogramme ? Qui me justifie ? »
John dit que les diagonales se coupent en leur milieu parce que OA = OC et que ce sont les rayons du cercle.
P. « On énonce la propriété, on avait un mode d'emploi. » Il interroge Katia.
K. « Les segments se coupent en leur milieu.
P. Comment vous le savez ?
K. Parce que c'est des diamètres.
P. Oui, mais comment rédiger en utilisant le mode d'emploi [on sait que ; or ; donc]
Elle vient rédiger au tableau et écrit :
On sait que les segments [AC] et [BD] se coupent en leur milieu. Or si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent alors c'est un parallélogramme. Donc ABCD est un parallélogramme.

P : C'est bien. Chaque fois que vous aurez à démontrer que c'est un parallélogramme, c'est ce qu'il faudra utiliser. Comment vous savez que ça se coupe en leur milieu ? Quelle propriété utiliser?

Il apparaît que AC et BD sont des diamètres du cercle, et Léa interrogée précise: « les diamètres passent par le centre du cercle donc les segments AC et BD se coupent en leur milieu ». P écrit la rédaction au tableau.
On sait que [AC] et [BD] sont des diamètres des cercles de centre O. Or dans un cercle, le milieu d'un diamètre est le centre du cercle.

Commentaires développés oralement – On voit clairement que la première proposition qui n'est certes pas correctement formulée contient des éléments pertinents que ne contiendra pas la seconde par exemple, alors que cette dernière est dans un premier temps du moins validée par le professeur. Il est important d'identifier dans les réponses proposées ***les apports au projet collectif*** qu'elles contiennent. On notera en outre que le premier élève interrogé qui a vu sa réponse non prise en compte fera du bruit tout au long de la séance.

2. Dans cette perspective, il s'avère pertinent de distinguer deux ordres de choses : l'élucidation des difficultés mathématiques ou encore l'effort de production de mathématiques d'un côté, la mise en forme du raisonnement ou de l'organisation mathématique de l'autre. Même dans le deuxième cas, on pourra procéder en deux étapes : une première étape, comme le bilan d'AER par exemple, où la formulation pourra être approximative, et une deuxième étape où l'on travaillera la première formulation pour aboutir à une expression correcte du point de vue de l'expression française et mathématique.

Utilisation des TICE et C2i2e (suite)

On poursuivra l'étude de l'utilisation des TICE au service de l'enseignement des mathématiques en examinant deux travaux qui ont été déposés dans les portfolios.

1. Le premier est une activité sur la droite d'Euler réalisée en seconde avec Geogebra, dont on nous dit : « Seules les trois premières lignes sont écrites au tableau. Il est demandé aux élèves d'utiliser le logiciel pour répondre au problème et de rédiger un programme de construction. La fiche de travail tient lieu de corrigé et est distribuée aux élèves à la fin de l'heure. ».

Voici les trois premières lignes en question :
On considère un triangle *ABC* quelconque.
Soit *H* son orthocentre, *G* son centre de gravité et *O* le centre du cercle circonscrit (C) à *ABC*.
On se propose d'observer, à l'aide du logiciel de géométrie *Géogébra*, la position relative des points *H*, *G* et *O*.

Rien n'est dit sur les compétences que le document prétend attester : en se reportant à la feuille de position, on apprend que l'élève professeur considère que ce travaille manifeste les compétences suivantes avec le niveau pratiqué :

B.2.1 * Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE.
B.2.2 * Concevoir des situations d'apprentissage et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de classe.
B.2.3 * Intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation.
B.3.1 * Conduire des situations d'apprentissage en tirant parti du potentiel des TIC : travail collectif, individualisé, en petits groupes ; recherche documentaire.

Rien n'étant dit quant à la réalisation de la séance, on ne sait pas dans quelle mesure le travail effectué a manifesté la compétence B.3.1. On notera également que le commentaire figurant à la fin du document présenté fait douter d'une pratique adéquate des compétences B.2.2. et B.2.3.

6/ La conjecture émise en 5/ est-elle vraie pour tous les triangles ?
On peut déplacer les points *A*, *B* et *C* de façon à modifier le triangle *ABC*, puis refaire l'étape 5/.
La conclusion reste la même. On montre ainsi que l'hypothèse faite en 5/ est vraie pour différents triangles. Mais rien ne nous assure qu'elle est vraie pour **tous** les triangles. Pour s'en assurer, il faudrait **démontrer** ce résultat.

Nous avons en effet développé plusieurs fois, dans le Séminaire et dans chacun des deux TD sur l'utilisation des TICE, que nous avions une dialectique entre deux ordres de choses, l'***expérimentation*** et la ***théorisation***, qu'il s'agissait à la fois de co-construire et de distinguer. Le travail présenté met en place une expérimentation, ou plus exactement la simulation d'une expérimentation, permettant de se convaincre de la ***véracité de la propriété examinée dans l'espace sensible***. Si l'expérimentation est correctement menée, elle doit aboutir au fait que les points H, G et O sont alignés. En ce point, le problème théorique reste entier : pourra-t-on ***déduire cette propriété de la théorie géométrique disponible*** ? La dialectique de ces deux ordres de choses est essentielle pour une éducation mathématique digne de ce nom : faire des mathématiques en effet c'est, pour l'essentiel, fabriquer des éléments théoriques à partir d'expérimentation sur des « domaines de réalité » (qui peuvent être fortement abstraits) et examiner s'ils sont déductibles de ceux dont on dispose déjà : cela permet de constituer une théorie de ces domaines de réalités permettant de fabriquer des connaissances à leur endroit non accessibles par expérimentation. Cette dialectique permet en outre de se sortir de problèmes didactiques qui font, sinon, durablement obstacle comme en témoigne la question suivante (prises parmi beaucoup d'autres)

> Comment faire comprendre aux élèves la nuance entre démontrer et constater ?
> Exemple : Les élèves ont été confrontés au type de tâches T suivant : montrer que la fonction affine $f(x)=3x+2$ est croissante sur ℝ. Certains ont répondu : " on trace la représentation graphique de f et on <u>voit</u> qu'elle est croissante. " Les élèves ne voient aucun intérêt à démontrer un résultat et ils ont beaucoup de difficultés à construire un raisonnement de démonstration. (2007-2008,19, 2^{de})

2. Le deuxième document comporte un compte rendu de séance que l'on reproduit ci-dessous :

Compte-rendu de la séance informatique avec « Cabri Géomètre »
Droite des milieux et proportionnalité des côtés dans un triangle

Objectif *: Découvrir des propriétés importantes de parallélisme et de proportionnalité dans un triangle coupé par une parallèle à un côté.*

Objectif secondaire*: Découvrir ou redécouvrir le logiciel de géométrie dynamique « Cabri Géomètre ». Se familiariser avec ses outils, son utilité,...(accessoirement valider quelques compétences B2i)*

Organisation de la classe

- Séance en demi-groupe (Groupe 1 de 9h à 10h, groupe 2 de 10h à 11h)
- 1 élève par poste de travail

Organisation de la séance

- Explication du déroulement de la séance.
- Vérification des identifiants et des mots de passe pour chaque groupe (il y avait un certain nombre d'oublis, donc j'ai sollicité l'ATI pour obtenir une copie du listing).
- Distribution des polycop à coller immédiatement dans son classeur.
- Explication des polycop : Comment l'utiliser, qu'est-ce qu'on va faire comme mathématiques,...
- Elèves libres d'avancer à leur rythme et je passe derrière eux vérifier leur progression ou répondre à certaines de leurs interrogations.

Bilan

- Les séances se sont très bien déroulées. Les élèves étaient intéressés par le côté ludique de *Cabri*, et n'étaient pas maladroits pour la plupart.
- Ils ont quasiment tous réussi à finir les 2 premières parties, et le tiers de la classe a même réussi à fini la troisième partie sur Thalès.

– Côté discipline, rien à redire. Ils n'étaient pas très nombreux, c'est une bonne classe et le travail semblait leur plaire.

Dans la déclaration de compétences, l'élève professeur prétend obtenir par là la validation de nombreuses compétences du groupe B. Nous examinerons ici les deux compétences suivantes :

B.3.1 * Conduire des situations d'apprentissage en tirant parti du potentiel des TIC : travail collectif, individualisé, en petits groupes ; recherche documentaire.
B.3.2 * Gérer l'alternance, au cours d'une séance, entre les activités utilisant les TICE et celles qui n'y ont pas recours.

Rien ne dit dans le compte rendu le parti qui a été tiré des TIC pour l'apprentissage de la géométrie, rien non plus en ce qui concerne l'alternance au cours de la séance entre les activités utilisant les TICE et celles qui n'y ont pas recours. On notera que, contrairement au travail précédent, la forme de l'activité présentée laisse planer le plus grand doute quant au *topos* des élèves, sans parler de la raison d'être et de la fonctionnalité de l'OM que l'on prétend construire. ***On espère qu'il s'agit là d'un état ancien d'une praxéologie didactique qui a, depuis, fortement évolué...*** (développement oral)

3. Il faut donc assortir les traces écrites du travail réalisé d'éléments d'analyse didactique et d'évaluation mettant en évidence les compétences que vous prétendez valider, voire d'éléments d'observation complémentaires.

On terminera cette rubrique TICE par la considération des deux questions suivantes :

Est-ce qu'un travail sur des séquences à la calculatrice données sur feuille pour demander aux élèves de les traduire par des calculs et inversement des calculs donnés pour les traduire en « séquence calculatrice » peut constituer une séance TICE ? (AD, 12, 4^{e})

Certains élèves ont tendance à utiliser la calculatrice par facilité, c'est-à-dire pour essayer de résoudre des calculs numériques au lieu de conduire un raisonnement en appliquant les règles de calcul appropriées. Quel travail doit-on faire en cours et en TD avec la calculatrice pour que les élèves l'utilisent à bon escient ? (EV, 12, 2de)

Examen collectif

3. Problématique et fonctionnement du Séminaire

3.1. La séance du 13 janvier 2009 aura une rubrique Recherches dans les archives.

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à l'***enseignement des nombres négatifs*** au collège ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Comment introduire les nombres relatifs en classe de cinquième ?(12, 5^{e}) 2. J'ai du mal à expliquer à mes élèves que « soustraire un nombre relatif, c'est ajouter son opposé ». Comment rapprocher cela de la vie courante ? (11, 5^{e})

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Souaad Benadi, Sihame El Khaine, David Félix.

b) La deuxième recherche dans les *Archives* aura trait à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'effet des attentes formulées à l'endroit des élèves sur leurs performances scolaires ? (effet Pygmalion)*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Dans ma classe un élève me rend depuis peu des copies quasi blanches, sous prétexte de ne pas être certain de la réponse. Que faire pour lui faire prendre confiance en lui pour qu'il réponde aux questions ? (à noter que cet élève a de lourds problèmes dus à son vécu : enfant quasi aveugle de naissance, greffe de la cornée, timidité maladive...) (11, 2^{de})
2. Trois de mes élèves ont un niveau de quatrième en math et justifient leur manque de travail / résultats par leurs difficultés. Y a-t-il des pistes pour les remotiver ? (Je les ai déjà pris à part, convoqués en AI... sans grands résultats) (9, 2^{de})
3. Sur quels critères doit-on se baser pour émettre un avis favorable ou défavorable pour un passage en première S ? Un élève peut-il aller contre l'avis du conseil de classe et « forcer » le passage en S malgré un avis défavorable ? (12, 2^{de})
4. Que faire avec un élève de 3^e qui n'a pas un niveau collège ? Aucune base, de ce fait aucune motivation... Il s'agit d'un élève passif ; si je suis à ses côtés, il tente de travailler ; dès qu'il est seul, il ne fait plus rien. Chez lui, aucun travail. (Par exemple : il ne sait pas faire des soustractions...) (12, 5^e, 4^e & 3^e)
5. Un élève a abandonné. Il vient en aide individualisée, fait les exercices demandés avec difficulté. Mais il ne fait rien lors des DS. Que faire ? (12, 2^{de})
6. Suite au conseil de classe, le bilan du premier trimestre s'avère un peu inquiétant. En effet, seul 10 élèves peuvent prétendre passer en 1^{re} (et plus précisément en 1^{re} STG...). Comment faire réagir les élèves ? (12, 2^{de})

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Daniela Carafa-Bernard, Nicolas Laurent et Julien Fontana.

À cet égard, nous rappelons la problématique du travail à effectuer. Il s'agit de ***réunir des*** $\mathcal{R}^\lozenge$ issus des archives du séminaire jugés pertinents comme éléments de réponse aux questions soumises, de manière à ce que le collectif puisse se forger une réponse $\mathcal{R}^\heartsuit$. Dans cette perspective, il est essentiel que ***l'exposé présente effectivement les réponses*** $\mathcal{R}^\lozenge$, et pas seulement la réponse $\mathcal{R}^\heartsuit$ que le trinôme croit pouvoir en tirer. C'est en effet à ce prix que la technique de fabrication des réponses peut être collectivement gérée et travaillée. (On aura reconnu un problème de milieu et de *topos*...)

Cette séance de Séminaire sera suivie d'une séance de travaux dirigés sur l'utilisation des TICE qui concernera les élèves professeurs dont les noms suivent :

Sylvain Astier ; Daniela Caraffa-Bernard ; Alain Gleyze ; Marianne Kiledjian ; Nicolas Laurent ; Anne Martinet ; Élodie Vadé ; Julien Fontana ; Rodolphe;Arnaud ;Mounir El Farri ; Nelly Bofelli ; Vincent Dambreville ; Céline Goujon ; Nicolas Mizoule ; Antoine Noël ; Sihame El Khaine ; Francine Bert ; Benjamin Faure ; Vincent Boilard ; Sylvain Samat ; Christophe Dobrovolny ; David Felix.

3.2. Questionnaire d'évaluation

a) Le temps restant est passé à répondre individuellement au questionnaire suivant :

Question 1a. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.
Question 1b. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.
Question 2a. Indiquez *un* aspect de votre *travail personnel* dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.
Question 2b. Indiquez *un* aspect de votre *travail personnel* dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

b) Chaque participant remplit individuellement la fiche qui lui a été distribuée.

c) Les formulations recueillies feront l'objet d'un commentaire lors de la journée de formation suivante, dans le cadre du séminaire ainsi qu'en GFP.

Bonnes vacances !!!

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 13 : mardi 13 janvier 2009

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Problématique et fonctionnement du séminaire // 2. Faisons le point // 3. Forum des questions

0. Questions de la semaine

1. Problématique et fonctionnement du séminaire

1.1. La séance d'explicitation et la séance TICE sont repoussées à la semaine prochaine.

1.2. *Questionnaire du 16 décembre 2008*

On examinera ci-après les réponses apportées au questionnaire d'évaluation renseigné lors de la séance du 16 décembre 2008.

Un point positif de la formation

1. *La formation elle-même*
Les formateurs sont très disponibles et à l'écoute.
La disponibilité des formateurs, l'écoute.

La formation permet de répondre à des questions, des problèmes durant notre stage en responsabilité. Le séminaire nous permet de mieux structurer nos cours (types de tâches, organisation didactique, …).
La formation proposée permet de véritablement s'interroger sur l'enseignement qu'on dispense dans le cadre du stage de pratique accompagnée.

2. *Certaines parties de la formation : les FIT*

Les FIT, car elles permettent des échanges avec des collègues d'autres matières (y compris CPE et documentalistes) ce qui donne un autre regard sur la profession.
Le module FIT "Autorités et conflits" en petits groupes est vraiment génial : jeux de rôles professeur/élèves très constructifs, on y apprend beaucoup sur l'image qu'on renvoie à notre classe.

3. *Certaines parties de la formation : Les stages*

Le travail avec mon PCP m'apporte beaucoup du fait de la très grande disponibilité de celle-ci. Ainsi, les difficultés rencontrées peuvent être évoquées rapidement.

Le stage en responsabilité et les échanges avec le PCP qui sont très constructifs.

Le stage en responsabilité.

Le stage de pratique accompagnée, les échanges avec le PCP.
Le stage de pratique accompagnée. Il permet de se plonger dans un univers nouveau et d'? sa pratique
Le stage de pratique accompagnée aura été très instructif.
Le stage de pratique accompagnée m'a permis d'avoir un point de vue différent du stage en responsabilité et très intéressant.

4. *Les échanges*
L'échange des difficultés entre les stagiaires et des recours pour y remédier.
Nombreux échanges entre stagiaires lors des questions vives.
Les échanges lors des questions vives ou en dehors du GFP, entre les stagiaires et le tuteur.
Mise en commun de l'expérience de chacun
L'échange avec les autres stagiaires au sein du travail en GFP. L'échange avec le tuteur, les maîtres de stage (en responsabilité, en pratique accompagnée).

5. *Le GFP et/ou le séminaire*
Les séances de GFP permettent de bien préparer un thème, d'améliorer le topos de l'élève.
On "décortique" bien en étant attentif aux doutes de chacun en GFP.
Le GFP permet de répondre à des questions que se posent tous les professeurs stagiaires, tant sur la formation que sur les problèmes « du terrain ».
Les GFP interdisciplinaires ; le SPA.
Le séminaire nous permet de mieux structurer nos cours (types de tâches, organisation didactique, …).
Le travail effectué en séminaire et en GFP nous prépare efficacement au travail à fournir pour le mémoire.

La séparation GFP et séminaire, la « double » ou la « reformulation ».

5. *Le travail sur les AER*

Les stages de pratique accompagnée ; Apprendre à concevoir des AER ; Logiciels informatiques (Geogebra, …)
Apprendre à construire une AER.
Le travail sur la construction d'une AER m'a permis d'en construire pour ma classe.
Le travail sur la préparation de l'étude d'un thème et principalement des AER à partir de compte rendus de séances observées.

6. *Le travail d'analyse de séances*
Un travail sur l'analyse de séance, d'OM, d'OD poussé, avec plusieurs cas (plusieurs compte-rendus).
Les analyses de séances.
Analyse des CR en séminaire et GFP.
Les séances d'analyse menées en séminaire sont plutôt utiles à l'élaboration des pratiques individuelles.
Analyse de compte rendu de séance (pendant les séances de séminaire et GFP) ; travail sur la préparation de l'étude d'un thème ; utilisation de logiciels informatiques.

Les analyses des séances en séminaire.

7. *Questions vives et les questions de la semaine*
Les questions vives du GFP ; les réponses aux questions des autres en séminaire (questions auxquelles on n'avait pas forcément pensé).

Les « questions vives » en GFP. Elles permettent d'avoir rapidement des réponses à nos problèmes (questions).

Les questions vives et le suivi de terrain en GFP.

Questions de la semaine.

8. *Miscellanées*

Les archives du séminaire.

Un aspect de la formation qui me semble positif est de motiver chaque notion nouvelle par des raisons d'être.

Je comprends beaucoup mieux les choses la deuxième fois que je les vois !

Commentaires développés oralement

À propos des échanges : s'il y en a dans la promotion qui pensent que les échanges seraient productifs en dehors des éléments de formation, ils se trompent lourdement : ce sont justement les éléments de formation qui permettent que les dits échanges aient lieu et qu'ils soient productifs.

Un point négatif de la formation

1. *La FIT*
Il serait sans doute bien d'étudier plus de séances de cours filmées ; Les FIT ne sont pas toujours assez concrets.
L'organisation des FIT semble un peu défaillante : manque d'informations, lieux ou dates incompatibles entre les différents modules.
On ne connaît pas le programme des GFP IT.
Parfois, les modules FIT ne sont pas assez concrets.
Le travail en FIT
Je suis un peu déçue de la FIT pour l'instant car je trouve que ce sont trop des cours magistraux.
Les conférences beaucoup trop théoriques et détachées de la réalité du terrain.

Certaines conférences FIT étaient trop théoriques, philosophiques.

Les FIT que l'ai choisies ne m'apportent pas grand-chose pour mon stage en responsabilité.

Les FIT.

J'avais oublié de m'inscrire en FIT, et les FIT m'ont oublié. Je n'ai jamais reçu « d'invitation » pour des conférences.

2. *Les questions*
La lecture des questions de la semaine, en séminaire, en début de séance, apporte peu, puisqu'il n'y a pas de réponse donnée.

Les réponses aux questions de la semaine sont trop inégales : certaines questions d'OM donnent lieu à de gros développements alors que les questions de gestion de classe passent plus rapidement.
Réponses souvent directives, ne laissent que peu de place à la discussion.
Des réponses fournies trop tard ou un peu trop dogmatiques.
Aspect négatif : certaines réponses à des questions sont données un peu tard ou pas du tout.
Les réponses qu'on nous donne par rapport aux questions qu'on pose arrivent parfois tardivement.
Parfois les réponses à nos questions viennent en retard (après leurs utilités).

Commentaires développés oralement :
1. La formation n'est pas là pour donner une réponse telle qu'on la perçoit culturellement, du « tac au tac », mais pour fabriquer une réponse et montrer comment, et notamment avec quoi, on la fabrique.
Question : 21, c'est impair ?
Réponse : oui !
Question : et 36 ?
Réponse : non !
Le type de réponses précédente n'est pas là pour construire quelque chose à long terme ; il donne une base expérimentale sur ce qu'est un nombre pair et un nombre impair (c'est un début d'exploration) mais ne donne pas une technique pour montrer qu'un nombre est pair, ou impair, et les éléments qui permettent de le justifier. Ce type de questions/réponses permet d'avoir un milieu pour pouvoir construire une réponse, ou du moins on peut s'en servir comme tel.
2. Une formation digne de ce nom construit des réponses, ou du moins des éléments de réponses, au sens praxéologique du terme. À une question « comment accomplir telle tâche », on va d'abord situer ou resituer la tâche dans le type de tâches dont elle constitue un spécimen, puis développer une technique, justifiée par une technologie scientifiquement fondée. Les réponses ne sont donc pas dogmatiques, elles sont scientifiquement fondées par un certain environnement technologico-théorique dont une communauté scientifique est la garante et où elles ont été mises à l'épreuve. Cela n'empêche bien évidemment pas que, compte tenu de l'évolution de la science, les réponses fabriquées puissent évoluer ou encore qu'elles puissent être explicitées ou justifiées davantage, voire développées si nécessaire. Il faut cependant garder un équilibre entre le développement de justifications et la nécessaire avancée du temps de l'étude.
3. À propos du développement inégal, c'est souvent des raisons didactiques qui le justifient : telle chose doit être travaillée de manière approfondie, et une fois suffit, ou au contraire telle autre chose doit être vue sous plusieurs angles, en plusieurs fois et à petites doses, alors que pour une troisième, bien partagée dans la profession, une courte mise au point suffit. Du point de vue de la gestion de la classe, il ne faut pas perdre de vue que la quasi totalité des difficultés de gestion de la classe qui ne se règlent pas avec le travail fait en formation en début d'année relèvent de problèmes de fabrication des organisations mathématiques et des organisations didactiques (avec notamment l'articulation topos / milieu). [cf travail d'analyse de l'observation sur les programmes de calculs].
4. Il ne faut pas oublier que la formation n'est pas là pour répondre aux questions en temps réel, mais pour forger des réponses à des questions de la profession, questions qui se poseront pour la plupart pendant les nombreuses années d'exercice qui vous sont promis et pour lesquelles les $R^{\heartsuit}$ élaborées une année n joueront le rôle d'un $R^{\Diamond}$ l'année $n+1$, qu'il faudra examiner et confronter à d'autres $R^{\Diamond}$ pour la développer ou décider qu'un développement n'est pas nécessaire.

3. *Recherches dans le séminaire*

Difficultés à faire des recherches dans les anciens séminaires.
La recherche dans les archives du séminaire.
Devoir aller fouiller dans les archives du séminaire.

Commentaires développés oralement
C'est évidemment lié à la position précédente sur les questions et à la nature de la formation. L'existence des archives du Séminaire est une condition qui favorise grandement le travail d'élaboration de réponses scientifiquement fondées pour la profession. Il est essentiel d'apprendre à s'en servir de $R^{\Diamond}$ pour fabriquer des réponses $R^{\heartsuit}$.

4. *Le dispositif adopté en Séminaire*

Je n'arrive plus à suivre le travail sur vidéo-projecteur.
Les séances de séminaires, et en particulier les documents vidéoprojetés me semblent trop « fouillés » (!) : noter les idées clés et les développer oralement me permettrait de rester plus attentive.
Je trouve long le travail en séminaire.
L'aspect « cours magistral » des séminaires, loin de certaines attentes.
Manque d'exemples concrets pour illustrer certains points.

Commentaires oraux

5. *Miscellanées*
Le fait de ne pas aborder, ou très peu, le moment du travail de l'OM.
Une lisibilité des enseignements dans leur ensemble un peu difficile. L'organisation est un peu décousue…
La répartition du travail dans le temps : parfois peu de choses à faire, d'autres fois : compte-rendu séminaire, préparation d'exposé, compte-rendu de séance.
Le fait de passer de professeur (au collège) au statut d'élève (à l'IUFM) chaque semaine n'est pas évident à gérer.
Cela remet en question mes expériences de remplaçant (contractuel), c'est assez dur à vivre.
Diminution des « débats » en GFP.
L'insuffisance des modèles dans l'utilisation concrète des TICE.
Niveau théorique très élevé pour moi.
La multiplicité des items C2i2e à valider !

6. *Manque d'information*
Manque de clarté sur la séparation des différentes parties de la formation, les dates clés pas assez soulignées.
Pas assez de transparence sur l'élaboration du mémoire.
Plus d'informations sur le corpus B.
Manque d'informations concernant le corpus B.

Commentaires
On trouve presque tout dans le document de rentrée distribué le 29 août et détaillé sur 11 pages, qui est disponible sur le site, même si la prise en compte de la charge de travail peut amener à décaler une ou deux dates pour le mémoire par exemple. On attend d'un professeur, même débutant, qu'il soit autonome sur certains aspects, dont la recours et la lecture de ce type de documents font partie.

On peut y voir apparaître le corpus B en lien avec le rapport 2 de la façon suivante :

• Le ***rapport 2*** est rédigé en principe par le même visiteur sur la base d'une prise d'information concrétisée en deux corpus solidaires mais distincts, le ***corpus A***, constitué du compte rendu d'observation établi par le visiteur à la suite d'une ***deuxième visite en classe*** (avant la mi-mars), et le

corpus B, constitué par l'élève professeur dans la période qui suit cette deuxième visite, et qui doit comporter

– *l'ensemble des documents écrits* (activités, synthèses, exercices, etc.) témoignant de l'activité de la classe (observée à travers deux élèves adéquatement choisis par le professeur stagiaire) sur le thème d'études principal travaillé lors de la visite, et cela au long d'une séquence comportant en moyenne sept séances réparties autour de la séance observée *in situ* (par exemple 2 ou 3 séances avant et 2 ou 3 séances après la visite, ou, si l'étude du thème a été inaugurée lors de la visite, 5 à 6 séances après la visite, etc.) ;
– lorsqu'ils ne sont pas inclus dans l'ensemble précédent, les *devoirs en classe* et / ou *à la maison* rédigés par les deux élèves choisis et relatifs en tout ou partie au thème d'études retenu, ainsi éventuellement que les corrigés correspondants ;
– *une présentation* de l'ensemble des pièces ainsi rassemblées, avec une analyse synthétique de l'organisation mathématique étudiée, une *chronologie* des séances (maximum 2 pages) et *un tableau* présentant *les notes* (et, s'il y a lieu, les appréciations) assignées à l'ensemble des élèves de la classe depuis le début de l'année jusqu'à la date de la constitution du corpus B.

☞ Le rapport 2 doit faire apparaître le ***jugement*** du visiteur sous la forme de l'une des trois modalités suivantes : ***positif, réservé, négatif***, jugement qui doit être justifié par la mesure dans laquelle l'élève professeur maîtrise les compétences suivantes : 2. Maîtriser la langue française pour communiquer et enseigner ; 3. Maîtriser les disciplines et avoir une bonne culture générale ; 4. Concevoir et mettre en œuvre son enseignement ; 5. Organiser le travail de la classe ; 6. Prendre en compte la diversité des élèves ; 7. Évaluer les élèves ; 8. Maîtriser les technologies de l'information et de la communication.

(Il appartiendra au jury d'évaluation du stage en responsabilité de déterminer le jugement ***global*** porté à propos de ce volet de la formation.)

On y trouve de même un long développement sur le mémoire, que l'on ne citera pas ici et un calendrier de la formation qui comporte par exemple pour les mois de janvier et février les notations suivantes :

Séquence 3 *:* mardi 6/01, mardi 13/01*, mardi 20/01, mardi 27/01, mardi 3/02, mardi 10/02, mardi 17/02* [7 journées]

☞ Le 27/01, remise de la première partie du TER (*observation* + *analyse didactique*) ainsi que de l'*évaluation*, et choix final du *sujet de développement*.
☞ Préparation de l'organisation mathématique de la séquence devant faire l'objet du corpus B.
☞ La *deuxième visite* doit avoir lieu dans la période du lundi 9 février au samedi 28 mars.

Compte tenu de l'avancée du travail, nous avons déplacé la remise de la première partie du TER au 10 février, et le début des visites au 16 février.

La deuxième partie du questionnaire ne sera pas commentée. On se contentera de souligner que l'identification du travail personnel à effectuer en lien avec la formation est encore fort incertaine.

Nombre de réponses citent des gestes professionnels dont la réalisation a progressé ou au contraire qui sont encore insuffisamment maîtrisés, ce qui laisse supposer que certains gestes d'étude sont mieux maîtrisés ou au contraire pas assez développés sans que l'on sache quels sont ces gestes d'étude. Par exemple :
Il me semble avoir compris ce qu'est une AER et sa raison d'être.
J'arrive mieux à concevoir une AER et repérer les questions cruciales.
J'ai des difficultés à travailler un thème en entier, à prévoir toutes les questions que peuvent se poser les élèves. De plus, les séances se déroulent rarement comme prévu.

Des réponses sont cependant adaptées à la question posée, même si certaines d'entre elles sont encore peu précises :
Le fait de retravailler « plus » le GFP et le séminaire pour enrichir mes préparations.
Le rapport de visite m'a permis de cerner certains problèmes et de mieux comprendre des points de la formation qui m'était encore assez imperméable.
Je ne suis pas assez investi dans les FIT.
Le travail à faire pour les séances suivantes n'est pas toujours fait en profondeur.

2. Faisons le point !

La problématique ***générique*** du travail est la suivante : étant donné une ***question d'enseignement*** *Q*, il s'agit d'élaborer une ***réponse*** $R^\heartsuit$ selon le schéma général ci-après :
I. ***Observer*** les réponses $R^\Diamond$ existantes dans la culture ou les pratiques professionnelles.
II. ***Analyser***, au double plan clinique/expérimental et théorique, ces réponses $R^\Diamond$.
III. ***Évaluer*** ces mêmes réponses $R^\Diamond$.
IV. ***Développer*** une réponse propre $R^\heartsuit$.
V. ***Diffuser et défendre*** la réponse $R^\heartsuit$ ainsi produite.
Une fois élaborée, la réponse $R^\heartsuit$ prendra, notamment pour autrui, ou pour ses créateurs, mais un peu plus tard, le statut de réponse $R^\Diamond$: elle pourra alimenter un nouveau cycle Observation / Analyse / Évaluation / Développement / Diffusion & défense, etc.

Pour ***étudier une réponse existante*** $\mathcal{R}^\Diamond$, on examinera les ***types de tâches*** réalisés, les ***techniques*** qui permettent de les accomplir, la ou les ***technologies*** qui justifient, produisent ou rendent intelligibles ces techniques, la ou les ***théories*** qui justifient, produisent, rendent intelligibles la ou les technologies.

Parce que :
① Quelle qu'en soit la nature, ***toute*** activité humaine peut être analysée comme mettant en œuvre une ou des organisations du type $[T/\tau/\theta/\Theta]$: toute activité peut être regardée comme consistant à ***accomplir une tâche t*** d'un certain ***type T***, ***au moyen*** d'une certaine ***technique*** $\boldsymbol{\tau}$, ***justifiée*** par une ***technologie*** $\boldsymbol{\theta}$, elle-même ***justifiable*** par une ***théorie*** $\boldsymbol{\Theta}$.
② Une organisation $[T/\tau/\theta/\Theta]$ est appelée, d'une manière générale, une ***praxéologie***, ou ***organisation praxéologique***. Le mot de « praxéologie » décalque la structure $[T/\tau/\theta/\Theta]$: le grec ***praxis***, « pratique », renvoie au bloc pratico-technique $[T/\tau]$, et ***logos***, « raison », « discours raisonné », au bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$.

L'objet du Séminaire est ainsi d'observer, d'analyser, d'évaluer, de développer, de défendre et diffuser des réponses à des questions professionnelles, ces réponses étant des praxéologies.

Il s'agit donc d'étudier des praxéologies qui sont des réponses à des questions professionnelles, et notamment à une question qui constitue le cœur du métier de professeur de mathématiques :

$\mathcal{Q}$: Comment concevoir et réaliser une séquence sur un thème mathématique donné [dans une classe donnée] ?
(c'est la compétence : concevoir et mettre en œuvre son enseignement, dont on a dit que la maîtrise supposait la maîtrise des autres compétences.)

Cette question, nous l'avons dans un premier temps scindée en deux sous-questions dialectiquement liées :

$\mathcal{Q}_1$: Comment concevoir et réaliser une organisation mathématique relative à un thème donné ?
(compétences principales : maîtriser les disciplines et avoir une bonne culture générale ; maîtriser les TIC ; agir en fonctionnaire de l'État)

$\mathcal{Q}_2$: Comment concevoir et réaliser une organisation de l'étude relative à une organisation mathématique donnée ?
(compétences principales : maîtriser les disciplines et avoir une bonne culture générale ; organiser le travail de la classe, évaluer les élèves, maîtriser les TIC . agir en fonctionnaire de l'état, gérer la diversité des élèves)

Examinons quelques éléments de la réponse apportée à $\mathcal{Q}_1$ au fil du Séminaire, en nous centrant d'abord sur la question de la conception de l'OM, la réalisation de celle-ci étant fortement liée à l'OD mise en place.

Nous avons dit qu'il s'agissait de déterminer, à partir des programmes, des documents d'accompagnement des programmes, de ce que l'on sait ou peut savoir des mathématiques par le biais de sources diverses (Archives du Séminaire, préparation aux concours du CAPES ou de l'Agrégation, ouvrages divers, sites Internet, etc…) les types de tâches à étudier, les techniques qui permettent d'accomplir ces types de tâches, la ou les technologies qui permettent de justifier, de produire et de rendre intelligibles ces techniques, la ou les théories qui permettent de justifier, de produire et de rendre intelligibles cette ou ces technologies.

Le travail à effectuer peut amener à considérer des organisations mathématiques de taille assez différente, ou plus précisément qui ***relève de niveaux de détermination didactique différents.***

Organisation ponctuelle :	$[T / \tau / \theta / \Theta]$	**Sujet**
Organisation locale :	$[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$	**Thème**
Organisation régionale :	$[T_{ij} / \tau_{ij} / \theta_j / \Theta]$	**Secteur**
Organisation globale :	$[T_{ijk} / \tau_{ikj} / \theta_{jk} / \Theta_k]$	**Domaine**

Ce sont par exemple de ce type de questions que relèvent les deux questions suivantes posées la semaine dernière :

Comment expliquer aux élèves le fait que l'expression analytique d'une droite s'appelle équation de droite ? (Éviter les confusions...) (14, 2de)

À quel moment de la progression est-il le plus pertinent d'introduire la résolution d'inéquations produit à l'aide des tableaux de signe ? Ce point du programme peut-il être traité en parallèle avec les fonctions (et avec l'étude graphique du signe d'une fonction) ou est-il préférable de l'inclure dans un chapitre consacré à la résolution d'équations et d'inéquations ? Est-il mieux d'avoir traité auparavant les fonctions affines et équations de droite ? (14, 2de)

La première relève vraisemblablement d'une organisation mathématique thématique (les équations de droite ou les fonctions affines), et la seconde, qui part d'une organisation mathématique ponctuelle (autour du type de tâches « résoudre une inéquation produit »), interroge de fait la constitution de l'articulation d'une organisation mathématique du niveau du secteur (Les fonctions).

On examinera ici la deuxième de ces questions, la première sera traitée dans le forum des questions (voir *infra,* notes de la séance 14).

Dans le travail que nous avons mené sur les fonctions en seconde, nous avons vu que le calcul algébrique avait à être motivé par le travail sur les fonctions : on cite à nouveau ci-dessous l'extrait de programme concerné, ainsi qu'un extrait du document d'accompagnement.

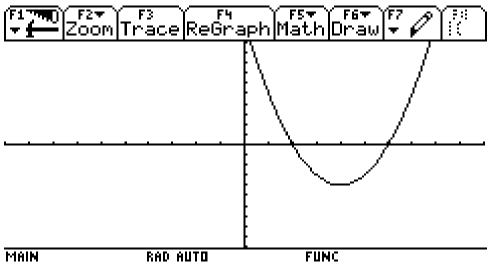
> Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions.

> Le programme rassemble sous un titre unique un bilan sur les ensembles de nombres, les problèmes de calcul numérique et algébrique et l'étude des fonctions. C'est une invitation forte à chaque enseignant pour qu'il construise son cours en faisant interagir ces divers éléments : calcul numérique ou littéral et recherche d'images, résolution d'équations par le calcul ou dans un environnement graphique, de façon approchée ou exacte, ordre entre les nombres et variations de fonctions, etc. On veillera, en particulier, à choisir des problèmes se prêtant à plusieurs approches et admettant des types de résolution variés.

La résolution d'une inéquation produit, ainsi, n'a pas à se traiter de manière isolée par le biais d'un « tableau de signes », ce qui serait exclusivement algébrique, mais a à se placer dans le secteur des fonctions, fonctions affines bien sûr mais aussi pour les produit de deux facteurs du premier degré, fonctions carrés, etc. Voici par exemple une technique relative à ce type de tâches qui relève résolument d'une OM sectorielle.

Soit à résoudre l'inéquation $(x-6)(x-2)\leqslant 0$.

On trace la courbe de la fonction qui à x associe $(x-6)(x-2)$ avec la calculatrice : on obtient :



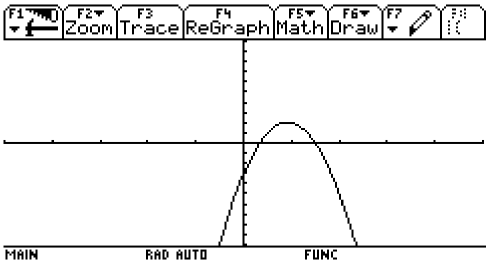
L'ensemble de solutions est [2 ; 6].

Preuve :
La fonction qui à x associe $x-6$ est une fonction affine croissante ($a = 1$) s'annulant en 6 ; elle est donc négative sur l'intervalle $]-\infty\,;6]$ et positive sur l'intervalle $[6\,;+\infty[$. (vérification calculatrice OK)
La fonction qui à x associe $x-2$ est une fonction affine croissante ($a = 1$) s'annulant en 2 ; elle est donc négative sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ et positive sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$. (vérification calculatrice OK)
On obtient alors le tableau suivant :

x	∞		2		6		+
$(x-2)$		−	0	+		+	
$(x-6)$		−		−	0	+	
$(x-6)(x-2)$		+	0	−	0	+	

Soit maintenant à résoudre l'inéquation $(3-2x)(3x-1) \geqslant 0$.

On trace la courbe de la fonction qui à x associe $(3-2x)(3x-1)$ à la calculatrice ; on obtient :



La solution est $[a\,;b]$ avec $a \approx 0{,}3$ et $b \approx 1{,}5$.

Une table de valeurs donne :

x	y1
.8	1.96
.9	2.04
1.	2.
1.1	1.84
1.2	1.56
1.3	1.16
1.4	.64
1.5	0.

x=1.5

b = 1,5 ; pour a :

x	y1
.1	-1.96
.2	-1.04
.3	-.24
.4	.44
.5	1.
.6	1.44
.7	1.76
.8	1.96

x=.2

x	y1
.3	-.24
.31	-.1666
.32	-.0944
.33	-.0234
.34	.0464
.35	.115
.36	.1824
.37	.2486

x=.3

x	y1
.33	-.0234
.331	-.016366
.332	-.009344
.333	-.002334
.334	.004664
.335	.01165
.336	.018624
.337	.025586

x=.33

x	y1
.333	-.002334
.3331	-.00163366
.3332	-.00093344
.3333	-.00023334
.3334	.00046664
.3335	.0011665
.3336	.00186624
.3337	.00256586

x=.333

a = 1/3.

Preuve :
La fonction qui à x associe $3-2x$ est une fonction affine décroissante ($a=-3$). Elle s'annule pour $3 = 2x$, soit $x = 3/2 = 1{,}5$. Elle est donc positive sur l'intervalle $]-\infty\,;1{,}5]$ et négative sur l'intervalle $[1{,}5\,;+\infty[$. (vérification calculatrice OK)
La fonction qui à x associe $3x-1$ est une fonction affine croissante ($a = 3$). Elle s'annule pour $3x = 1$, soit pour $x = 1/3$. Elle est donc négative sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$ et positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$. On obtient donc le tableau suivant :

x	∞		1/3		1,5		+
$(3x\text{-}1)$		–	0	+		+	
$(3\text{-}2x)$		+		+	0	−	
$(3x\text{-}1)(3\text{-}2x)$		−	0	+	0	−	

NB : L'intérêt de ce type de techniques pour éliminer les problèmes de signe dans la résolution des inéquations du premier degré.

Nous en viendrons maintenant à la deuxième question à l'étude dans le Séminaire :
$\mathcal{Q}_2$: Comment concevoir et réaliser une organisation de l'étude relative à une organisation mathématique donnée ?

Nous avons mis en évidence qu'il s'agissait de réaliser six fonctions didactiques, qui sont autant de moments de l'étude. Le mot de « moment » par lequel on désigne ces fonctions se justifie par le fait que, quelle que soit la manière d'opérer du professeur, ***il arrive forcément un moment où***… – où, par exemple, la classe, sous la direction du professeur, ***rencontre*** pour la première fois le type de tâches T_i.

Étant donné une organisation mathématique ***ponctuelle*** $\mathcal{O}_i = [T_i / \tau_i / \theta_i / \Theta_i] \subset \mathcal{O}$, où θ_i et Θ_i sont les parties de θ et Θ permettant de justifier le bloc $[T_i / \tau_i]$, on distingue donc six moments :

➔ le moment ***de la (première) rencontre*** avec T_i ;
➔ le moment ***exploratoire***, qui voit ***l'exploration*** du type de tâches T_i et ***l'émergence de la technique*** τ_i ;
➔ le moment ***technologico-théorique***, qui voit ***la création du bloc*** $[\theta_i / \Theta_i]$;
➔ le moment ***du travail*** de l'organisation mathématique créée, et en particulier ***du travail de la technique***, où ***l'on fait travailler*** les éléments de l'OMP élaborée pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on ***travaille sa maîtrise*** de l'OMP considérée, et en particulier de la technique τ_i ;
➔ le moment ***de l'institutionnalisation***, où l'on ***met en forme*** l'organisation mathématique construite $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$, en précisant chacun de ses composants, et en l'amalgamant à l'organisation mathématique déjà institutionnalisée – que l'on peut noter, pour plus de clarté, $\oplus_{j<i}[T_j / \tau_j / \theta_j / \Theta_j]_{j\in 1,j<i} = [\oplus_{j<i}T_j / \oplus_{j<i}\tau_j / \oplus_{j<i}\theta_j / \oplus_{j<i}\Theta_j]_{j<i}$;
➔ le moment ***de l'évaluation***, où l'on évalue sa ***maîtrise*** de l'organisation mathématique créée, mais aussi où l'on évalue ***cette organisation mathématique elle-même***.

② Chacun de ces moments peut se réaliser en ***plusieurs épisodes*** : non seulement parce que l'on procède par épisodes ***limités dans le temps***, mais aussi parce que – par exemple – un épisode de travail de la technique peut conduire à retoucher l'organisation mathématique mise en place, et donc éventuellement à vivre un nouvel épisode technologico-théorique, et en tout cas à envisager, si bref soit-il, un autre épisode d'institutionnalisation.

③ Les moments didactiques sont des entités ***fonctionnelles***, dont la réalisation ***structurelle*** est *a priori* non déterminée (ou sous-déterminée), mais que l'on doit pouvoir retrouver à travers ***tout choix structurel déterminé***.

❶ S'agissant de la structure didactique ternaire (ou quaternaire) mise en avant dans ce Séminaire (et dans les programmes), on aura ainsi les correspondances suivantes :

➔ le moment ***de la première rencontre***, le moment ***exploratoire***, le moment ***technologico-théorique*** se réalisent dans les ***activités d'étude et de recherche*** (AER) ;
➔ le moment ***de l'institutionnalisation*** correspond pour l'essentiel à la ***synthèse*** ;
➔ le moment ***du travail de l'organisation mathématique*** se concrétise dans les ***exercices & problèmes*** ;
➔ le moment de l'évaluation se réalise notamment à travers les divers travaux évalués.

Nous avons pour l'essentiel travaillé les trois premiers moments de l'étude, par le truchement de la conception et de la réalisation d'AER ; les moments de travail et d'évaluation par l'intermédiaire du forum des questions, du test d'entrée et de la notice « évaluation & notation – Aspects didactiques ; un peu le moment d'institutionnalisation à l'occasion du forum des questions.

En dépit de la correspondance ébauchée ci-dessus, il n'y a pas, en règle générale, de « bijection » entre ***structures*** et ***fonctions***. Les modules (en 2de) ou les DM (dans toutes les classes) sont ainsi des ***structures*** didactiques, alors que « le travail de la technique » ou « l'institutionnalisation » sont des ***fonctions*** didactiques.

❶ La culture courante pousse en avant l'abord ***« structuraliste »*** du monde en faisant passer au second plan son abord ***« fonctionnaliste »*** : devant un objet ou une machine, ainsi, on se demandera plutôt (ou d'abord) « Qu'est-ce que c'est ? », ou « Comment c'est fait ? », et on ne se demandera qu'ensuite (et peut-être jamais) « À quoi ça sert ? », ou « Ça permet de faire quoi ? ».

❷ Conformément à cette pression de la culture (et de l'angoisse), l'attitude spontanée de beaucoup de professeurs débutants (au sens large) consiste à faire passer le structurel avant le fonctionnel. Que dois-je leur donner en DM ? Que vais-je leur faire faire en activité ? Que vais-je faire en module ? Etc. Le fonctionnel n'est pas entièrement ignoré, mais il apparaît souvent ***second***, comme ***dominé*** par la pression du structurel. Or une structure didactique donnée a en général été conçue pour permettre au professeur d'assumer des fonctions didactiques déterminées. Son utilisation (in)volontairement détournée – corriger un DS en AI, par exemple – risque de faire que ces fonctions-là ***ne seront plus assumées*** : si l'on détourne l'AI de ses fonctions officielles, ainsi, où apportera-t-on aux élèves les plus démunis l'aide particulière qu'ils nécessitent, par exemple ?

❸ Un effort doit donc être fait pour substituer à l'abord structuraliste spontané une vision fonctionnelle des structures didactiques existantes ou possibles, en ayant constamment à l'esprit les questions suivantes :

– Que dois-je faire ?
– Quels dispositifs puis-je utiliser pour cela ?
– Mon choix de dispositifs est-il optimal ? Quelles fonctions didactiques favorise-t-il ? Au détriment de quelles fonctions didactiques éventuelles se fait-il ?

Pour poursuivre cette mise au point, nous examinerons d'abord très rapidement quelques questions posées les semaines précédentes.

Un nouvel élève arrive

Que faire avec un élève qui arrive en cours d'année dans le groupe classe ? (11, 2de)
Un nouvel élève vient d'arriver dans la classe. Comment gérer cette situation ?(Dois-je lui fournir les cours ? ...) (14, 2de) Comment intégrer dans le groupe classe, un nouvel élève qui n'a pas étudié les mêmes chapitres que les autres ? (14, 4^{e})

1. On rappelle ci-dessous un passage de la circulaire du 3 mai 1961 :

Un cahier de textes bien tenu est, pour l'élève, l'instrument premier de tout travail personnel efficace. Le cahier de textes de classe, qui *sert avant tout de référence aux cahiers de textes individuels*, et *doit être, de façon permanente, à la disposition des élèves* qui peuvent à tout moment s'y reporter, assure en outre, dans l'esprit de la circulaire du 20 octobre 1952 *la liaison entre les professeurs et les maîtres chargés des études surveillées*. Il permet enfin, en cas d'absence ou de mutation d'un professeur de ménager *une étroite continuité entre l'enseignement du maître précédent et celui de son suppléant ou de son successeur*. À ces divers titres, cahiers de textes de classe et cahiers individuels doivent être *complets*, de maniement facile et exempts de fautes. Ils doivent *refléter la vie de la classe et permettre de suivre avec précision la marche des études*.

Le cahier de textes est ainsi ***un dispositif didactique,*** dont une ***fonction*** est de ***décrire « la marche des études » d'abord à l'intention des élèves***, afin que chacun d'eux en soit clairement informé. Une copie du cahier de textes de la classe devrait donc pouvoir être fourni à l'élève nouvellement arrivé pour qu'il puisse s'y reporter.

2. Comme nous l'avons vu en plusieurs occasions, c'est l'équipe pédagogique dans son ensemble qui doit prévoir un dispositif d'intégration de l'élève ; pour ce qui relève spécifiquement du professeur de mathématiques, les dispositifs des tests d'entrée et d'aide individualisée en seconde ou de soutien en 4^{e} doivent permettre de rendre l'insertion plus facile, d'une part, en examinant « au plus juste » à chaque nouveau thème les éléments nécessaires qui n'ont pas été étudiés et qui seront ainsi signifiés à l'élève ; d'autre part, en utilisant la synthèse qui doit figurer dans le cahier de textes pour mettre minimalement en main les praxéologies identifiées. Il est également important d'interagir avec les parents.

Test d'entrée et révisions

Est-il possible de façon exceptionnelle, de distribuer un cours polycopié aux élèves ? (sur un chapitre de « révisions ») (14, 2de)
En séminaire, on a dit que les contrôles surprises sont à éviter, à bannir même. Qu'en est-il des « tests d'entrée », doit-on demander de préparer en regardant les cours des années précédentes ? Un test d'entrée, même planifié est quelque part un contrôle surprise, non ? (13, 5^{e})
Le test d'entrée est réalisé sous la forme d'un QCM ou peut-il avoir une forme d'exercice ou autre forme ? (14, 4^{e})

1. On rappelle qu'il faut éviter les révisions. Il y a bien certains chapitres dont le contenu est pour l'essentiel connu mais dont il faut reprendre l'étude : c'est ainsi que l'étude des configurations planes en seconde est liée à l'introduction des triangles isométriques et semblables. La synthèse (et pas le cours) devant, comme le reste, laisser une large place à l'activité de l'élève, une synthèse polycopiée doit donc être le résultat du travail de la classe. Dans ce cadre de reprise d'étude, le premier dispositif est le test d'entrée qui permet de voir où en est la classe.

2. À cet égard, voici un extrait de ce que dit la notice « le temps de l'étude » :
Un test d'entrée peut prendre la forme d'une épreuve de 15 à 20 minutes, phase de travail ***individuel écrit*** suivie d'une phase de travail ***collectif*** en classe, immédiatement, ou lors de la séance suivante. La phase de travail individuel écrit apparaît ***indispensable*** pour que l'élève puisse apprécier par lui-même sa capacité – ou son incapacité – à s'affronter avec succès aux types de tâches mathématiques proposés. Ce travail écrit peut faire l'objet d'une double évaluation. L'évaluation réalisée ***par l'élève***, qui appréciera ainsi sa capacité à résoudre les problèmes des types proposés, pourra être consignée sur la copie, au moment où le professeur met un terme à la session de travail individuel écrit, et être exprimée sur une échelle en quelques points (par exemple : très faible, insuffisant, moyen, satisfaisant, très satisfaisant). L'évaluation réalisée ***par le professeur*** pourra, quant à elle, se traduire par une note chiffrée, dont le poids dans la série des notes attribuées à l'élève devra cependant rester ***très limité***.

4.6. Le test d'entrée doit permettre à l'élève et au professeur d'apprécier la maîtrise réelle qui est celle de l'élève sur les types de problèmes situés ***à la frontière*** entre l'une et l'autre classes. D'une manière générale, la principale difficulté de fabrication d'un tel test est liée à la contrainte de temps : parce qu'il doit ***relancer*** l'étude, et non l'arrêter durablement, un test d'entrée, on l'a dit, doit être ***bref***. Cette exigence conduit à renoncer à représenter, dans l'échantillon de tâches mathématiques proposées, l'***ensemble*** des types de tâches qui ont pu être rencontrées dans les classes précédentes, et à s'en tenir à ***quelques*** spécimens de difficulté graduée. S'agissant du thème des inéquations du premier degré à une inconnue et de la classe de seconde, on pourra ainsi envisager le test ci-après[17].

> Résoudre les inéquations et systèmes d'inéquations suivants, en représentant chaque fois l'ensemble des solutions sur une droite graduée : a) $-5x - 2 < 0$; b) $1 - 4x > -5x$; c) $\frac{12x+7}{5} > x - 1$; d) $\begin{cases} 2x - 8 < 5x + 13 \\ 4x - 23 \leqslant 10 + x \end{cases}$

Le test d'entrée proposé en exemple rappelle en outre que la gradation dans la difficulté ne saurait partir du niveau de difficulté ***le plus faible***, ainsi qu'on le ferait avec des commençants « absolus » : l'inéquation $3x + 4 > 10$, et même encore l'inéquation $3x + 6 > 10$, n'a ***en principe*** pas sa place dans un test d'entrée à proposer en 2[de]. Inversement, on devra en général renoncer à faire figurer les problèmes les plus mangeurs de temps, comme le sont généralement les problèmes de ***modélisation*** par exemple.

Rien ne dit ici que le test d'entrée devrait prendre la forme d'un QCM, rien ne l'interdit non plus d'ailleurs, mais l'exemple qui est donné n'en est pas un.

3. Le dispositif de l'interrogation surprise est un dispositif qui, comme son nom l'indique partiellement, prend par surprise l'élève au cours du processus d'étude. Un test d'entrée ne se place aucunement dans cette perspective. Il a clairement pour fonction d'intervenir sur une OM déjà étudiée, et donc sur un processus d'étude terminé, même s'il va peut-être reprendre. Il faut effectivement prévenir les élèves de sa date de façon qu'ils puissent s'y préparer, même si le travail de préparation est laissé à accomplir en autonomie didactique.

Raison d'être

Comment introduire et motiver la notion de variations d'une fonction en classe de seconde ? (14, 2[de])

Nous avons vu, dans l'étude du second compte rendu que nous avons effectuée, que l'étude des variations d'une fonction étaient motivée par la question de l'optimisation de grandeurs. C'est donc d'un problème de ce type que partira l'étude de ce thème.

Nous poursuivrons cette mise au point sur les organisations de l'étude en examinant les travaux effectués la semaine dernière sur l'observation en cours d'analyse. Il s'agissait d'examiner la deuxième partie de l'observation et plus précisément :
1. D'identifier le moment principal de l'étude de l'OMP (T) réalisé par cette deuxième partie de séance et d'en donner une analyse.
2. De donner, en les justifiant, un point positif et un point négatif de la réalisation de ce moment ;
3. De proposer enfin une voie de développement du point négatif cité.

1. Le moment est correctement identifié par l'ensemble des travaux, il s'agit du moment exploratoire du type de tâches T « Déterminer un programme de calcul plus simple équivalent à un programme de calcul donné ». Les analyses de la réalisation de ce moment sont plus ou moins développées. Nous partirons de l'analyse suivante, que nous examinerons et que nous enrichirons par l'examen des autres analyses.

[17]On se réfère ici à l'ancien programme de 3e, qu'on étudié les élèves actuellement en classe de seconde, et qui prescrivait l'étude des système d'inéquations.

Le principal moment de l'étude de cette organisation mathématique ponctuelle est le moment exploratoire. Le travail de la classe est réparti en plusieurs groupes, ce qui va favoriser les échanges entre les élèves et leur réflexion personnelle (temps accordé assez long). Chaque groupe a une tâche assignée différente (trois programmes de calcul au total). À partir d'un problème de calcul d'aire en géométrie, chaque groupe doit écrire un programme de calcul puis doit en conjecturer une simplification d'écriture, autrement dit un programme équivalent mais a priori plus rapide : P veut faire émerger les règles de calcul littéral, la simplification d'une expression mathématique. P surveille globalement la classe et son travail tout en circulant de groupe en groupe afin de guider les élèves dans leur recherche s'ils rencontrent un problème ; mais en général, ils ont l'intuition du bon résultat. Une fois la conjecture faite, tout d'abord par certains groupes puis après la mise en commun écrite au tableau par P des résultats obtenus, les élèves expérimentent leur hypothèse avec le tableur du logiciel Star Office. Après cette nouvelle phase exploratoire faisant appel à l'outil informatique et pendant laquelle les élèves vérifient par eux-mêmes leur conjecture, P illustre ce qu'il fallait faire et trouver en projetant l'écran de son ordinateur où elle effectue les étapes de l'expérimentation, ce qui clôt la séance.

Travail collectif dirigé

Ce travail a abouti au développement suivant.

Le principal moment de l'étude de cette organisation mathématique ponctuelle est le moment exploratoire. Le travail de la classe est réparti en plusieurs groupes, avec un ordinateur par groupe, ce qui va permettre les échanges entre les élèves et leur réflexion personnelle (temps accordé assez long). Chaque groupe a une tâche assignée différente (trois programmes de calcul au total). À partir d'un problème de calcul de grandeur géométrique, chaque groupe doit écrire un programme de calcul puis en conjecturer une simplification d'écriture, autrement dit un programme équivalent mais a priori plus rapide : P veut faire émerger les règles de calcul littéral, la simplification d'une expression mathématique. Après une première période de recherche en autonomie (environ 8 min), P s'appuie sur la conjecture d'un groupe à propos du premier problème pour expliciter à nouveau le travail à effectuer. P surveille globalement la classe et son travail tout en circulant de groupe en groupe afin de guider les élèves dans leur recherche s'ils rencontrent un problème. En général, ils arrivent à un résultat pertinent en calculant quelques valeurs, même si on peut observer quelques difficultés : pour le deuxième problème, un groupe aboutit à $3x + 2x = 5x$, et ne gère pas le 7 ; pour le troisième problème, un groupe obtient $10\times x\times x$ et il faut un peu d'interaction avec P pour aboutir à $10x^2$. On peut noter également un épisode dans lequel P reste avec un groupe à gauche de la salle tandis que, pendant ce temps, des élèves sur le côté droit se dissipent ainsi que le fait que le travail produit par les groupes est inégal.

Une fois la conjecture faite, tout d'abord par certains groupes puis mise en commun et écriture au tableau par P des résultats obtenus, les élèves expérimentent leur hypothèse avec le tableur du logiciel Star Office. Certains groupes ne maîtrisent pas bien le logiciel : on voit des élèves ne pas arriver à recopier vers le bas, d'autres écrire la formule à recopier avec x.

Après cette nouvelle phase du travail exploratoire faisant appel à l'outil informatique et pendant laquelle les élèves vérifient par eux-mêmes leur conjecture, P illustre ce qu'il fallait faire et trouver en projetant l'écran de son ordinateur où elle effectue les étapes de l'expérimentation relative au troisième problème, ce qui clôt la séance. Une bonne partie de cet épisode se déroule après que la sonnerie ait retenti, avec peu d'attention de la part des élèves.

2. Les points positifs avancés sont généralement pertinents, même si les justifications qui sont données sont dans l'ensemble peu développées.

Par exemple, lorsque l'on avance qu'il y a du topos pour les élèves, il faut le justifier, et notamment en termes de milieu, soit encore expliciter en quoi le milieu dont les élèves disposent leur permet de venir occuper le topos prévu. Ici par exemple, la présence des calculatrices dans le milieu permet de compenser la maîtrise encore partielle de l'exécution d'un programme de calcul avec le tableur.

Nous examinerons collectivement la question des points négatifs et de la voie de développement proposée la semaine prochaine.

Pour notre mémoire, doit-on utiliser le vocabulaire utilisé par nos prédécesseurs (cf. mémoires à la bibliothèque) du type : topogénèse, anamnèse, mésogénèse, dialectique professeur-élèves ? Car bien que comprenant à peu près le sens de ces termes, nous n'avons pas vraiment abordé le sujet, que ce soit en GFP ou en séminaire. (14, 5e)

Réponse orale brève qui sera développée la semaine prochaine.

3. Forum des questions

TER – gestion de la séance

Que faut-il mettre dans la partie « gestion de la séance » du mémoire professionnel ? À quelle(s) question(s) faut-il répondre ? Comment structurer cette partie ? (13)
Pour l'analyse du compte rendu d'observation, j'ai du mal à percevoir ce qui distingue l'analyse didactique et la gestion de la séance. (14)

1. Ce qui relève de la ***gestion de la séance*** est en effet souvent délicat à appréhender. Pour tenter de mieux saisir ce qui appartient proprement au registre de la gestion de la séance, on peut se livrer à l'expérience mentale suivante. Soit une séance pour laquelle un scénario mathématico-didactique a été construit. Il s'agit alors de « réaliser » le scénario, concrètement, dans une certaine classe : tel est l'objet de la gestion de la séance par le professeur. On voit alors immédiatement que, pour des réactions identiques des élèves, les décisions et les interventions du professeur pourront varier, aboutissant ainsi à des « gestions de la séance » substantiellement différentes. Pour le dire autrement, les décisions que prend le professeur dans la séance, soit en réponse à des interventions d'élèves « non prévues », soit en raison d'une préparation insuffisante de l'organisation didactique ou de l'organisation mathématique, relèvent de la gestion de la séance.

2. Ce qui rend difficile la distinction avec l'analyse de l'organisation didactique, c'est le fait que, lorsque le professeur entre dans la classe, ce qui va advenir au plan didactique et mathématique est en grande partie fixé : les dés sont jetés – plus ou moins. Si, par exemple, l'activité que le professeur a prévu de proposer aux élèves est grossièrement sur-calibrée ou sous-calibrée, il est vraisemblable que le niveau sonore va monter, les élèves vont désinvestir rapidement le *topos* prévu pour eux, etc. : aucune « gestion de classe » ne peut compenser entièrement un choix de contenus d'activité inadéquat.

3. À propos de la séance observée et étudiée ces dernières semaines, on peut noter comme relevant de la gestion de la séance, pour la première partie, la décision de prise en charge des erreurs de calculs en annonçant aux élèves qu'ils se sont trompés et donnant le résultat correct « le nombre

d'arrivée est le double du nombre de départ », que nous avons déjà commentée ; Dans la deuxième partie, la décision de poursuivre la mise en commun alors qu'il ne restait qu'une ou deux minutes de temps utile amène à la terminer rapidement et à donner le travail à faire après que la sonnerie a retenti ou encore « l'arrêt prolongé » sur la gauche de la classe qui suscite bruit et dissipation des élèves situés à droite.

Ce qui suit n'a pas été étudié collectivement, faute de temps.

La gestion du temps de l'étude

Du retard non négligeable est pris après une grève des élèves. Que faire quand les cours reprennent ? Accélérer tout de suite pour rattraper le temps perdu ? Ou reprendre le rythme normal et essayer tout de même de finir le programme ? (13, 2de)

Mes élèves trouvent que cela va trop vite, qu'ils ont trop de travail. La question est la suivante : faut-il conserver le rythme ou ralentir ? (12, 2de)

A cause des blocages des lycées (+ les vacances), les élèves risquent de ne pas faire de mathématiques pendant un mois. Comment organiser la reprise de l'étude après une si longue pause imprévue ? (13, 2de et 1re STT)

Quand plus de la moitié de la classe est absente, suite à une fête religieuse, par exemple, vaut-il mieux poursuivre le cours ou faire une séance de révisions-approfondissement en vue d'un contrôle proche ? (12, 5e)

En cas de manifestation lycéenne, est-il raisonnable de poursuivre l'avancée de l'étude avec 15 élèves présents sur 35 ou doit-on prévoir quelque chose de spécial ne pénalisant pas les élèves absents ? (13, 2de)

Il y a la grève dans mon lycée depuis une semaine. Les lycéens bloquent l'accès du lycée aux élèves. J'ai environ quatre élèves par séance. Pour l'instant, j'approfondis l'OM des triangles isométriques. Si cela perdure dois-je continuer le programme avec ceux qui sont là ? Créer des polycops pour ceux qui sont absents ? Dois-je bloquer l'avancée du programme ? (13, 2de)

Peut-on (doit-on ?) modifier la séance de cours prévue lorsque l'effectif de la classe est particulièrement bas (environ la moitié ou moins de la moitié) ?
→ fêtes religieuses (Aïd, nouvel an chinois...) ;
→ grèves ;
→ intempéries (routes barrées...).
J'ai choisi pendant ces séances perturbées de faire une séance informatique et une séance de révision des techniques (séance de questions - réponses entre les élèves).(12, 5e)

Lors des séances, j'ai souvent beaucoup de questions de mes élèves qui retardent l'avancée de l'étude. Est-ce que je dois répondre à toutes les questions, ou en sélectionner juste certaines et en ignorer d'autres ? (12, 4e)

Les lycéens étaient en grève les deux semaines précédentes et sans doute encore cette semaine. Très peu d'élèves sont présents en cours (environ 4 en moyenne). Que peut-on faire dans ces circonstances ? (des révisions, avancer le cours (?)....) (13, 2de)

Arrivés à Noël, mes élèves (2de) auront travaillé :
- Ensembles de nombres
- Arithmétique
- Vecteurs et repérages
- Fonctions : lectures graphiques (images, antécédents, sens de variation, extrema)
- Ordre : comparer deux nombres, encadrer une expression affine d'un nombre (à partir d'un encadrement de ce nombre)

Les triangles isométriques auront été abordés.
J'ai le sentiment d'être en retard sur le programme, mais je crois que ce qui a été fait a été bien fait. Quand dois-je accélérer ? Le risque n'est-il pas qu'à la fin de l'année les élèves aient des bonnes notes, alors qu'ils n'ont pas vu tout le programme ? (11, 2de)

Suite à deux semaines de grève, je n'ai pas pu faire le devoir surveillé prévu. Dois-je faire un rappel avant le contrôle ? Car ça fait un mois qu'il n'ont pas eu de cours ! (14, 2de)
J'ai choisi de partager mon chapitre sur les fonctions en 3 parties : Aspects graphiques ; Aspects algébriques ; Fonctions de référence. La deuxième partie nécessitant beaucoup de rappels, j'ai du mal à avancer. Était-il judicieux de faire ce choix ? (14, 2de)
À cause du blocage du lycée, nous avons pris un peu de retard dans les programmes. Pouvons-nous remplacer pendant quelque temps, l'heure d'aide par une heure en classe entière ? (14, 2de)
Ayant eu pendant quinze jours les grèves, le DS a été reporté à la rentrée. Mais comme environ un mois s'est écoulé, dois-je refaire quelques exercices pour remettre en mémoire les notions et les types de tâches vus en classe ? (14, 2de)
À la rentrée des vacances, est-il conseillé de prendre à peu près quinze minutes sur le premier cours pour faire des rappels sur ce qui a été fait avant la coupure ? (Faire (ou demander aux élèves de faire) un résumé sur le début du chapitre). (14, 5^{e} et 4^{e})
Lors du mouvement lycéen, je n'avais quasiment pas d'élèves, je n'ai donc pas pu avancer normalement. Comment rattraper ce retard ? (14, 2de)
Suite aux grèves des élèves, je pense avoir accumulé un peu de retard dans ma progression. Que faire ? Accélérer ou continuer normalement ? (14, 2de)

1. À propos du retard pris dans la progression, il est encore trop tôt dans l'année pour mettre en place des mesures d'urgence. Il faut en revanche être très vigilant et exigeant dans son travail de préparation de manière à ne pas « gaspiller » inutilement du temps d'étude précieux en se méprenant sur le contenu du programme ou en faisant des erreurs didactiques qu'un peu d'attention aurait pu éviter (voir la question sur le découpage thématique inadéquat du secteur fonctionnel sur lequel la première séance de Séminaire avait attiré l'attention). Il faut ensuite faire le point des thèmes qu'il reste à étudier, examiner ceux qui doivent prioritairement être étudiés « normalement » et travailler évidemment avec les autres professeurs du même niveau, qui sont bien entendu dans la même situation.

2. On trouvera ci-dessous des éléments extraits des Archives du Séminaire de l'année 2005-2006, que nous examinerons en commentant oralement les dispositifs proposés.

> Avec les derniers événements, je vais avoir du mal à finir le programme. Quelle attitude adopter ? S'entendre avec tous les collègues pour ne pas aborder les mêmes notions ? Essayer de les voir au travers de DM ? Utiliser les heures d'AI (qui perdent alors tout leur sens) ?… (Delphine Chambon, OS, 2de, 21)
>
> ### ♦ Ébauche de réponse
>
> 1) Il s'agit là d'une question posée, dans des formulations voisines, par plusieurs participants dont on reproduit ci-après les variantes.
>
> 1. Le lycée étant bloqué depuis deux semaines, certains professeurs souhaitent inviter les élèves chez eux pour poursuivre les cours. Est-ce légitime ? (2de, 21)
>
> 2. Cela fait maintenant trois semaines que les élèves sont “ en grève ” et ils ont voté hier le blocus, sans limite de date. Bien que le temps didactique ne doive pas avancer hors classe, les élèves sont inquiets quant au programme et demandent à travailler. Est-ce possible d'organiser un forum privé, réservé aux élèves de la classe ? Le lycée ne met à disposition des élèves un “ espar ”. Comment en créer un ? (2de, 21).
> 3. Que vaut-il mieux faire, finir le programme ou ne pas forcer le rythme, vu que nos élèves ont perdu une semaine et demie de cours ? Certains de mes collègues du lycée vont forcer le rythme pour boucler le programme, afin de permettre aux futurs élèves de première d'être “ au niveau ”, mais je ne crois pas que

cela sera le cas pour tous les élèves. Je compte prendre le temps prévu pour mes séquences en transformant peut-être les séances d'AI en cours supplémentaires. Est-ce judicieux ? (2de, 21)

4. Dans mon lycée, les cours s'arrêtent fin mai. De plus mes élèves partent une semaine en voyage. Donc un calcul rapide – en supposant que le lycée soit débloqué cette semaine – m'indique qu'il reste cinq semaines. Il est évident que je ne pourrai pas aborder toutes les parties restantes du programme. Quels conseils me donnez-vous quant à la façon de choisir les thèmes à écarter ou à alléger ? (2de, 21)

5. Quels dispositifs didactiques sont préconisés pour arriver à finir le programme malgré les perturbations actuelles ? (2de, 21)

2) Une première disposition consiste à mobiliser de façon exceptionnelle le temps dévolu à des activités en demi-groupes (voire en groupes plus petits) pour en faire des heures en classe entière. Ainsi en va-t-il, en seconde, avec l'enseignement modulaire et l'aide individualisée : tout compris on aboutit alors, sur le papier, à 6 heures en SDP. Le regroupement de la classe – même pour quatre ou cinq heures, et non six, par exemple – aura le mérite, avant même de " gagner du temps d'horloge ", de signifier à chacun le caractère exceptionnel de l'effort à fournir dans un cadre de *mobilisation didactique* dans lequel il convient de " resserrer les rangs ". Plusieurs observations doivent cependant être faites. Tout d'abord, il se peut que cette banalisation horaire ne puisse avoir lieu, notamment en ce qui concerne les heures de module (sauf à trouver un arrangement avec le ou les professeurs " intéressés " par les mêmes heures et les mêmes élèves). Ensuite, il convient de toute façon d'avoir l'accord du chef d'établissement, des collègues, des parents, des élèves : la modification envisagée ne prend son sens que dans le cadre d'un projet collectif explicité et partagé. Enfin, on ne saurait dans le cadre exceptionnel ainsi créé ignorer les fonctions didactiques normalement assumées dans les SDA ainsi intégrés au SDP : au lieu par exemple que la " modulation " de la mise en place des OML étudiées se fasse " en modules ", elle se fera ici en classe entière. D'une façon plus générale, il conviendra de faire une place sans doute un peu réduite mais néanmoins effective aux différents *moments de l'étude*. Notons encore qu'on peut envisager de ne banaliser qu'une *partie* du temps de l'étude disponible, dans le but par exemple de conserver une aide spécifique à l'intention des élèves les plus scolairement démunis.[18]

3) Que faire dans le temps disponible dès lors que ce temps d'horloge apparaît gravement insuffisant ? En certaines disciplines, nombre de professeurs peut-être sont portés, en un tel cas, à accélérer leur enseignement en " faisant cours " – avec prise de notes corrélative des élèves – de façon quasi continue et à toute vitesse. On préconisera ici une autre voie, celle d'une organisation didactique alternative, modeste, qui fut autrefois classique, et qui n'est nullement illégitime, où l'on étudie une matière non pas en suivant le *cours* du professeur mais en examinant l'*exposé* de cette matière *dans tel livre* – sous la direction du professeur. Le choix de l'ouvrage étudié est ici la *clé* de l'économie temporelle à faire prévaloir : on choisira donc un livre présentant par exemple des " résumés de cours " assortis de quelques exercices emblématiques, soit ce qu'on peut nommer un " compendium ", un " précis ", un " abrégé ", qui offre – c'est le principe de la chose – un *digest* (le mot est anglais) d'un ensemble d'items. Muni alors des indications du programme sur le thème ou le sujet à étudier, on en bornera l'étude – au moins en un premier temps – au condensé offert par l'ouvrage choisi.

4) Prenons pour ouvrage le mémento intitulé *Maths 6^{e} 5^{e} 4^{e} 3^{e}* paru chez Hachette Éducation en 2000 (coll. " Maxi Mémento "). Et considérons à titre d'exemple le thème du *cône de révolution* en 4^{e} ou en 3^{e}. L'ouvrage indiqué lui consacre deux pages – une " fiche " – que l'on a reproduites ci-après. Le contrat passé avec la classe sera alors *d'étudier ces deux pages*,

[18] On notera que le dispositif proposé vaut dans le cas de perturbations institutionnelles ou de jours fériés (comme ceux du mois de mai par exemple).

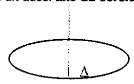
en classe sous la direction du professeur, mais aussi “ à la maison ”, en complétant si nécessaire leur étude par un petit corpus d’exercices & problèmes fourni par le professeur (voire élaboré avec les élèves à partir de diverses sources). L’étude en question visera à dégager les types de tâches (= les types de problèmes) présents ou représentés dans le condensé étudié, ainsi que les techniques, la technologie, les éléments théoriques qui les accompagnent, l’objectif étant de parvenir à une maîtrise raisonnable de ces praxéologies mathématiques de la façon la moins dispendieuse au plan de l’économie temporelle.

110
TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES
Les solides

CÔNE DE RÉVOLUTION

EN SAVOIR PLUS

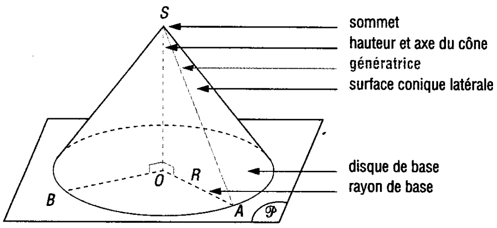
- L’**axe** d’un disque est :
  – la droite perpendiculaire à son plan en son centre ;
  – l’ensemble de tous les points de l’espace équidistants de tous les points du cercle.
  On dit aussi **axe du cercle**.



- Pour savoir si une droite et un plan sont perpendiculaires, se reporter aux rubriques « En savoir plus » :
  – Parallélépipède rectangle, cube, **107** ;
  – Prismes droits, **108** ;
  – Cylindre de révolution, **109** ;
  – Boule et sphère, **112**.

COMPRENDRE ET DÉCRIRE

4[e] 3[e] ● **Qu’est-ce qu’un cône de révolution ?**
Un cône de révolution est limité par un disque de base et une surface latérale conique.



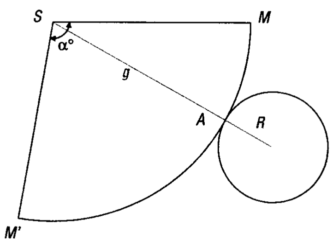
Ce cône de révolution peut être engendré par la rotation complète du triangle rectangle SOA autour de l’axe (SO).
Son sommet appartient à l’axe du disque de base, c’est-à-dire à la perpendiculaire en son centre au plan qui le contient.

4[e] 3[e] ● **Comment fabrique-t-on un cône de révolution ?**
Le **développement** (ou patron) d’un cône de révolution se compose d’un *disque* et d’un **secteur de disque**.

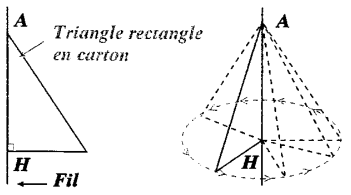
• Le disque est la base du cône ; son rayon R est connu.

• Le secteur donne la surface conique ; son rayon est la génératrice g ; la longueur de l’arc $\widehat{MM'}$ est $2\pi R$; La mesure de $\alpha°$ de son angle au centre est obtenue en écrivant

$2\pi R = 2\pi g \times \frac{\alpha}{360}$.



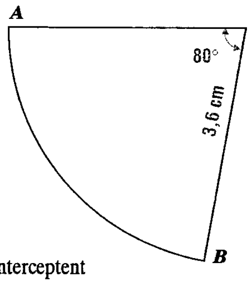
$g = 36$ mm ; $R = 10$ mm ; $\alpha° = 360° \times \frac{R}{g} = 100°$.



La révolution (tour complet) d'un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit engendre (donne naissance à) un* cône de révolution*.
L'hypoténuse génère (engendre) la surface conique, d'où le nom de génératrice.

UTILISER SES CONNAISSANCES

4e 3e ● ***La figure ci-contre représente une partie du patron d'un cône de révolution (la surface conique). Quel est le rayon du disque de base ?***



Calcul de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
Un cercle de 3,6 cm de rayon a une longueur égale à $(2\times\pi\times3{,}6)$ cm ou $7{,}2\pi$ cm.

On sait que les longueurs des arcs sont proportionnelles aux angles au centre qui les interceptent (*cf.* Tableaux de proportionnalité, **119**).

Angles au centre (en °)	360	80
Longueur des arcs (cm)	$7{,}2\,\pi$	x

$x\times360 = 80\times7{,}2\pi$; d'où $x = 1{,}6\pi$.
La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est égale au périmètre du disque de base.
Le périmètre du disque de base est $1{,}6\,\pi$ cm ; si R est son rayon, c'est aussi $2\pi R$ cm. Donc $R = 0{,}8$. Le rayon du disque de base est 0,8 cm.

4e 3e ● ***Dessiner le patron d'un cône de révolution sachant que le rayon du disque de base est* 3 cm *et que chaque génératrice à* 5 cm *de long.***
Découper ce patron et coller.

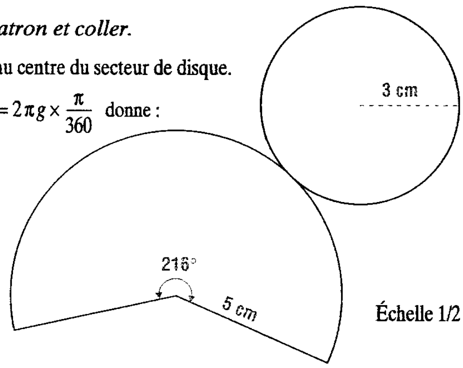
Calcul de l'angle au centre du secteur de disque.

La formule $2\pi R = 2\pi g\times\frac{\pi}{360}$ donne :

$\alpha = 360\times\frac{R}{g}$;

$\alpha = 360\times\frac{3}{5}$;

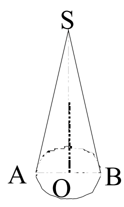
$\alpha = 216°$.



Échelle 1/2

VOIR AUSSI :
Aires et volumes, 114
Pythagore et l'espace, 115
Sections planes, 116
Proportionnalité, 119

5) Dans le cas où le sujet ou le thème étudié requiert une étude plus ample que celle permise par le dispositif évoqué ici, on pourra scinder le travail en deux " unités ", par exemple *Cône de révolution I* et *Cône de révolution II* – organisation qui permet la reprise et le travail d'après-coup, contre la fiction d'un apprentissage instantanée qui répond, en vérité, à la fiction du temps didactique irréductible. La seconde unité, programmée un peu plus tard – dans une période de temps, il est vrai, resserrée – sera constituée surtout d'un corpus d'exercices & problèmes plus étendu, résultant par exemple (en 3e) d'une compilation des épreuves du DNB, comme il en va pour l'exercice suivant – qui n'a pas été choisi pour son originalité, mais qui a été proposé dans les académies de Paris, Créteil et Versailles en juin 1997.



L'unité de longueur est le centimètre.
Une bougie a la forme d'un cône de révolution de sommet S ;
sa base est un cercle de centre O et de diamètre AB = 10 ; on donne SA = 13.

1. Montrer que la hauteur de la bougie a pour longueur 12 cm.

2. **a**. Calculer la valeur exacte du volume de la bougie en cm^3.
(On écrira cette valeur sous la forme $k \times \pi$, où k est un nombre entier.)
b. Combien peut-on fabriquer de bougies de ce type avec 4 litres de cire ?
(On rappelle : 1 litre = 1000 cm^3.)

6) Il est en revanche peu acceptable de recourir à des moyens privés – telle l'invitation à se retrouver au domicile de l'enseignant, ou même en un tiers lieu regardé comme “ public ” (cafés, etc.). Il appartient à l'établissement d'accueillir les dispositifs de travail exceptionnels que l'on mettra en œuvre au vu et au su de tous, et non en catimini : des points de rendez-vous pourront par exemple être proposés à la classe, éventuellement en dehors des horaires usuels, pour réguler l'étude d'un document (“ polycopié ” ou autre) distribué aux élèves afin qu'ils l'examinent essentiellement hors classe, en autonomie didactique. Ainsi qu'on l'a souligné déjà, le caractère exceptionnel de telles dispositions comme des dispositions éventuellement envisagées dans les circonstances présentes suppose la bonne volonté d'une multiplicité de “ partenaires ” – ce qui sera indispensable bien sûr pour obtenir, plus exceptionnellement encore, l'ouverture et le fonctionnement quasi régulier de l'établissement un mercredi après-midi, voire un samedi après-midi.

7) Le recours à des moyens électroniques en lieu et place des traditionnels “ polycopiés ” et des documents manuscrits ou imprimés de toute nature diffusés aux élèves doit respecter quelques principes que l'on rappelle succinctement. Tout d'abord, il n'est guère raisonnable de modifier fortement, alors que s'exerce la pression du temps qui manque, les usages de communication mis en place dans la classe : créer un *espar* (ou un *spip*, etc.) qui n'existerait pas déjà et – surtout – qui n'aurait pas déjà été intégré au fonctionnement de la classe paraît de nature à compliquer la situation et non à en faciliter la gestion. Dans cette ligne même, on gagnera donc, à court terme, à se contenter de mettre à la disposition des élèves, par l'emploi de TIC appropriées, ce que, dans le face-à-face de la classe, on leur eût communiqué antérieurement en main propre et sous forme imprimée. Bien entendu, on devra s'assurer que les élèves qui ne disposeraient pas personnellement des moyens électroniques indispensables pour mettre en œuvre la procédure imaginée (ou qui se refuseraient, pour de bonnes ou de moins bonnes raisons, à en user dans ce but) puissent obtenir les documents utiles au travail de la classe *sous forme manuscrite ou imprimée* – en s'adressant *par exemple*, en dehors même des heures de mathématiques, à la personne en charge de l'accueil à l'entrée de l'établissement.

8) Contrairement à ce qui a pu être avancé par certains lors de la séance 23, il est inexact d'affirmer qu'il serait illicite d'adresser les documents utiles aux élèves par le truchement de leur boîte à lettres électronique. Même s'il est recommandé de faire savoir aux parents (quand l'usage n'en est pas déjà établi) que certains documents pourront à l'avenir être adressés à leur enfant par courrier électronique, même si, bien entendu, un accord des parents ou du tuteur est indispensable si l'on doit utiliser, non le courrier électronique de l'enfant (l'expérience montre que l'adresse personnelle de l'élève est assez fréquemment peu fiable), mais celui de l'un ou l'autre des parents (ou des membres de la fratrie, etc.), il n'en reste pas moins que le fait d'adresser un courriel à un élève n'est pas plus illicite que le fait de lui adresser un courrier postal. Ce qui est illicite, en revanche, et ce à quoi faisait référence l'une des études de cas – intitulée “ Utiliser la messagerie avec les élèves ” – proposée dans le cadre de la préparation aux C2i2e (http://www.aix-mrs.iufm.fr/C2i/rubrique.php3?id_rubrique=8), c'est le fait pour l'enseignant de pénétrer dans la boîte à lettres électronique d'un élève dont, pour telle ou telle raison liée à son activité, il connaîtrait l'adresse et le mot de passe. La chose paraît évidente si on la compare à son analogue non électronique – le fait pour l'enseignant de prétendre avoir accès à l'ensemble du courrier reçu par l'élève à son domicile, au motif par exemple que, parmi ce courrier, pourraient figurer des missives dont il serait l'expéditeur.

3. Une interruption de la dynamique de l'étude demande effectivement de gérer la reprise du processus d'étude. À cet égard, pour le cas des DS prévus par exemple, on pourra donner un ou deux exercices à travailler en autonomie, puis distribuer un corrigé de ces exercices à étudier en autonomie toujours et un point de rendez-vous avant le DS pour que les élèves puissent si nécessaire poser des questions, de façon à ne pas alourdir le retard déjà pris.

4. Lorsqu'il y a trop peu de présents, plusieurs stratégies peuvent être adoptées : faire pour l'essentiel du travail des organisations mathématiques en cours d'étude ou nécessitées par l'étude de thèmes à venir ; préparer l'étude d'un thème qui demande de nombreux résultats expérimentaux en fabriquant ces résultats avec la partie de classe présente et en faisant autant que faire se peut réaliser la tâche expérimentale au moins une fois à la partie de classe absente à son retour ; en seconde, travailler un ou deux thèmes d'étude libre, etc. Dans tous les cas, il faut mettre à disposition des élèves absents le cahier de texte de la classe, dûment renseigné.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 14 : mardi 20 janvier 2009

Programme de la séance. 0. Questions de la semaine // 1. Faisons le point ! // 2. Forum des questions // 3. Recherches dans les archives

0. Questions de la semaine

Il y a quelques élèves professeurs dont le travail à propos des questions est nettement insuffisant, soit parce qu'ils ne s'attachent pas, ou pas suffisamment, à découper des questions issues de leur pratique professionnelle, soit parce que leurs questions évitent la problématicité du métier. On attire leur attention sur le fait que cela est généralement corrélé à une progression insuffisante dans le travail d'élaboration des praxéologies professorales.

On note une augmentation des questions portant sur la fabrication des organisations mathématiques, comme par exemple les questions suivantes :

En classe de 4e, le terme le mieux approprié pour désigner $\frac{5}{7}$ est-il « fraction » ou « écriture fractionnaire » ? (15, 4e)
Parfois, une technologie donne directement une technique. Par exemple, pour le type de tâches « déterminer l'inverse d'un nombre en écriture fractionnaire », la technologie « *c* et *d* désignent des nombres relatifs non nuls. L'inverse du nombre *c/d* est le nombre *d/c*. » nous donne un moyen de résoudre ce type de tâches. Doit-on malgré tout dégager, dans ce cas-là, une technique associée à ce type de tâches ? (15, 2de)
Dans le chapitre triangle et cercle en quatrième, est-ce qu'il vaut mieux commencer par le théorème de Pythagore ou par les théorèmes relatifs au cercle circonscrit et à la médiane d'un triangle rectangle ? (15, 4e)

1. Faisons le point !

1.1. Travail de l'observation (suite)

Points négatifs et voies de développement (voir le fichier des travaux déposé sur Espar)

Travail collectif dirigé

Une synthèse des points négatifs avancés :

1. Beaucoup d'élèves ne travaillent pas, sont dissipés, bavardent (4, 5, 6, 10, 12, 14, 15), qui est vu comme conséquence d'un temps de recherche trop long (10), pas assez dirigé ou structuré (14, 12,

5) ou encore des difficultés de manipulation du logiciel (4) ou de trop d'attention portée à un groupe (15).

2. P ne fait pas suffisamment de bilans d'étape, laisse trop les élèves « livrés à eux-mêmes » (1, 7). Rejoint (5, 12, 14).

3. Il n'y a pas assez d'ordinateurs (4, 13).

4. Défaut de maîtrise du tableur (8, 4).

5. Déficit de traces écrites (2).

6. Type de tâches mal identifié (9).

7. Les programmes de calcul proposés sont mal adaptés (3, 13, 16).

8. Passage par des tests de valeurs pour le premier programme.

Voies de développement proposées :

Points 1 et 2

P. aurait pu rassembler la classe plus tôt pour permettre de relancer l'étude et finir avant la sonnerie. Il aurait pu également envisager cette activité en demi groupe (ou faire des groupes moins nombreux, mais dans ce cas il faudrait plus d'ordinateurs).

P. aurait pu faire un premier bilan pour vérifier les expériences littérales correspondant à l'aire, au périmètre et au volume des différentes figures. (Expressions trouvées par les différents groupes). Un deuxième point aurait pu être fait pour présenter les différentes conjectures quant à la simplification des expressions littérales précédentes proposées par les élèves. Enfin un bilan devrait être effectué pour faire un point de la vérification des conjectures par les élèves (à l'aide du tableur). On pourrait alors faire une synthèse finale pour résumer les résultats importants obtenus.

Les solutions proposées pour améliorer ce point négatif sont :
De constater les problèmes des différents groupes et de faire un point pour la classe entière plus tôt.
De corriger plus tôt les conjectures pour que les groupes puissent passer au tableur avec des conjectures que P a approuvé.

Il aurait fallu une mise en commun plus rapide des conjectures, et laisser plus de temps à l'utilisation du tableur.

Une phase de dévolution dès la distribution de l'activité aurait permis une mise au travail des élèves plus efficace et ciblée. Une première mise en commun aurait pu apparaître plus tôt pour les conjectures, ce qui aurait permis aux élèves de faire une véritable expérimentation à l'aide du tableur après que P leur ait (ré)expliqué comment fonctionne le tableur.

Séance guidée de manipulation des tableurs

Il faudrait plus d'explications sur l'utilisation du tableur pour que les élèves avancent plus vite, ce qui donnera plus de dynamique à la classe.

Pour motiver les élèves ou plutôt pour les mettre « tous » au travail, c'est comme souvent un problème de matériel. En effet, il n'y a pas assez d'ordinateurs (il faut sanctionner les oublis de matériel) et un problème de motivation. On peut proposer aux élèves de récupérer leurs tableaux star office et les noter au même titre qu'une petite interrogation.

Une possibilité pour rendre cette partie « plus productive » serait par exemple d'être un peu plus directif dans la recherche, par exemple fournir les valeurs de x avec lesquelles il faut exécuter le programme de départ ce qui

permettrait de mieux amener la conjecture du programme simplifié. Par exemple, pour le programme n°1, fournir les valeurs de x $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ce qui, une fois le programme de calcul exécuté donnerait le début de la table de multiplication par 6, d'où $3\times 2x = 6x$.
De même, pour le programme n°2, fournir les valeurs de x $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. La conjecture serait alors que l'on rajoute 5 chaque fois que l'on incrémente x d'où $2x + 3x + 7 = 5x$.
Ces améliorations pouvant se faire sous forme de questions cruciales ou en modifiant légèrement l'énoncé.

Point 4

Le problème se situe sûrement dans la séance du matin à 8h. Ou encore le retour sur cette séance au début de cours n'est pas assez conséquent.

Point 7

Il aurait été souhaitable de faire cette séance en salle info (voire utiliser un chariot mobile).
Il faudrait utiliser des programmes de calculs semblables pour chaque groupe et faire évoluer la difficulté au fur et à mesure.

Une alternative au point négatif soulevé précédemment pourrait être qu'après quelques exemples effectivement basés sur le « bon sens », on pourrait repartir d'un programme de calcul plus « compliqué » (autrement dit moins intuitif) qui justifierait de faire appel à la démonstration rigoureuse, reposant par exemple sur la factorisation : Pour tous a et b deux nombres relatifs, on a $ax+bx=(a+b)x$ et $(ax)\times b=a\times x\times b= a\times b\times x=(a\times b)x$.
Programme de calcul proposé :
On choisit un nombre. On le multiplie par 5 puis on retranche 9. On multiplie ce résultat par 7. On soustrait ensuite 9 fois la somme du quadruple du nombre choisi au départ et de 2. On ajoute finalement 81 au résultat. Quel nombre obtient-on au final ?

Une possibilité pour rendre cette partie « plus productive » serait par exemple d'être un peu plus directif dans la recherche, par exemple fournir les valeurs de x avec lesquelles il faut exécuter le programme de départ ce qui permettrait de mieux amener la conjecture du programme simplifié. Par exemple, pour le programme n°1, fournir les valeurs de x $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ce qui, une fois le programme de calcul exécuté donnerait le début de la table de multiplication par 6, d'où $3\times 2x = 6x$.
De même, pour le programme n°2, fournir les valeurs de x $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. La conjecture serait alors que l'on rajoute 5 chaque fois que l'on incrémente x d'où $2x + 3x + 7 = 5x$.
Ces améliorations pouvant se faire sous forme de questions cruciales ou en modifiant légèrement l'énoncé.

Point 5

P. doit noter au tableau les points importants de ces démarches.
Les élèves devraient avoir une feuille de route pour pouvoir y noter les résultats trouvés et où figure le travail effectué.

Principaux éléments développés oralement

1. Le travail en demi-groupes est vu par certains comme permettant au professeur de mieux gérer la séance, notamment parce qu'il limitera les bavardages en raison d'une présence plus grande de P dans la classe. Cet aspect des choses est cependant assez structurel : ça ne garantit pas une amélioration du travail des élèves, notamment parce que celui-ci est limité par bien d'autres choses (voir *infra*). En outre, dans la séance observée, la classe n'a pas véritablement de problème de comportement ; l'agitation est d'abord suscitée par une préparation inadéquate de certains aspects de la séance, qui conduit par exemple le professeur à s'attarder auprès de certains groupes. Si l'organisation de l'étude avait été mieux fabriquée, P aurait pu circuler plus rapidement pour prendre de l'information, lever une incertitude ou apporter une précision, sans avoir besoin de s'attarder auprès des groupes. À cet égard, on notera que le travail en demi-groupe enlève quelquefois de la richesse expérimentale et que le travail exploratoire s'en trouve alors plus difficile à diriger. On peut également noter que P aurait pu structurer le travail des groupes en chargeant un

élève d'être le rapporteur du travail du groupe, un élève de prendre des notes, un autre d'expérimenter avec le tableur, etc.

2. Si l'on ne peut qu'être d'accord avec le fait qu'une plus grande structuration du temps de travail ou encore qu'une meilleure prise en charge du travail avec le tableur permettrait d'accélérer l'avancée du temps de l'étude et d'améliorer le topos des élèves, les voies proposées pour y arriver sont moins convaincantes. Par exemple, le fait d'améliorer la prise en charge du tableur sous la forme de guidage conduirait à réduire, et même considérablement suivant la forme du guidage, le *topos* des élèves ; c'est plutôt le bilan qui est fait en début de séance qu'il s'agit d'améliorer en le faisant avec un ordinateur relié au vidéoprojecteur et en laissant des traces écrites de la technique auxquelles les élèves pourront se référer ultérieurement. De la même manière, ce n'est pas au professeur de valider les conjectures (voir *infra*).

3. Du point de vue de la structuration du temps de travail, on peut effectivement développer la phase de dévolution de la tâche à effectuer (obtenir un programme de calcul plus simple que celui qui est donné par la modélisation du calcul de grandeur), ce qui nécessiterait notamment une amélioration de la première partie de la séance et l'absence d'un « texte à trous » (il est nettement préférable de constituer les étapes avec les élèves) ; une mise en commun des conjectures ainsi que de la technique qui a permis d'y arriver ; l'examen des vérifications avec le tableur.
Ce sur quoi doit porter le bilan d'étape à la fin de la séance, c'est d'abord la *technique expérimentale* qui permet de trouver le programme de calcul « simplifié », c'est-à-dire : remplacer x par des nombres dans le programme initial ; conjecturer à partir des résultats obtenus le programme simplifié et vérifier à l'aide d'un tableur, et les résultats expérimentaux qu'elle a permis de produire.

4. Le fait que les élèves ne travaillent pas tous sur le même programme de calcul n'empêche pas le débat, c'est la manière dont P le pilote (ou plutôt ne pilote pas) qui rend la chose difficile. En effet, elle ne renvoie pas systématiquement à la classe la question de la validité des conjectures émises par les groupes, mais elle travaille avec le groupe qui émet la conjecture.

5. La temporalité adoptée par P dans la séance du point de vue de l'expérimentation est une bonne chose : mettre en place dans le cours de la séance la déductibilité nuirait à la construction du sens du type de tâches « simplifier un programme de calcul ». Il n'est pas question de se passer d'expérimentation. Dans cette perspective, on notera que le travail algébrique fait par P en interaction avec un groupe à la fin de la séance à propos du 3^e^ programme de calcul, sans doute sous la pression du temps, nuit au *topos* des élèves. Il aurait été plus efficace de faire faire la mise en commun du travail demandé – valeurs calculées par les élèves puis conjecture à partir de ces valeurs. À cet égard, même si on le voit pas dans la séance, la feuille d'activité indique que P établit sans doute trop tôt les résultats théoriques et que, compte tenu des traces écrites, la technique qui émergera ne comprendra pas véritablement une étape de vérification par l'exécution des deux programmes de calculs sur un certain nombre de valeurs.

6. Homogénéiser le travail donné à chaque groupe du point de vue de la difficulté peut contribuer à améliorer le *topos* des élèves, à condition de ne pas perdre la variété de la nature des programmes de calcul ; on pourrait par exemple donner à tous les élèves un programme du type $a \times bx$ (en faisant varier les coefficients a et b) et un programme plus complexe. On notera ici que ça permettrait de réduire la différence d'avancée entre les groupes, avancée qui dépend davantage de la nature du travail que l'on donne à faire que de la constitution des groupes.

7. Il faut garder en mémoire que ce n'est pas chaque élève qui doit produire le travail demandé mais la classe.

8. Ce qui permet d'évaluer, c'est l'examen de ce que ce qui a été réalisé permet, favorise et/ou interdit, gêne ; c'est la même chose qui guide le développement : en quoi la voie de développement choisie permet ou favorise telle chose qui était gênée ou interdite dans la réalisation de la séance ?

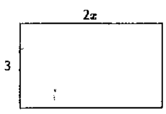
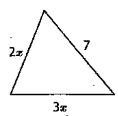
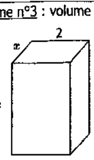
9. On ajoutera à propos des traces écrites un extrait du corpus B du professeur observé. On remarquera que la feuille proposée ne permet pas une gestion des traces écrites convenables, en particulier, ils n'ont pas la place de mettre l'exécution du programme pour plusieurs valeurs de x, ce qui a sans doute gêné les conjectures pour le 3[e] programme. Il est préférable de structurer les choses au fur et à mesure en collaboration avec les élèves. À cet égard, on notera que la mise en forme de la feuille ne comprenait pas la possibilité d'avoir des traces écrites à propos de l'utilisation du tableur : il n'y en a donc pas, ce qui ne permettra pas aux élèves d'améliorer leurs praxéologies relatives aux tableurs.

Activité 2 : réduire des programmes de calcul sans parenthèses

1) Expérimentation

Voici trois figures ; x désigne un nombre ~~2,75~~ inconnu

Complète en donnant le programme de calcul correspondant à chaque cas :

Programme n°1 : aire du rectangle	Programme n°2 : périmètre du triangle	Programme n°3 : volume du prisme
		
Aire = $3 \times 2x$	Périmètre = $2 + 2x + 3x$	Volume = $5x \times x \times 2$

a) Exécute ces programmes avec quelques valeurs de x.

Programme n°1	Programme n°2	Programme n°3
	$x = 0$ $2 \times 0 + 7 + 3 \times 0 = 7$ $5x^0 + 7 = 7$	

b) Que conjectures-tu ?

Programme n°1	Programme n°2	Programme n°3
	$2x + 3x = 5x$	$x \times x \times 10$

c) Utilise le tableur StarOffice pour valider ou non les conjectures que tu proposes.

d) Conclus

2) Démonstration

Programme n°1 : $(3 \times 2) \times x = 6 \times x = 6x$

Programme n°2 : $2x + 7 + 3x = 2x + 3x + 7 = x \times (2 + 3) + 7 = x \times 5 + 7 = 5x + 7$

Programme n°3 : $5x \times 2 \times x = 5 \times 2 \times x \times x = 10 \times x^2 = 10x^2$

3) Application

Réduire les expressions suivantes :

$A = 5x + 2x = 7x^1$

$B = 7 + 3a + 3 - 4a = 3a + 4a + 7 + 3 = 1a + 10 = 10a(a)$

$C = -2 \times 5x + 10 = -10x + 10 = 10(-x + 1)$

$D = 4t \times 3t + t^2 = 4 \times 3 \times t \times t + t^2 = 12t^2 + t^2 = 13t^2$

$E = 3y^2 - 2y^2 - 24 + y = y^2(3 - 2) - 24 + y = 1y^2 - 24 + y = y^2 - 24 + y$

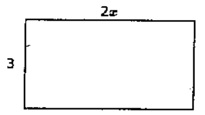
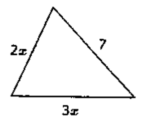
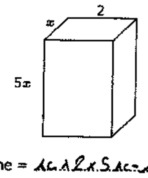
Bilan :

Activité 2 : réduire des programmes de calcul sans parenthèses

1) **Expérimentation**

Voici trois figures ; x désigne un nombre ....

Complète en donnant le programme de calcul correspondant à chaque cas :

Programme n°1 : aire du rectangle	Programme n°2 : périmètre du triangle	Programme n°3 : volume du prisme
		
Aire = $3 \times 2x = 6x$	Périmètre = $2x+7+3x = 5x+7$	Volume = $x \times 2 \times 5x = 10x^2$

a) Exécute ces programmes avec quelques valeurs de x.

Programme n°1	Programme n°2	Programme n°3
$3\times(2\times1) = 3\times2=6$ $3\times(2\times2)=3\times4=12$ $3\times(2\times3)=3\times6=18$	$x = 12$ $2\times12+7+3\times12 = 67$ $5\times12+7=67$ $x = 24$ $2\times24+7+3\times24=122$ $5\times24+7=122$	$x = 8$ $8\times2\times5\times8 = 490$ $10\times8^2 = 160$

b) Que conjectures-tu ?

Programme n°1	Programme n°2	Programme n°3
$3\times2x = 6x$	$2x+7+3x = 5x+7$	$x \times 2 \times 5x \neq 10x^2$

c) Utilise le tableur StarOffice pour valider ou non les conjectures que tu proposes.

d) Conclus ~~Je conjectures pour le 1 et le 2 mais pas le 3~~.

~~Je conclus le programme n°1 et 2 mais le 3 est faux~~

Le programme de calcul n°1 $3\times2x$ est le même que $6x$

2) **Démonstration**

Programme n°1 : $3 \times 2 \times x = (3\times2)\times x = 6\times x = 6x$

Programme n°2 : $2x + 7 + 3x = 2x+3x+7 = x\times(2+3)+7 = x\times5+7 = 5x+7$

Programme n°3 : $5x \times 2 \times x = 5\times2\times x\times x = 10\times x^2 = 10x^2$

3) **Application**

Réduire les expressions suivantes :

A = $5x + 2x = 7x$

B = $7 + 3a + 3 - 4a$ [redacted] $(7+3)+(3a-4a) = 10+(-a) = 10-a$

C = $-2 \times 5x + 10 =$ [redacted] $-10x+10 = 10(-x+1)$

D = $4t \times 3t + t^2 =$ [redacted] $= 4\times3\times t\times t+t^2 = 12t^2+1t^2 = 13t^2$

E = $3y^2 - 2y^2 - 24 + y =$ [redacted] $y^2(3-2)-24+y = 1y^2-24+y = y^2-24+y$.

Bilan : Il est possible d'ajouter les termes en x ensembles

1.2. Les praxéologies et leur évaluation

> Pour notre mémoire, doit-on utiliser le vocabulaire utilisé par nos prédécesseurs (cf. mémoires à la bibliothèque) du type : topogénèse, anamnèse, mésogénèse, dialectique professeur-élèves ? Car bien que comprenant à peu près le sens de ces termes, nous n'avons pas vraiment abordé le sujet, que ce soit en GFP ou en séminaire. (14, 5e)

1. On signalera d'abord que les quatre axes mentionnés plus haut sont en réalité : chronogénèse, mésogenèse, topogenèse et dialectique du groupe et de l'individu. L'anamnèse est « le récit des antécédents », ou encore le « rappel du souvenir » (du grès mnémè, souvenir et ána, remontée) : en médecine, cela désigne « cette partie de l'enquête diagnostique qui reconstitue le passé de la maladie en ayant recours à la mémoire du malade et, par extension, à sa documentation et aux indications données par l'entourage » [Encyclopaedia Universalis, article *Anamnèse*].

2. Ces quatre axes permettent de donner des repères pour l'analyse et l'évaluation d'une séquence d'enseignement sur un thème donné. Voici ce qu'on peut lire à leur propos dans les notes du Séminaire 2006-2007.

① Un premier critère de qualité de l'OD mise en place est celui de la ***chronogenèse***, c'est-à-dire de sa capacité à produire du ***temps didactique***, soit encore à créer, selon la programmation arrêtée, les OM dont la mise en place est prévue par le programme d'études en vigueur.

❶ À cet égard, on se demandera si la création d'OM est appuyée sur un système ***de PER et d'AER*** ayant une bonne ***générativité***, ou si, au contraire, chaque nouvelle avancée dans le temps de l'étude revêt un coût propre élevé, voire prohibitif.

❷ Au-delà de la « productivité » de l'OD, on jugera de sa valeur à la qualité des OM qu'elle permet de créer, et, en conséquence, à la façon dont elle permet d'assumer les différents ***moments de l'étude*** que suppose cette création. Est-elle par exemple de nature à engendrer des technologies bien adaptées, ouvertes sur l'avenir, etc. ? Assure-t-elle des synthèses efficaces, appuyées sur des bilans précis, etc. ?

② Un deuxième critère de qualité a trait au processus dit de ***mésogenèse***. Le grec *mesos* signifie « milieu » (il correspond au latin *medius*) : le terme « mésogenèse » désigne donc la fabrication du ***milieu***, soit, ici, de l'ensemble des ***ressources didactiques***, théoriques, expérimentales et humaines, qui sont nécessaires ou utiles à la création en classe des OM prévues par le programme d'études.

❶ Une mésogenèse insuffisante conduit soit à l'arrêt du temps didactique, soit, plus sûrement, à l'importation, en général par le truchement du professeur, d'OM toutes faites (« allogènes »), en lieu et place du processus de leur création « indigène » – par la classe – comme réponses $R^{\heartsuit}$ à des questions Q, et de leur confrontation aux productions allogènes $R^{\Diamond}$.

❷ Devant toute question Q à étudier, on se demandera donc si l'on dispose ou non, ou si l'on peut se rendre aisément disponible, les ressources idoines pour l'étude ***effective*** de la question Q, et en particulier la suite de ***questions cruciales*** par lesquelles passent l'étude de Q, ou si au contraire on est condamné à ***recopier*** telle ou telle réponse $R^{\Diamond}$…

③ Le troisième grand critère est celui de la ***topogenèse***. Quel est le *topos* offert à l'élève dans l'étude d'une question Q génératrice d'une certaine OM ? Solidairement, bien sûr, quel est le *topos* alloué au professeur ?

❶ L'examen du *topos* de l'élève (et de celui du professeur) suppose l'investigation de l'ensemble des gestes didactiques que la création d'une OM peut supposer, à propos de chacun des moments de l'étude. Quelle est, ainsi, la place de l'élève dans l'élaboration de la technique et de sa technologie relative à un certain type de tâches, dans la mise en forme d'une synthèse, etc. ?

❷ L'examen à mener concerne également la place de l'élève dans la production du ***questionnement générateur*** de l'OM considéré : l'élève est-il par exemple réduit à suivre le déroulement d'un énoncé fixé à l'avance ou la classe participe-t-elle à la production de l'étude de Q par la production et l'étude de ***questions cruciales*** successives ?

❸ Enfin, il convient également de s'interroger sur le rôle de l'élève dans ***la production des ressources didactiques***. Celles-ci sont-elles apportées toutes faites par le professeur ou bien les problèmes de la mésogenèse sont-ils plutôt dévolués à la classe et résolus par elle sous l'impulsion et la direction du professeur ?

• La question de l'évaluation de la ***gestion de la séance*** fera l'objet de remarques plus brèves encore. Lorsque le professeur entre dans la classe, ce qui va advenir au plan didactique et mathématique est en grande partie fixé : les dés sont jetés – plus ou moins. Si, par exemple, l'activité que le professeur a prévu de proposer aux élèves est grossièrement sur-calibrée ou sous-calibrée, il est vraisemblable que le niveau sonore va monter, les élèves vont désinvestir rapidement le *topos* prévu pour eux, etc. : aucune « gestion de classe » ne peut compenser entièrement un choix de contenus d'activité inadéquat.

① En revanche, il est vrai qu'une gestion inadéquate des processus de ***chronogenèse*** (on perd du temps sans avancer, ou au contraire on fait une économie de temps qui se révèlera dommageable), de ***mésogenèse*** (on ne construit pas les outils du travail expérimental utile, ou au contraire on met en place des ressources sans grande utilité, qui diminuent la lisibilité du système de travail de la classe), de ***topogenèse*** (on réduit à l'extrême le *topos* de l'élève, ou au contraire on abandonne l'élève en un *topos* trop vaste, non structuré et en quelque sorte non « viabilisé ») conduit aisément à ne pas réaliser en classe les promesses du travail réalisé par le professeur en amont de la classe : on sera donc attentif à la qualité de la prise en charge des trois volets ci-dessus.

② À cela s'ajoute, de façon essentielle, le traitement de la ***dialectique du groupe et de l'individu*** (qui doit être gérée déjà au niveau de l'OD, même si cette question n'a guère été abordée encore). C'est en effet non seulement le *topos* de l'élève « générique » qui devra être évalué, mais aussi le *topos* particulier à tel ou tel élève de la classe ou à telle ou telle « catégorie » d'élèves (filles et garçons, « forts » et « faibles », etc.). La gestion du groupe est-elle attentive à chacun ? Ou bien laisse-t-elle se créer et perdurer une géographie didactique visible et invisible de la classe avec des lieux d'activité et des foyers d'inactivité ?

3. Nous travaillons depuis longtemps maintenant sur la question de la topogénèse, de la mésogénèse et de la chronogénèse, même si nous n'avons pas cité ces termes dans le séminaire parce que nous n'avions pas encore mis en forme l'organisation de savoir relative à ces notions.
3.1. Ainsi, par exemple, à propos de la mésogénèse, dès la sixième séance, nous énoncions lors d'une mise au point que « Examiner la validité des propositions suppose que l'on se soit rendu disponible un milieu. » Dans la séance 8, un travail d'analyse des OM nous avaient conduit à préciser :

> Un autre aspect important de l'analyse des techniques consiste en l'examen de leur possibilité dans la classe considérée de deux points de vue : d'un côté, il s'agit de ***s'assurer que les types de tâches considérés comme routiniers***, bien connus, le sont effectivement (on dira alors qu'ils ***font partie du milieu***) ; d'un autre côté, on vérifiera que les ***éléments technologiques*** qui permettent de justifier et/ou de produire la technique sont ***effectivement au programme de la class***e, ou peuvent être rendus disponibles dans ce cadre.

Et encore plus récemment à propos de l'observation en cours d'analyse et d'évaluation, « cela est confirmé par le rappel du travail réalisé lors de la séance précédente, effectué au début de la séance, qui permet de constituer une partie du milieu nécessaire à la réalisation de l'émergence de l'OMP relative à T. »
3.2. La mésogenèse est encore au cœur du travail effectué dans le cadre de l'intégration des TICE : c'est en effet la volonté de *créer suffisamment de milieu* et *de topos* pour l'élève qui pousse en avant des techniques « à deux étages », l'un expérimental et l'autre déductif, la partie expérimentale créant autant que possible du milieu pour la réalisation de la partie déductive.

Ce sont donc ces axes qui ont guidé le travail d'analyse et, par suite, d'évaluation, que nous menons, aussi bien que le travail d'élaboration des organisations mathématiques et didactiques.

4. Ces quatre axes doivent évidemment être présents dans le mémoire, mais ***en fonction***. Il ne s'agit pas, comme dans beaucoup de mémoires des années précédentes, de sortir structurellement ces axes (ce qui est la trace d'une analyse encore trop peu travaillée et peu aboutie) mais de les intégrer à l'analyse et l'évaluation de l'organisation de l'étude notamment, comme nous l'avons fait dans les séances précédentes : on peut naturellement employer les mots adéquats pour désigner les notions utilisées.

Nous poursuivrons le travail de mise au point lors de la prochaine séance.

2. Forum des questions

Les questions sur la gestion du temps de l'étude et les matériaux pour une réponse à ces questions sont à étudier dans les notes de la séance précédente. Nous les reprendrons rapidement la semaine prochaine pour développer les aspects qui sembleront problématiques.

On ajoutera en complément des questions sur le même thème posées la semaine dernière.

Certains élèves ont perdu le rythme de travail et la motivation à cause de cette longue période où nous n'avons pas travaillé. Comment remotiver ces élèves ? (RC, 15, 2^{de})
Ces derniers temps, mes élèves semblent très peu motivés. Que faire pour les remettre au travail ? (MB, 15, 2^{de})
Mes élèves ont espagnol une semaine sur deux, ce qui libère une demie heure de cours par semaine. Vu que j'ai perdu trois semaines de cours avec les grèves/intempéries, je souhaite utiliser ces créneaux pour faire des maths. L'administration est d'accord (ces heures seront bénévoles...) Est-ce une bonne idée ? (NC, 15, 2^{de})
Faut-il absolument rattraper des cours annulés pour cause d'intempéries, de maladie, ... ? (AC, 15, 2^{de})
Comment faire face au retard pris à cause du mouvement lycéen et de la neige ? Peut-on éventuellement rajouter des heures de cours aux élèves ? (Problème d'emploi du temps, pas forcément possible.) (FD, 15, 2^{de})

Variations des fonctions

Concernant le thème des fonctions en classe de seconde, est-il exigible que les élèves sachent étudier le sens de variation d'une fonction (avec $u < v$, comparer $f(u)$ et $f(v)$) ? (15, 2^{de})
En classe de seconde, lors de l'étude qualitative de fonctions, une des capacités attendues des élèves est de savoir « décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe ». La méthode consistant à étudier le sens de variation d'une fonction de manière algébrique (par détermination du signe de $f(a) - f(b)$ lorsque a et b sont des réels tels que $a < b$; f étant définie par une formule) doit-elle être aussi parfaitement maîtrisée par les élèves ? Faut-il autant insister sur la méthode algébrique que sur la méthode graphique ? (11, 2^{de})

1. L'observation du programme montre que la colonne de commentaires comporte la notation suivante : « On soulignera le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante renverse l'ordre ; ***une définition formelle est ici attendue*** ». Une définition formelle de la croissance et de la décroissance d'une fonction doit faire partie de l'environnement technologico-théorique ; elle doit donc produire, justifier une ou des techniques, dont par exemple la technique algébrique de détermination du sens de variations d'une fonction, qui a en outre l'avantage de fonctionnaliser du calcul algébrique comme nous l'avons vu lors de séances précédentes. Il n'y a donc pas de raison de privilégier la technique graphique.

2. Il faut prendre garde de ne pas diffracter artificiellement un type de tâches selon les techniques qui permettent de l'accomplir ou encore la nature de ses paramètres, *même si cette diffraction pourra s'avérer utile dans le cours de l'étude.*
Par exemple ici, dans l'organisation mathématique, on fera figurer le type de tâches « étudier les variations d'une fonction *f* », dont la technique pourra être structurée de la façon suivante :

Si la fonction est définie graphiquement, (….)
Si la fonction est définie algébriquement :

si c'est une fonction de référence ou une fonction que l'on peut obtenir par un enchaînement simple de fonctions de référence, (…)

sinon, la représenter graphiquement à la calculatrice ; déterminer les intervalles sur lesquels elle garde un sens de variation constant et sur chaque intervalle étudier le signe de $f(a) - f(b)$ pour $a > b$; si $f(a) - f(b) \geq 0$, en conclure que *f* est croissante sur l'intervalle ; sinon, en conclure qu'elle est décroissante.

Expression analytique

Comment expliquer aux élèves le fait que l'expression analytique d'une droite s'appelle équation de droite ? (Éviter les confusions...) (14, 2^de^)

1. Une recherche sommaire sur Internet de « expression analytique droite » fait apparaître clairement que « expression analytique d'une droite » ne fait pas partie des expressions usitées en mathématiques. Elle permet de mettre en évidence que l'on parle de l'***expression analytique d'une transformation***, ou plus généralement d'une application, du plan ou de l'espace dans le plan ou l'espace. De même, le dictionnaire de mathématiques de Bouvier, George et Le Lionnais (PUF, Quadrige, 2001) ne comporte pas d'entrée « expression » mais une entrée « analytique » qui comprend la sous-entrée « Géométrie analytique » où l'on peut lire notamment :
« Ses principes regroupent l'***association de fonctions numériques à des notions géométriques***, l'usage des systèmes de coordonnées et de représentations graphiques. »

2. Une équation de droite de la forme $y = ax + b$ doit donc être associée à une fonction affine, la fonction *f* qui à x associe $ax + b$, dont elle constitue l'équation de la courbe représentative, la dite courbe représentative étant la droite d'équation $y = ax + b$. C'est cela qu'il faut faire vivre pour les élèves. Il ne s'agit pas de leur expliquer ces relations mais de les leur faire rencontrer au travers de situations qui leur donnent sens : bien entendu, un préalable est que le professeur soit au clair avec ces questions...

3. On notera, à ce propos, que les élèves ont déjà travaillé ces questions en classe de 3^e^ et qu'il s'agit en seconde d'une reprise de l'étude qu'il est nécessaire de gérer comme telle : test d'entrée, etc.

3. Recherches dans les archives

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à l'***enseignement des nombres négatifs*** au collège ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Comment introduire les nombres relatifs en classe de cinquième ?(12, 5^{e})

2. J'ai du mal à expliquer à mes élèves que « soustraire un nombre relatif, c'est ajouter son opposé ». Comment rapprocher cela de la vie courante ? (11, 5^{e})

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Souaad Benhadi, Sihame El Khaine, David Félix.

b) La deuxième recherche dans les *Archives* aura trait à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'effet des attentes formulées à l'endroit des élèves sur leurs performances scolaires ? (effet Pygmalion)*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Dans ma classe un élève me rend depuis peu des copies quasi blanches, sous prétexte de ne pas être certain de la réponse. Que faire pour lui faire prendre confiance en lui pour qu'il réponde aux questions ? (à noter que cet élève a de lourds problèmes dus à son vécu : enfant quasi aveugle de naissance, greffe de la cornée, timidité maladive...) (11, 2^{de})

2. Trois de mes élèves ont un niveau de quatrième en math et justifient leur manque de travail / résultats par leurs difficultés. Y a-t-il des pistes pour les remotiver ? (Je les ai déjà pris à part, convoqués en AI... sans grands résultats) (9, 2^{de})

3. Sur quels critères doit-on se baser pour émettre un avis favorable ou défavorable pour un passage en première S ? Un élève peut-il aller contre l'avis du conseil de classe et « forcer » le passage en S malgré un avis défavorable ? (12, 2^{de})

4. Que faire avec un élève de 3^{e} qui n'a pas un niveau collège ? Aucune base, de ce fait aucune motivation... Il s'agit d'un élève passif ; si je suis à ses côtés, il tente de travailler ; dès qu'il est seul, il ne fait plus rien. Chez lui, aucun travail. (Par exemple : il ne sait pas faire des soustractions...) (12, 5^{e}, 4^{e} & 3^{e})

5. Un élève a abandonné. Il vient en aide individualisée, fait les exercices demandés avec difficulté. Mais il ne fait rien lors des DS. Que faire ? (12, 2^{de})

6. Suite au conseil de classe, le bilan du premier trimestre s'avère un peu inquiétant. En effet, seul 10 élèves peuvent prétendre passer en 1^{re} (et plus précisément en 1^{re} STG...). Comment faire réagir les élèves ? (12, 2^{de})

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Daniela Carafa-Bernard, Nicolas Laurent et Julien Fontana.

À cet égard, nous rappelons la problématique du travail à effectuer. Il s'agit de ***réunir des*** $\mathcal{R}^{\Diamond}$ issus des archives du séminaire jugés pertinents comme éléments de réponse aux questions soumises, de manière à ce que le collectif puisse se forger une réponse $\mathcal{R}^{\heartsuit}$. Dans cette perspective, il est essentiel que ***l'exposé présente effectivement les réponses*** $\mathcal{R}^{\Diamond}$, et pas seulement la réponse $\mathcal{R}^{\heartsuit}$ que le trinôme croit pouvoir en tirer. C'est en effet à ce prix que la technique de fabrication des réponses peut être collectivement gérée et travaillée. (On aura reconnu un problème de milieu et de *topos*...)

Les deux trinômes qui ont exposé lors de la séance du 2 décembre ont à expliciter en quoi la séance précédente leur a permis de modifier leurs praxéologies ou d'en créer de nouvelles.

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant au dispositif des ***modules*** en classe de Seconde ?
CélineGoujon, Vincent Dambreville et Nicolas Chekroun

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'axiome de Wallis*** ?
En quoi l'axiome de Wallis est-il pertinent pour l'étude de la géométrie ?
Vincent Boilard, Hamdoune Lazrek et Fanny Devaux.

Cette séance de Séminaire est suivie d'une séance de travaux dirigés sur l'utilisation des TICE qui concerne les élèves professeurs dont les noms suivent :

Sylvain Astier ; Daniela Caraffa-Bernard ; Alain Gleyze ; Marianne Kiledjian ; Nicolas Laurent ; Anne Martinet ; Élodie Vadé ; Julien Fontana ; Rodolphe;Arnaud ;Mounir El Farri ; Nelly Bofelli ; Vincent Dambreville ; Céline Goujon ; Nicolas Mizoule ; Antoine Noël ; Sihame El Khaine ; Francine Bert ; Benjamin Faure ; Vincent Boilard ; Sylvain Samat ; Christophe Dobrovolny ; David Felix.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Travaux dirigés de didactique des mathématiques

➔ Séance 3 : mardi 20 janvier 2009

Programme de la séance. 1. Questions de statistique et étude statistique // 2. Une AER de statistique : le démarrage

1. Questions de statistique et étude statistique

1.1. Questions de statistique

En statistique, on s'efforce de répondre à des questions comme celles-ci :

- Un bébé qui pèse 3,4 kg à la naissance, c'est un gros bébé ?
- Un éléphant de deux tonnes, c'est un gros éléphant ou c'est un petit éléphant, ou c'est ni l'un ni l'autre ?
- Quand on dit qu'un joueur de foot a marqué beaucoup de buts dans une saison, ça veut dire qu'il en a marqué au moins combien ?
- Est-il exact que les trois derniers jours ont été exceptionnellement froids ?
- Cet article est-il cher pour ce que c'est ?
- Ça a combien d'habitants, une grande ville ?

Les exemples de questions proposées se réfèrent ***de façon floue*** à plusieurs des entités cardinales de la problématique statistique : on y évoque d'abord une ***population*** (celle des bébés, celle des éléphants, celles des footballeurs, etc.), un ***caractère*** ou ***variable*** plus ou moins clairement défini sur cette population (le poids d'un bébé, celui d'un éléphant, le nombre de buts marqués dans une saison par un footballeur, etc.) ; on s'y demande alors si telle valeur du caractère est « grande », ou à partir de quelle valeur on peut dire qu'une valeur du caractère est une grande valeur…

1.2. Études statistiques

Pour répondre aux questions précédentes, on doit mener à bien, chaque fois, une *étude statistique* comportant plusieurs étapes.

L'objectif est toujours le même. Considérons la première question ci-dessus : « Un bébé qui pèse 3,4 kg à la naissance, c'est un gros bébé ? » Supposons qu'on ait relevé le poids à la naissance de tous les bébés nés en 2005 dans le département des Bouches-du-Rhône :

– si l'on trouvait que, par exemple, 47 % de ces bébés ont un poids inférieur ou égal à 3,4 kg, c'est-à-dire que 100 % – 47 % = 53 % ont un poids strictement supérieur à 3,4 kg, on pourra conclure que, par rapport à l'ensemble des naissances considérées, 3,4 kg *n'est pas* un poids très élevé ;

– si, au contraire, on trouvait que, par exemple, 78 % des bébés ont un poids inférieur ou égal à 3,4 kg, et donc que seulement 100 % – 78 % = 22 % des bébés ont un poids à la naissance strictement supérieur à 3,4 kg, on pourra conclure que 3,4 kg est un poids *assez élevé*.

Question 1. Précisez comment il faudrait faire pour savoir si une ville de 7000 habitants, c'est une ville qui a beaucoup d'habitants ou une ville qui n'a pas beaucoup d'habitants.

2. Une AER de statistique : le démarrage

On considère le fichier Excel disponible dans le dossier PCL2/2008-2009 d'Espar : il contient des données sur la population des communes françaises issues d'un fichier disponible sur le site de l'INSEE http://www.insee.fr/fr/ffc/docs_ffc/psdc.htm.

Question 2 : Élaborer, à partir de ces données, une étude statistique de la question : quand on dit qu'une commune française n'a pas beaucoup d'habitants, ça veut dire qu'elle en a combien ? On utilisera les connaissances statistiques au programme du collège.

La classe sera répartie en équipes de 4. On notera soigneusement les étapes de l'étude menée, mêmes celles qui n'ont pas abouti. Chaque équipe rendra à la fin de la séance un fichier texte relatant l'étude menée ainsi qu'un fichier « tableur » contenant le travail numérique.

Le temps a manqué pour aborder la question suivante :

Question 3 : Élaborer, à partir de cette étude, le guide d'une AER pour une classe de collège dont on choisira le niveau.

Elle sera reprise en séminaire.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

La semaine prochaine : il n'y aura pas séminaire et pas GFP **sauf.**..

Pour les élèves professeurs qui ont un retard de mise à niveau TICE (les CAFEP, PSSIT, et les absents aux séances antérieures), Joël Denisot fera la séance qui manque mardi 3 février ; horaires 10 h à 12 h.

➔ Séance 15 : mardi 27 janvier 2009

Programme de la séance. 1. Faisons le point ! // 2. Forum des questions // 3. Concevoir une AER de statistique

1. Faisons le point !

Les praxéologies et leur évaluation (suite)

Nous terminerons provisoirement les mises au point sur les éléments théoriques en examinant certaines des questions posées ces dernières semaines.

En quoi consiste exactement la partie « évaluation » du mémoire ? (MR, 15, 4^{e})
Dans le mémoire du TER, l'évaluation de la séance observée se limite-t-elle à une étude des points positifs et des points négatifs ? (AG, 15, 2de & 1re STT)

La partie évaluation est bien une étude des points positifs et négatifs de la séance observée. Plus précisément, il s'agit donner les éléments positifs et négatifs de l'observation de l'OM, de l'OD et de la gestion de la séance qui ont été préalablement analysés tout en justifiant en quoi ils sont positifs ou négatifs. Comme nous l'avons vu la semaine dernière, ces justifications s'appuient sur ce que permet, ou ce que favorise tel ingrédient, ou encore sur ce qu'il interdit ou gêne, du point de vue du topos de l'élève, de la création du milieu, de l'avancée du temps de l'étude ou encore de la dialectique du groupe et de l'individu (les quatre axes n'étant pas obligatoirement présents à chaque coup). À cet égard, il faut souligner que le travail de justification de l'évaluation peut amener à retoucher le travail d'analyse, parce que tel point que l'on veut mettre en évidence dans l'évaluation n'a pas été explicité dans l'analyse, et que pour le faire entendre, on peut évoquer des techniques alternatives.

On donnera ci-dessous une synthèse des éléments évaluatifs que nous avons mis en évidence dans le travail sur la séance sur la simplification des programmes de calculs, volontairement rédigée sous la forme d'un bilan contrasté entre des points positifs et des points négatifs. Elle devrait être développée au moins sur certains aspects que nous avons mentionnés entre crochets.

1. On soulignera d'abord une bonne générativité de l'organisation didactique mise en place ; on part en effet du travail sur les programmes de calcul, qui pourra être réinvesti dans l'étude de l'ensemble du secteur algébrique, et la question de la détermination d'un programme algébrique équivalent à un programme donné s'avère effectivement pertinente pour motiver la réduction des expressions algébriques, les programmes de calculs apparaissant dans la deuxième partie surgissant en outre d'un calcul de grandeurs géométriques. La mise en œuvre de l'organisation de l'étude limite cependant cette générativité, puisque dans la première partie de la séance notamment, la gestion par P de la mise en commun des résultats obtenus pour l'exécution du premier programme de calcul nuit à la problématicité qu'il s'agissait d'installer. On voit en effet P donner très vite, sous la pression des erreurs de calculs effectuées par les premiers élèves interrogés manifestement non prévues par P, le programme de calcul équivalent, sans que le programme initial soit noté entièrement au tableau, et cela sans doute en raison du fait que ce premier programme n'a pas été donné par écrit. Cela produit un déficit dans le milieu dont la classe dispose ensuite pour assurer la dévolution du type de tâches à accomplir.
[Il faudrait ici développer en s'appuyant sur l'analyse de la réalisation de cet épisode.]

2. Le dispositif didactique prévu par P pour la réalisation du moment exploratoire permet que les élèves aient un *topos* effectif pour l'un des programmes de calculs : ils ont à effectuer une conjecture et à la vérifier. Ce *topos* est cependant réduit par le fait du découpage a priori en questions de l'activité. P aurait pu faire découper les questions aux élèves par un jeu de questions cruciales, ce qui aurait également permis d'améliorer la dévolution de l'activité et surtout d'impulser davantage de rythme à l'avancée du temps de l'étude. [Il faudrait développer en quoi le rythme est un peu lent en s'appuyant sur l'analyse].

3. L'occupation de ce *topos* est permis par la mise à disposition d'un milieu adéquat (OMP « exécuter un programme de calcul » ; disponibilité d'outils de calcul – tableur, calculatrice). On remarquera que du point de vue de la disponibilité des outils de calculs, P gère assez bien le fait qu'il n'y a pas beaucoup d'ordinateurs en mettant les élèves en groupes avec un ordinateur par groupe. Cependant, ce milieu n'est pas assez développé du point de vue de l'utilisation du tableur : on voit en effet certains groupes avoir des difficultés qui auraient pu être atténuées par un bilan écrit du travail effectué lors de la séance précédente, ou au moins la réalisation des gestes sur un ordinateur relié à un vidéoprojecteur, alors que P fait réaliser ce bilan oralement.

4. Le *topos* prévu est réduit lors de la mise en commun, la professeure ne se donnant pas les moyens de montrer la vérification de la conjecture puisqu'elle ne relève pas les résultats numériques obtenus par les groupes, qu'elle ne renvoie pas systématiquement à la classe la question de la validité des conjectures émises par les groupes, mais elle travaille avec le groupe qui émet la conjecture et qu'elle empiète également sur le topos des élèves en le faisant elle-même sur la dernière égalité. Dans cette perspective, on notera que le travail algébrique fait par P en interaction avec un groupe à la fin de la séance à propos du 3^{e} programme de calcul, sans doute sous la pression du temps, nuit également au *topos* des élèves parce que cela leur ôte une partie du milieu nécessaire à l'élaboration des éléments technologiques.

5. Si le fait de donner un spécimen différent à des groupes permet d'enrichir la base expérimentale dont on disposera, la nature des programmes de calcul donnés est ici un peu déséquilibrée ce qui conduit certains groupes chargés du premier programme à se dissiper. Homogénéiser le travail donné à chaque groupe du point de vue de la difficulté peut contribuer à améliorer le *topos* des élèves : on pourrait par exemple donner à tous les élèves un programme du type $a \times bx$ (en faisant varier les coefficients a et b) et un programme plus complexe. On notera ici que ça permettrait de réduire la différence d'avancée entre les groupes.

Quelle est la différence entre sous-type de tâches et type de tâches didactique ? (15, 2de)

On dit que T' est un sous-type de tâches du type de tâches T quand il apparaît que, pour accomplir T, on mobilise T', ou encore, pour le dire autrement, quand la technique relative à T contient T'.

1. Ainsi par exemple, dans l'organisation mathématiques que « exécuter un programme de calcul » est un sous type de tâches du type de tâches « Simplifier un programme de calcul » lorsque ce dernier est accompli avec la technique suivante.

> τ : Supprimer les parenthèses éventuelles ;
> S'il y a des produits, les effectuer ;
> Identifier les termes de même nature (en x, en x^2, les constantes,…) ; les regrouper et effectuer les calculs de chaque groupe de termes de même nature.
> Exécuter les deux expressions du programme pour différentes valeurs de x pour vérifier le résultat obtenu ; si on n'a pas les mêmes valeurs, reproduire la vérification à chaque étape du calcul pour détecter l'erreur commise et la corriger.

On voit que ces liens sont relatifs à l'OM élaborée : si la technique employée ne comprend pas d'étape de vérification, T' n'est plus un sous-type de tâches de T.

2. Un cas particulier fréquemment rencontré de cette situation est le cas où le sous type de tâches T' apparaît comme une restriction de T au sens où l'on a fixé certains paramètres, comme il en va dans l'exemple suivant (on n'a pas cherché l'exhaustivité) :

T : Résoudre une équation du second degré.

Sous types de tâches : T' : résoudre une équation du type $(x-a)^2=b$; T'' : Résoudre une équation du type $(x-a)(x-b)=0$.

3. Du point de vue des organisations didactiques, on citera par exemple le type de tâches « concevoir une séquence sur un thème donné », dont, relativement à la praxéologie qui a émergé dans cette formation, on peut donner les sous-types de tâches suivants : concevoir une OM relative au thème, concevoir une OD qui mette en place une OM donnée, préparer la réalisation du moment exploratoire, déterminer le milieu nécessaire à l'exploration, etc.

Parfois, une technologie donne directement une technique. Par exemple, pour le type de tâches « déterminer l'inverse d'un nombre en écriture fractionnaire », la technologie « *c* et *d* désignent des nombres relatifs non nuls. L'inverse du nombre *c/d* est le nombre *d/c*. » nous donne un moyen de résoudre ce type de tâches. Doit-on malgré tout dégager, dans ce cas-là, une technique associée à ce type de tâches ? (15, 2de)

1. Il est vrai que dans certains cas, la technologie produit une technique qui se superpose quasiment à l'énoncé de l'élément technologique. Mais généralement, la technique comporte des aspects « concrets » qui ne figurent pas dans l'énoncé technologique. Par exemple dans le cas cité ici, la technique pourra avoir la mise en forme suivante :

Identifier le numérateur de l'écriture fractionnaire, *c* ; le dénominateur de l'écriture fractionnaire, *d*. Écrire que l'inverse est le nombre dont l'écriture fractionnaire est *d/c*.

2. On soulignera que la technologie n'est pas seulement constituée de l'énoncé de l'élément technologique mais aussi de sa justification, par exemple ici le fait que $\frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = 1$, ce qui suppose

également sans doute que l'on ait défini la notion d'inverse. À cet égard, le fait de mettre dans l'organisation mathématique l'énoncé technologique « *c* et *d* désignent des nombres relatifs non nuls. L'inverse du nombre *c/d* est le nombre *d/c*. » peut paraître superfétatoire. En effet, la définition de l'inverse permet de justifier la technique précédente, qui de ce fait n'apparaît plus comme auto-justifiée.

1. On nous a dit d'écrire les praxéologies mathématiques mises en jeu dans la partie synthèse. Cependant, on nous a aussi indiqué que la partie synthèse devait être la partie (parmi activité, synthèse, exercices) la plus courte. Insérant dans ma synthèse les différentes praxéologies, j'ai l'impression que mes synthèses sont trop longues. Comment concilier les deux aspects (praxéologie plus courte) ? (14, 2de)

2. Dans le chapitre du parallélogramme en 5^{e}, on a, entre autres, les deux propriétés suivantes :
P1 – les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur ;
P2 – les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
Ces propriétés interviennent naturellement dans le type de tâches « déterminer une longueur ».
Doit-on distinguer un seul type de tâches « déterminer une longueur », l'élève devra alors accomplir 3 tâches de ce type au cours du chapitre, ou doit-on distinguer 2 types de tâches « déterminer une longueur avec P1 » et « déterminer une longueur avec P2 », auquel cas l'élève devra accomplir 6 tâches du type plus général « déterminer une longueur» ? (13, 5^{e})

1. Le fait que la synthèse apparaisse anormalement longue (ce qui serait à vérifier dans le cas cité) est souvent un effet de la diffraction de la synthèse, au sens où la synthèse comporte plusieurs praxéologies juxtaposées. Par exemple, dans le cas cité par la deuxième question, la synthèse peut prendre les deux formes suivantes[19].

Collège Emmy Noether

Classe de 5^{e} A

Parallélogrammes

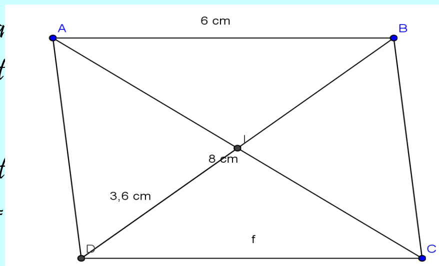
Synthèse (1)

Propriétés

P2 – les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Démonstration admise

Dans le parallélogramme ci-contre, déterminer la longueur du segment [IC] et la longueur du segment [BD].



I étant le milieu des diagonales, on a IC = AC/2 et BD = 2ID. Comme AC = 8 cm, IC = 4 cm. De ID = 3,6 cm, il vient BD = 7,2 cm.

[19]Le choix de faire figurer les techniques sous la forme d'exemples résolus s'éclaire quand on considère la mise en forme de la technique figurant dans la suite de la question (que l'on pourrait simplifier) et la classe considérée.

P1 – Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.

Démonstration

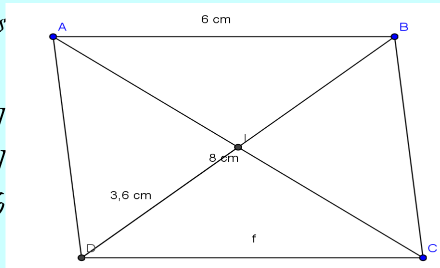
Dans le parallélogramme ABCD de centre I:

A est le symétrique de C par rapport à I et B est le symétrique de D par rapport à I.

Donc [AB] est le symétrique de [CD] par la symétrie de centre I. Le symétrique d'un segment est un segment de même longueur, donc [AB] et [CD] sont de même longueur.

De même [AD] est le symétrique de [BC]. Donc [AD] et [BC] sont de même longueur.

Dans le parallélogramme ci-contre, déterminer les longueurs AD et CD.



D'après la propriété P1, les côtés [AB] et [CD] ont la même longueur ; les côtés [AD] et [BC] ont la même longueur. AB = 6 cm donc CD = 6 cm. BC = 4,7 cm donc AD = 4,7 cm.

Collège Emmy Noether

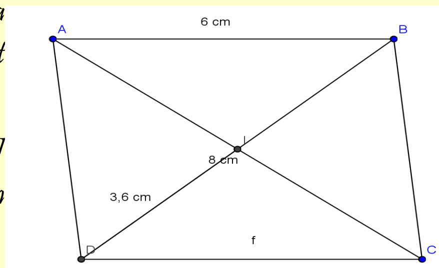
Classe de 5^{e} B

Parallélogrammes

Synthèse (1)

Problème : Déterminer la longueur d'un segment dans un parallélogramme

Dans le parallélogramme ci-contre, déterminer la longueur du segment [IC], la longueur du segment [BD], et celle du segment [CD].



ABCD étant un parallélogramme, les côtés [AB] et [CD] ont la même longueur (P1) ; AB = 6 cm donc CD = 6 cm.

I étant le milieu des diagonales, on a IC = AC/2 et BD = 2ID (P2). Comme AC = 8 cm, IC = 4 cm. De ID = 3,6 cm, il vient BD = 3,6 cm.

P2 – les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Démonstration admise

P1 – Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur.

Démonstration

Dans le parallélogramme ABCD de centre I:

A est le symétrique de C par rapport à I et B est le symétrique de D par rapport à I.

Donc [AB] est le symétrique de [CD] par la symétrie de centre I. Le symétrique d'un segment est un segment de même longueur, donc [AB] et [CD] sont de même longueur.

De même [AD] est le symétrique de [BC]. Donc [AD] et [BC] sont de même longueur.

Même si la différence de longueur n'apparaît pas très significativement ici, on voit apparaître qu'il est nécessaire d'amalgamer les praxéologies et pour cela il faut le plus souvent savoir différer la synthèse de façon à ne pas avoir plusieurs OMP juxtaposées. Bien entendu, le fait de différer la synthèse suppose que l'on fasse régulièrement des bilans d'étapes qui la prépare.

2. Pour ce qui concerne plus spécifiquement la deuxième question posée, du point de vue de la synthèse, soit de la mise en forme de l'OM, c'est clairement « déterminer une longueur » qui est le type de tâches à privilégier pour amalgamer suffisamment l'organisation mathématique. Cela ne signifie pas pour autant que l'on puisse opposer d'un côté « distinguer un seul type de tâche « déterminer une longueur », l'élève devra alors accomplir 3 tâches de ce type au cours du chapitre », et de l'autre « distinguer 2 types de tâches « déterminer une longueur avec P1 » et « déterminer une longueur avec P2 », auquel cas l'élève devra accomplir 6 tâches du type plus général « déterminer une longueur» ». C'est en effet l'organisation mathématique dans son ensemble qu'il s'agit de travailler, et donc les élèves doivent avoir à accomplir à peu près trois spécimens du type de taches « déterminer une longueur» selon la technique qui, si l'on suit ce qui est proposé par la question, pourrait être :

> Si la longueur a apparaît comme un côté d'un parallélogramme dont on connaît la longueur du côté opposé b, alors $a = b$;
> Si le segment dont on veut déterminer la longueur a a pour extrémités le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme et un sommet, sa longueur est la moitié de la longueur de la diagonale ;
> Si le segment dont on veut déterminer la longueur a est une diagonale d'un parallélogramme, sa longueur est deux fois la longueur du segment d'extrémité le point d'intersection des diagonales et d'un sommet appartenant à la diagonale. Dans le cas particulier d'un rectangle, c'est la longueur de la deuxième diagonale ou deux fois la longueur du segment d'extrémité le point d'intersection des diagonales et d'un sommet du parallélogramme.

On sera donc amené, de fait, à travailler à peu près 6 spécimens du type de tâches T, ce qui ne veut pas dire que l'on aura à effectuer 6 exercices.

On notera que « 3 spécimens » est un indicateur de tendance centrale ; il convient donc de paramétrer le nombre de spécimens à faire travailler suivant les types de tâches enjeu de l'étude, notamment selon qu'il sera un sous-type de tâches d'autres tâches enjeu de l'étude ou pas, ou encore qu'il constituera un ingrédient du milieu nécessaire à l'émergence d'une autre OM ou pas.

Est-ce qu'en AER, en salle info, avec une classe de troisième, il est correct de faire :
→ expérimentation en suivant des consignes ;
→ conjecture ;

→ démonstration grâce aux théorèmes et propriétés déjà vues ;
→ synthèse. (15, 6e & 3e)

Travail collectif dirigé

Ce travail a abouti à modifier la technique envisagée de la façon suivante :
→ expérimentation en faisant élaborer les consignes au fur et à mesure de l'avancée du travail ;
→ conjecture et vérification du ou des éléments technologiques clé(s) dans la fabrication de la technique ;
→ démonstration grâce aux théorèmes et propriétés déjà vues ;
→ bilan d'étape.

Quels sont les points communs et différences entre une AER et un problème ouvert ? (15, 2de)

1. On notera d'abord qu'une AER n'est pas un problème : c'est une structure qui réalise trois moments de l'étude d'une OM (moment de première rencontre, moment exploratoire, moment technologico-théorique) : elle se base sur un problème dont l'étude permet la réalisation des trois moments cités, et donc l'émergence d'au moins une OMP.

2. La dénomination « problème ouvert » est due pour l'essentiel à des travaux menés à l'IREM de Lyon dans les années 1980, travaux dans lesquels il s'agissait de porter dans la classe la « démarche de recherche » du mathématicien. Pour cela, l'équipe a utilisé comme support des problèmes qui tranchait avec les exercices traditionnels au sens où :
« l'énoncé est court ; l'énoncé n'induit ni la méthode ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que ». En aucun cas cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours. Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi peuvent-ils prendre facilement possession de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples ». Pour compléter ce tableau, on peut ajouter un autre attribut des problèmes ouverts : ils sont destinés à « chercher une solution originale, personnelle, avec les moyens du bord, mais la solution générale n'est pas à portée de main ».

3. Le travail d'un problème ouvert n'a donc pas pour objet l'émergence d'une OMP qui sera ensuite institutionnalisée, travaillée et évaluée mais l'exploration partielle d'un type de tâches à travers un spécimen, type de tâches qui pourra d'ailleurs ne pas être identifié. Cela étant, un énoncé de problème ouvert peut être un point de départ pour la réalisation d'une AER.

2. Forum des questions

Nous reprendrons d'abord rapidement les questions sur la gestion du temps de l'étude. (Voir notes de la séance 13).

Fraction et écriture fractionnaire

En classe de 4e, le terme le mieux approprié pour désigner $\frac{5}{7}$ est-il « fraction » ou « écriture fractionnaire » ? (15, 4e)

1. Les programmes et les documents qui les accompagnent parlent d'***écriture fractionnaire*** (ou, moins souvent, de ***forme*** fractionnaire), d'une part, de ***fractions***, d'autre part.

① Ce dernier vocable semble bien renvoyer au cas des fractions ***d'entiers***, au moins dans certains contextes, comme dans l'expression « fraction irréductible ». Mais l'emploi du mot peut renvoyer aussi à des écritures fractionnaires qui, clairement, ***ne sont pas*** des fractions d'entiers ! C'est ainsi qu'on lit dans le document d'accompagnement de l'ancien programme de 3e :

Autrefois, les machines ne permettaient que du calcul approché dans certains cas (fractions non décimales, radicaux par exemple), mais aujourd'hui, les logiciels de calcul formel sont accessibles désormais aux collégiens dans certaines calculatrices de poche.

② Lorsque les textes officiels désirent parler plus précisément de fractions d'entiers, c'est l'expression de ***quotient d'entiers*** qui est employée, comme dans l'extrait de l'ancien programme de 3e ci-après :

On s'intéressera particulièrement au problème suivant : étant donné deux points A et B, construire les points C de la droite (AB) sachant que le rapport $\frac{CA}{CB}$ a une valeur donnée sous forme de quotient d'entiers.

③ Semblablement, le document d'accompagnement de l'ancien programme de 3e comporte l'observation suivante :

Dès la classe de 6e, les élèves ont été amenés à travailler sur des nombres en écriture fractionnaire et en particulier sur des quotients d'entiers. Ils ont ainsi utilisé des nombres (rationnels) exprimés sous diverses formes : forme fractionnaire (réduite ou non) ou forme décimale (limitée ou non) ; ils ont pu constater que certains d'entre eux sont des entiers, d'autres des décimaux non entiers et d'autres encore ni des entiers ni des décimaux.

Les nouveaux programmes du collège conservent ces dénominations comme en témoigne les extraits suivants du programme de 6e :

Lire et compléter une graduation sur une demi-droite graduée, à l'aide d'entiers naturels, de décimaux, de fractions simples 1/2, 1/10, 1/4, 1/5 **ou de quotients (placement exact ou approché).*

Associer diverses désignations d'un nombre décimal : écriture à virgule, fractions décimales.

Écriture fractionnaire

Interpréter $\frac{a}{b}$ *comme quotient de l'entier a par l'entier b, c'est-à-dire comme le nombre qui multiplié par b donne a.*

Le vocabulaire relatif aux écritures fractionnaires est utilisé : numérateur, dénominateur.

L'interprétation d'un nombre en écriture fractionnaire comme un quotient n'est pas exigible. On en reste pour le socle en 6e à la conception des fractions vue à l'école.

2.

① Les écritures fractionnaires $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{2,7}{\sqrt{3}}$, $\frac{2,7}{1,8}$ sont ainsi des fractions, mais seule la fraction $\frac{2}{3}$ est un ***quotient d'entiers*** (ou une ***fraction*** d'entiers, même si les textes officiels n'emploient pas cette expression). On a par exemple : $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2,7}{1,8} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2} = 1,5$.

② D'une manière générale, étant donné un anneau $\mathcal{A}$ unitaire, commutatif et intègre, on appelle ***corps des fractions*** ou ***corps des quotients*** de $\mathcal{A}$, le plus petit corps $\mathcal{K}$ contenant $\mathcal{A}$: formellement, il est constitué des fractions ou quotients $\frac{a}{b}$ d'éléments a, b de $\mathcal{A}$, avec $b \neq 0$: a est alors le ***numérateur*** et b le ***dénominateur*** de la fraction .

③ La ***fraction*** $\frac{a}{b}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ est une ***écriture***. En particulier, de la même façon qu'un vecteur n'a pas d'origine ni d'extrémité, un ***nombre*** rationnel n'a pas de numérateur ou de dénominateur. Cela justifie que les textes privilégient l'expression d'***écriture*** (ou de forme) fractionnaire, plutôt que celle de fraction.

④ Le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}$ est évidemment l'anneau $\mathbb{Q}$ des fractions (d'entiers relatifs). Mais si $\mathcal{A} \supset \mathbb{Z}$ est un sous-anneau quelconque de $\mathbb{Q}$, il en va de même : son corps des fractions est aussi le corps $\mathbb{Q}$: ainsi par exemple le corps des quotients de l'anneau $\mathcal{A} = \mathbb{D}$ des nombres ***décimaux*** n'est-il rien d'autre que $\mathbb{Q}$. En d'autres termes, on n'enrichit pas le système des nombres disponibles en passant des fractions d'***entiers*** aux fractions de ***décimaux***.

Contraposée et réciproque du théorème de Pythagore

Dans les commentaires du programme de 4e, il est écrit : « On ne distingue pas le théorème de Pythagore direct de sa réciproque (ni de sa forme contraposée). On considère que l'égalité de Pythagore caractérise la propriété d'être rectangle. » Les élèves ont néanmoins du mal à voir quel « sens » appliquer alors que la distinction, pourtant « interdite » par l'extrait ci-dessus, est faite dans les manuels et surtout dans les exemples de cours que j'ai consultés. Comment gérer cette contradiction ? (13, 4e)

1. Examinons d'abord ce que dit le programme de 4e à propos du théorème de Pythagore.

Connaissances
Triangle rectangle : théorème de Pythagore et sa réciproque
Capacités
- Caractériser le triangle rectangle par le théorème de Pythagore et sa réciproque.
- Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celles des deux autres.
En donner, si besoin est, une valeur approchée, en faisant éventuellement usage de la touche d'une calculatrice.
Commentaires spécifiques pour le socle
Il est seulement attendu des élèves qu'ils sachent utiliser en situation cette propriété. Dans les exigibles du socle, on ne distingue pas le théorème de Pythagore direct de sa réciproque (ni de sa forme contraposée). On considère qu'il y a équivalence entre l'égalité de Pythagore et la propriété d'être rectangle, sans que cette caractérisation ait à être formalisée.

2. Pour avancer, nous ferons d'abord une mise au point sur la notion de contraposée. C'est une notion logique : étant donnée une proposition implicative, $p \Rightarrow q$, sa ***contraposée*** est non-q $\Rightarrow$ non-p. Si la proposition implicative est vraie, sa contraposée l'est aussi. Les notes du Séminaire 2004-2005 développaient ainsi ce propos :

① On a là, en effet, une équivalence ***purement logique***, qui ne doit rien aux mathématiques (ou, plus généralement, au domaine sur lequel portent les énoncés « atomiques » p et q), puisqu'on a la ***tautologie*** (du grec *tauto* « le même », et *logos* « discours »)

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{non-}q \Rightarrow \text{non-}p)$.

Disposer d'un théorème de la forme $p \Rightarrow q$ c'est donc *ipso facto* disposer du théorème non-$q \Rightarrow$ non-p correspondant : le passage de l'un à l'autre est une affaire de logique, ***non de mathématiques***.

② Il en va autrement de la relation d'un théorème $p \Rightarrow q$ et de sa ***réciproque*** $q \Rightarrow p$: démontrer le cas échéant que l'on a $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ comme cela se fait quelquefois, et plus généralement démontrer que l'on a $q \Rightarrow p$ relève cette fois ***des mathématiques***, non de la « simple » logique : logiquement, le fait que l'on ait $p \Rightarrow q$ n'entraîne ni n'empêche que l'on ait $q \Rightarrow p$.

On pourra également lire l'article « contraposée » de l'encyclopédie Wikipédia, dont on citera ci-dessous un extrait :

La contraposition (ou *modus tollens*) est un raisonnement logique basé sur la négation du conséquent d'une implication. C'est-à-dire que puisque la cause d'une implication engendre la conséquence, alors l'absence de la conséquence implique automatiquement l'absence de la cause.

La contraposition est équivalente à une implication dont elle est considérée comme une règle dérivée. Ainsi, la proposition contraposée de la proposition « A implique B » (« s'il pleut, alors le sol est mouillé ») est « non-B implique non-A ». (« si le sol n'est pas mouillé, alors il ne pleut pas »). Si la première est vraie, alors la seconde l'est aussi, et inversement.

La contraposition exprime le fait que B est une condition nécessaire de A : on ne peut pas avoir A sans avoir B. Dans notre exemple, il n'est pas possible qu'il pleuve et que le sol ne soit pas mouillé.

Il faut bien distinguer la contraposée de la réciproque : la réciproque de « A implique B » est « B implique A ». Le fait que l'une soit vraie ne dit rien sur l'autre à moins qu'on ait montré, par ailleurs, qu'il existe une équivalence entre A et B (« A si et seulement si B ») auquel cas, l'implication et la réciproque sont toutes deux vraies. Ainsi, même si l'implication « s'il pleut, alors le sol est mouillé » est vraie, on ne peut pas rien dire sa réciproque (« si le sol est mouillé, alors il pleut »).

Il ne faut pas confondre non plus la contraposition avec la négation de l'antécédent « non-A implique non-B » (« s'il ne pleut pas, alors le sol n'est pas mouillé ») qui, elle, n'est pas équivalente à l'implication. Utiliser la négation de l'antécédent conduit à un raisonnement faux ou sophisme. En effet, dans notre exemple le sol peut avoir été mouillé par autre chose et donc ce n'est pas parce qu'il ne pleut pas que le sol n'est pas mouillé.

La situation évoquée suppose donc que l'on distingue :

– la proposition ***directe*** de Pythagore : « si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2+AC^2$ » ;

– la proposition ***réciproque*** de Pythagore : « si $BC^2 = AB^2+AC^2$ alors ABC est rectangle en A » ;

– la proposition ***contraposée*** de Pythagore : « si $BC^2 \neq AB^2+AC^2$ alors ABC n'est pas rectangle en A » ;

– la proposition ***contraire*** de Pythagore : « si ABC n'est pas rectangle en A, alors $BC^2 \neq AB^2+AC^2$ ».

3. Si l'on désigne par les lettres p et q les assertions « ABC est rectangle en A » et « $BC^2 = AB^2+AC^2$ », les quatre assertions précédentes s'écrivent respectivement :

– proposition ***directe*** : $p \Rightarrow q$

– proposition ***réciproque*** : $q \Rightarrow p$

– proposition ***contraposée*** : non-$q \Rightarrow$ non-p

– proposition ***contraire*** : non-$p \Rightarrow$ non-q

Soit alors un triangle ABC tel que $BC^2 \neq AB^2+AC^2$, c'est-à-dire tel qu'on ait non-q. On peut conclure qu'on a non-p, c'est-à-dire que ABC n'est pas rectangle en A, en invoquant « la contraposée », c'est-à-dire le fait que

Si non-q alors non-p.

Mais on peut aussi « raisonner » en disant que, si l'on avait p, on aurait q, ce qui est contradictoire avec le fait qu'on a non-q :

Si p, alors q. Or non-q. Donc non-p.

Ce ***schéma déductif*** a un caractère naturel (il va de soi pour tout un chacun : « si Mamie était passée, elle aurait donné à manger au chat ; or le chat n'a pas mangé. Donc Mamie n'est pas passée »), et c'est ce ***schéma de raisonnement par contraposition*** que les élèves doivent chaque fois mettre en œuvre, ***et non l'invocation de la contraposée*** :

~~« ***On a*** $BC^2 \neq AB^2+AC^2$. D'après la ***contraposée*** du théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle en A. »~~

« ***On a*** $BC^2 \neq AB^2+AC^2$; ***or*** si ABC était rectangle en A, on aurait, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2+AC^2$. ***Donc*** ABC n'est pas rectangle en A. »

Il n'y a donc effectivement pas lieu de distinguer la contraposée du théorème de Pythagore, et c'est cela que signifie le programme en ne mentionnant aucunement le terme « contraposée », sauf dans le commentaire spécifique au socle.

3. Venons-en à la question de la ***réciproque.*** Elle est, quant à elle, ***clairement au programme,*** et permet de produire une technique associée au type de tâches « Montrer qu'un triangle est rectangle ». On trouve par exemple dans un manuel de 4e [Maths 4e éditions Magnard] le passage suivant :

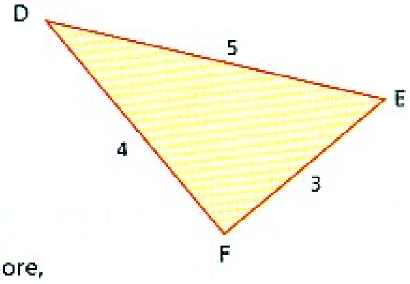
Application

La réciproque du théorème de Pythagore est une propriété permettant de montrer qu'un triangle est rectangle.

Dans le triangle DEF,
[DE] est le plus long des côtés,

$DE^2 = 5^2 = 2^2$
$EF^2 + DF^2 = 3^2 + 4^2$
$EF^2 + DF^2 = 9 + 16$
$EF^2 + DF^2 = 25$

Comme $DE^2 = EF^2 + DF^2$,
d'après la réciproque du théorème de Pythagore,
le triangle DEF est rectangle en F.



Ce que dit le programme, c'est qu'un élève qui écrirait la chose suivante :

On a : $DE^2 = 5^2 = 25$; $EF^2 = 3^2 = 9$; $DF^2 = 4^2 = 16$. $25 = 16 + 9$, donc $DE^2 = EF^2 + DF^2$. Le triangle DEF vérifie l'égalité de Pythagore : il est rectangle.

Satisferait aux exigences du ***socle commun***, mais il ne satisferait pas là aux exigences du programme : si cette réponse est donnée dans le cadre d'une évaluation, on ne mettrait ainsi pas tous les points de la question, la réciproque du théorème du Pythagore devant avoir été mobilisée dans l'organisation mathématique construite avec la classe, conformément au programme.

4. Nous compléterons cette enquête sur le théorème de Pythagore par l'extrait suivant des notes du Séminaire 2003-2004.

Le théorème ***réciproque*** est moins utilisé [que le théorème de Pythagore] : il fournit une condition suffisante pour qu'un angle soit droit, mais cet emploi n'est pas fréquent. Classiquement, toutefois, la réciproque est (ou était) employée (implicitement) pour tracer des angles droits dans l'espace ambiant (celui du jardinier, de l'architecte), à partir de la remarque selon laquelle $3^2 + 4^2 = 5^2$. De là découle par exemple le ***cordeau égyptien*** portant 12 nœuds, qui constitue une sorte d'équerre flexible. On verra sur la reproduction ci-après que la réciproque de Pythagore demeure aujourd'hui encore sollicitée à travers les « trucs » de bricoleur pour obtenir des angles droits. Dans le cas présenté, en effet, pour obtenir un angle droit, on trace un triangle dont les mesures des côtés sont 60, 80, 100, c'est-à-dire 20×3, 20×4, 20×5.

Tracer un angle droit au mètre

Pour tracer un grand angle droit, en particulier lorsqu'on a besoin de deux axes perpendiculaires pour la pose de revêtements en dalles au sol ou au mur, on peut utiliser un mètre :

1/ Tracer une ligne droite qui sera l'un des côtés de l'angle droit et, sur cette droite, un point A d'où partira l'autre côté.

2/ A 80 cm de A tracer le point B.

3/ A partir de A tracer un arc de cercle de 60 cm de rayon.

4/ A partir de B tracer un arc de cercle de 100 cm de rayon.

5/ Ces deux arcs se coupent en un point C. L'angle formé par les lignes AC et AB est un angle droit.

2. La situation précédente permet à elle seule de ***motiver*** le fait de s'interroger sur la ***réciproque*** du théorème de Pythagore, au moins dans le cas de triangles dont les mesures s'écrivent sous la forme $3k$, $4k$, $5k$ ($k \in \mathbb{Q}$, $k > 0$) : de tels triangles sont-ils approximativement rectangles (de manière suffisante pour les besoins de la pratique jardinière, etc.), ou sont-ils, du point de vue de la géométrie, exactement rectangles ?

① Cette interrogation peut avantageusement prendre sa place dans un ***PER*** englobant qui pourrait s'intituler ***« La réciproque est-elle vraie ? »***. Un tel PER, qui se développera à travers ***tous les domaines*** du programme d'études de la classe, donnera ainsi une place contrôlée, dans la culture didactico-mathématique de la classe, au type de situations dans lesquelles on est amené à établir, ***pour des raisons formelles*** – « la réciproque est-elle vraie ? » –, des énoncés technologiques dont plusieurs pourront demeurer ***en attente d'utilisation***. Ce parcours sera amorcé à l'aide de questions relativement « simples », telles par exemple les suivantes :

♣ Si l'entier n est pair, alors l'entier n^2 est-il pair ? La réciproque est-elle vraie ?

♦ Si le triangle ABC est isocèle en A, alors la hauteur et la médiane issues de A coïncident ; la réciproque est-elle vraie ?

♥ Si un rectangle est un carré, alors les diagonales ont même longueur ; la réciproque est-elle vraie ?

♠ Si $a = b$, est-il vrai que l'on ait $(a + b)^2 = 4ab$? La réciproque est-elle vraie ?

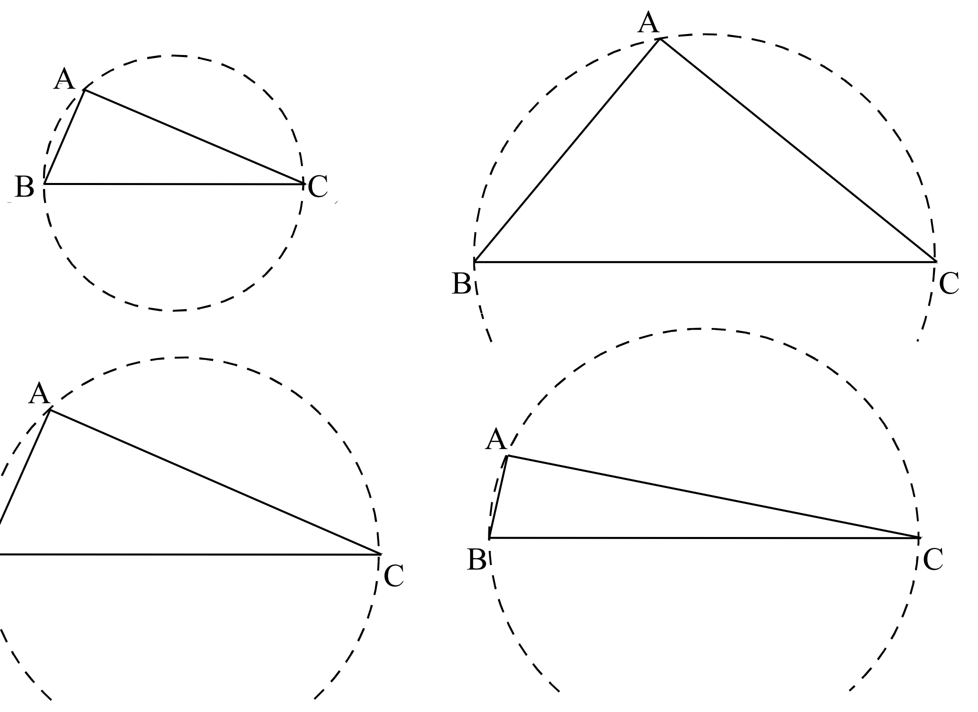
② L'étude de la réciproque de Pythagore pourra se faire en soumettant à l'expérience cette question :

$Q_{\llcorner}$. Sous quelle condition un triplet (a, b, c) de nombres strictement positifs, vérifiant $a \leq b \leq c$, correspond-il aux mesures des côtés d'un triangle rectangle ?

➊ Considérons par exemple les triplets suivants :

(10, 12, 18), (15, 112, 113), (14, 17, 22), (10, 49, 50), (16, 30, 34), (19, 43, 47), (11, 60, 61), (24, 55, 60), (12, 23, 26), (8,1, 36, 36,9), (11, 17, 20).

À l'aide du logiciel Géoplan, on a représenté ci-après, successivement, les triangles correspondants aux triplets (14, 17, 22), (10, 49, 50), (19, 43, 47), (24, 55, 60).



Les ***épures*** obtenues ne permettent pas d'écarter le fait que les triangles ainsi représentés graphiquement soient rectangles.

❷ Le ***théorème de Pythagore***, lui, amène à conclure sans hésitation. On a en effet, successivement,

$$14^2 + 17^2 = 22^2 + 1,\ 10^2 + 49^2 = 50^2 + 1,\ 19^2 + 43^2 = 47^2 + 1,\ 24^2 + 55^2 = 60^2 + 1$$

et ces triangles ne sont donc pas rectangles ! (Le logiciel donne d'ailleurs, pour leur angle « droit », les valeurs suivantes : 89,88°, 89,94°, 89,96°, 89,98°.)

On voit là apparaître un élément de réponse à la question de la raison d'être du type de tâches « montrer qu'un triangle n'est pas rectangle »...

Dans un contrôle, est-il bon de mettre la moitié des exercices sur le niveau du socle commun et l'autre moitié dans le programme de la classe mais hors du socle commun ? (15, 4e)

Il n'est pas adapté d'avoir une règle très tranchée d'autant que, comme nous l'avons rencontré à propos du théorème de Pythagore, les différences ne se font pas seulement du point de vue des types de tâches mais aussi, pour un même type de tâches, du point de vue des techniques. Il est certain qu'il faut se placer dans la ZEN relative au programme (notice évaluation et notation) et qu'il faut adapter la notation à ce qui est réalisé. Par exemple, à propos de l'utilisation de la proportionnalité en classe de 4e, le programme précise :

1.1. Utilisation de la proportionnalité Quatrième proportionnelle	- Déterminer une quatrième proportionnelle.	Aux diverses procédures étudiées en classes de Sixième et de Cinquième pour rechercher une quatrième proportionnelle, s'en ajoute une nouvelle, communément appelée « produit en croix » qui doit être justifiée (en lien avec l'égalité de quotients : voir § 2.2. ci-dessous). Le fait que, dans une relation de proportionnalité, la correspondance est déterminée par un seul couple de valeurs homologues non nulles est mis en évidence.	- Les élèves doivent savoir calculer une quatrième proportionnelle sans procédure imposée. Ils disposent pour cela de procédures étudiées antérieurement. - Utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin pour calculer une distance devient exigible. - Ces thèmes sont l'occasion de travailler l'utilisation de la calculatrice.
Calculs faisant intervenir des pourcentages [Thèmes de convergence]	*- Déterminer le pourcentage relatif à un caractère d'un groupe constitué de la réunion de deux groupes dont les effectifs et les pourcentages relatifs à ce caractère sont connus.* [SVT, Géographie, Physique, Technologie]	*Des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines demandent de mettre en œuvre un coefficient de proportionnalité, en particulier sous forme de pourcentage, et des quantités ou des effectifs.* *En liaison avec d'autres disciplines (géographie…) ou d'informations tirées de l'actualité, la notion d'indice donne lieu à illustrations et calculs mais sans développements théoriques.*	Calculer un pourcentage devient exigible.

1.2. Proportionnalité **représentations graphiques* [Thèmes de convergence]	*- *Utiliser dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité par l'alignement de points avec l'origine.* *[SVT, Histoire,*	**Les élèves travaillent sur des exemples de situations de proportionnalité et de non proportionnalité. Ils peuvent démontrer que si les points sont alignés avec l'origine, alors il y a proportionnalité entre les suites définies par les abscisses et les ordonnées de ces points. La réciproque est admise.* *Cette propriété caractéristique de la proportionnalité prépare l'association, en classe de Troisième, de la*	

	Géographie, Physique, Technologie]	*proportionnalité à la fonction linéaire.*	

Une nouvelle technique de détermination de la quatrième proportionnelle est ainsi au programme de la classe, la technique des « produits en croix » ; elle devra être évaluée au contrôle. Un élève qui rompt le contrat en n'utilisant pas cette technique alors qu'elle est adaptée au problème posé mais qui met en œuvre une technique vue dans les classes antérieures doit être pénalisé mais pas trop lourdement puisqu'il atteint les compétences du socle. En outre, on évitera qu'un contrôle porte uniquement sur le deuxième point du programme *Déterminer le pourcentage relatif à un caractère d'un groupe constitué de la réunion de deux groupes dont les effectifs et les pourcentages relatifs à ce caractère sont connus* qui n'est pas un exigible du socle. En revanche, on pourra faire un contrôle portant seulement sur le point 1.2. qui n'est pas exigible du point de vue du socle en 4^{e} mais qui le devient en 3^{e}, en paramétrant toutefois la notation pour en tenir compte notamment pour les élèves les plus fragiles.

Faut-il plutôt mettre les démonstrations dans la synthèse et l'AER, ou que dans l'AER ? (14, 5^{e})

1. Le travail démonstratif qui déduit de la théorie disponible la ou les nouvelles propriétés qui ont émergées fait partie de la réalisation du moment technologico-théorique ; il a donc sa place dans l'AER. La démonstration elle-même fait partie intégrante de la technologie, et elle a donc sa place dans la synthèse. Il faut donc avoir une technique didactique qui ménage deux aspects : un aspect lié à l'examen de la déductibilité, et un aspect lié à sa mise en forme. On peut y voir l'analogue de la différence entre les deux aspects de la correction que nous avons mis en évidence dans des séances précédentes, à savoir l'élucidation des difficultés mathématiques et la mise en forme de la solution.

2. Nous observerons ci-après une technique mise en place par un élève professeur pour permettre la reprise de la démonstration dans la synthèse.

Voici la description qu'elle en donnait dans son corpus B, consacré à la statistique descriptive en classe de seconde.

En général, la séquence continue par une Activité d'étude et de Recherche qui permet de faire émerger une notion nouvelle ou un théorème nouveau (et, dans ce dernier cas, de le démontrer dans le cadre de l'étude considérée), ainsi que des techniques associées. Elle a aussi pour but de motiver l'étude de la notion ou du théorème en jeu.

Le(s) résultats est(sont) ensuite consigné(s) dans un cadre plus général que celui de l'AER dans la partie Synthèse du cours des élèves. La démonstration générale est parfois effectuée, mais pas systématiquement pour toutes les AER.
(...)
Le théorème de la linéarité de la moyenne n'a pas été démontré dans le cas général, mais, à la suite de l'AER, une fois le bilan écrit, nous avons validé oralement que la démonstration effectuée dans le cas particulier de l'AER, était toujours valide quelle que soit la valeur numérique à rajouter à chaque mesure et quel que soit le nombre d'élèves considéré.

On trouvera ci-après l'extrait du compte rendu d'observation de l'AER correspondant à la démonstration.

Il est 9 h 33, et P engage les élèves à se lancer dans la démonstration : « À vous de chercher, à partir de cette idée, comment est-ce qu'on pourrait le démontrer. »

Un élève intervient, de façon inaudible et P lui demande d'essayer d'écrire sa proposition.
La classe hésite un peu. Certains n'ont pas compris, et notamment des élèves s'interrogent sur le lien entre l'exemple, la question initiale, et la démonstration demandée.
Sur les injonctions de P, la classe est au travail et P circule dans les rangs. Elle aide ponctuellement les élèves. Elle est amenée à préciser « Servez-vous du petit calcul qu'on vient de faire. » ou encore à demander « Comment on fait quand on a des quantités qu'on ne connaît pas ? »
P rappelle les élèves à l'ordre sur le niveau sonore. Le calme revient.
P circule toujours dans la classe.
Il est 9 h 42 et P relance le travail collectif.
P : « comment va-t-on s'y prendre pour calculer la nouvelle moyenne ? »
Un élève, Ya, propose de faire « 33 x =169,5 puis x = 169,5/33 ».
P : « x représente quoi pour toi ? »
L'élève : « la taille réelle ».
P reprend la proposition, en explicitant qu'on veut montrer que c'est égal à 169,5, et que « effectivement, les quantités qu'on ne connaît pas, généralement, on les appelle x, et que là on a 33 tailles inconnues, on peut les appeler de x_1 à x_{33} ».
Elle note au tableau :
x_1 = la taille du 1er élève (taille réelle après ajout des 0,5 cm)
à
x_{33} = taille du 33^e élève

P interroge à nouveau Ya pour la suite du calcul. Il hésite, parce que ce n'est pas ce qu'il a proposé. P relance le travail en demandant quelle est la moyenne.
Une élève intervient : elle donne l'expression de la moyenne réelle que P note au tableau. $(x_1+...+x_{33})/33$ = moyenne réelle. C'est cette moyenne dont on veut montrer que c'est 169,5.

P : Que sait-on sur ces x, là ?
Un élève propose qu'on ajoute 0,5 cm à chaque taille.
P propose alors de partir des tailles initialement mesurées, « ce sera plus simple à écrire » et efface ce qui figurait entre parenthèses.

Après avoir rappelé à l'ordre les élèves, P fait un bilan (on a les tailles initialement mesurées, x_1, …, x_{33}, la moyenne de ces tailles qui est 169 cm) puis reprend : « comment peut-on obtenir la moyenne réelle, celle après l'ajout de 0,5 cm ? »

Un élève propose qu'on « multiplie » par 0,5. Sur l'interrogation de P, il détaille un peu en disant qu'on ajoute 0,5 à chacun des 33, donc on multiplie par 33×0,5. P propose d'appeler la moyenne de départ m, la nouvelle moyenne m'. Elle demande de formuler l'idée avec les x. La classe s'agite et P demande à nouveau l'attention des élèves, en promettant une heure de colle au prochain pris en train de se dissiper.

On obtient finalement que $m' = (x_1+ \ ... +x_{33} + 33\times0,5)/33$

P demande à nouveau de détailler. Une élève dissipée se voit attribuer une heure de colle et c'est An qui donne l'écriture :
$m' = (x_1+0,5 + ... +x_{33}+0,5)/33$.

Il est 9 h 53. P relance la classe : « Est-ce que à partir de la formule qui est là, on peut revenir à la moyenne d'origine plus 0,5 ? »

On a au tableau.
$m = (x_1+ ... +x_{33})/33$ = moyenne de départ = 169 cm
$m = (x_1+0,5 + ... +x_{33}+0,5)/33$ = moyenne réelle.

La sonnerie retentit.
P : « On essaie de terminer. Comment je fais apparaître la moyenne de départ ? » Après avoir plusieurs fois essayé de relancer, la classe ne réagissant pas vraiment, le professeur termine le travail en interaction avec la

classe, en écrivant que $m = (x_1 + x_2 + ... + x_{33} + 0,5 + … + 0,5)/33$. Comme « on a 33 0,5 », on « obtient bien $m + 0,5$ ».

Il est 9 h 58 et la séance est terminée.

Commentaires développés oralement

3. Concevoir une AER de statistique

Nous reprendrons ici le travail effectué lors du TD TICE, de façon à le poursuivre pour concevoir une AER de statistique pour le collège.

On considère le fichier Excel disponible dans le dossier PCL2/2008-2009 d'Espar : il contient des données sur la population des communes françaises issues d'un fichier disponible sur le site de l'INSEE http://www.insee.fr/fr/ffc/docs_ffc/psdc.htm.

> **Question 2** : Élaborer, à partir de ces données, une étude statistique de la question : quand on dit qu'une commune française n'a pas beaucoup d'habitants, ça veut dire qu'elle en a combien ? On utilisera les connaissances statistiques au programme du collège.

Les groupes qui ont travaillé l'ont tous fait à partir de la feuille comportant la totalité des communes : nous partirons ici d'abord des données relatives aux communes des Alpes de Haute Provence.

Un premier geste consiste à classer les communes dans l'ordre croissant ou décroissant de leur population : compte tenu de la nature de la question, on s'intéresse aux « grandes villes », on choisit le tri croissant.

On peut dire que les premières communes qui apparaissent n'ont pas beaucoup d'habitants, mais le problème qui se pose c'est de savoir où « arrêter le curseur ».

Pour examiner ce problème, on peut envisager plusieurs stratégies :

– Compter le nombre de villes qui ont moins de N habitants, en faisant varier N.
Pour cela, il suffit de mettre un compteur dans une colonne du fichier : on entre 1, puis 2, puis 3, on sélectionne les 3 cellules et on recopie vers le bas ; ou encore on « double clique » sur le coin en bas à droite.

Voir le fichier Alpes_pop.ods

On voit assez vite que travailler avec les effectifs n'est pas très probant : on a par exemple 54 communes qui ont moins de 100 habitants, mais est-ce peu ou beaucoup ? C'est donc par rapport au nombre de communes du département qu'il va falloir évaluer, et c'est la notion de fréquence qui apparaît ici pertinente. Il y a 200 communes, et on a ainsi 54/200 = 27 % des communes qui ont moins de 100 habitants.

On pourrait également effectuer un regroupement en classe d'amplitude 100 habitants en enlevant de la série les 20 premières villes qui sont assurément des grandes villes.

– Regarder quelle proportion de la population totale du département compte les villes de plus de N habitants, en faisant varier N.

Pour cela, on fait la somme des cellules de la colonne PSDC et on met dans une colonne les effectifs cumulés croissants divisés par la valeur de la somme. On peut faire la même chose en enlevant Manosque et Digne.

Voir le fichier ods

On a presque 68 % de la population du département dans les villes de plus de 1000 habitants : on peut considérer que ces villes ne sont pas des « petites villes » ; si l'on examine les villes de moins de 150 habitants, elles rassemblent 5 % de la population départementale, et elles représentent 84/200, soit 42 % des communes du département et on peut convenir que ce sont des petites communes du département. (Les Alpes de Haute Provence étant un département rural, il est normal qu'il comporte beaucoup de « petites communes ».)

Voir le fichier ods

Il faudrait mettre à l'épreuve d'autres départements le critère du 5 % de la population avant de regarder ce que cela donne sur la population totale.

Pour le 7 février 2009, chaque trinôme envoie par courrier électronique une réponse à la question suivante :

> **Question 3** : Élaborer, à partir de cette étude, le guide d'une AER pour une classe de collège dont on choisira le niveau.

On examinera les réponses apportées lors de la séance du 10 février 2009. On pourra se baser sur les études expérimentales faites ci-dessus et en TD (voir les documents des groupes sur Espar dans le dossier PCL2/2008-2009).

Séminaire de didactique des mathématiques
Résumés des séances

➔ Séance 16 : mardi 10 février 2009

Pour des raisons liées à la journée d'action prévue ce mardi 10 février, la séance de séminaire était prévue pour ne durer qu'une heure et demi. Elle n'a finalement pas pu avoir lieu en présence. On demande aux élèves professeurs de travailler les notes qui suivent pour la séance suivante.

0. Questions de la semaine

On note un progrès dans le découpage des questions d'une partie de la promotion, avec une attention plus grande aux organisations mathématiques.

Les questions sur les organisations didactiques restent encore souvent peu précises :

Comment mener deux thèmes de front ?

bien que certains arrivent à découper davantage :

Si le professeur complète un schéma au fur et à mesure de la synthèse et que les élèves font la même chose, n'est-ce pas problématique ? Parce qu'en relisant leurs notes, les élèves risquent de ne plus comprendre car il leur manquera les différentes étapes.

Certains ne s'engagent pas dans ce travail : on renouvelle les observations formulées antérieurement.

1. Évaluation et développement : Guide d'AER de statistique

14 trinômes ont rendus leur travail (voir le fichier AER Statistique_travaux). 7 ont placé l'AER en 3^e, 3 en 5^e, 1 en 4^e et les trois restant ne se prononcent pas.

1. Dans l'ensemble, on note une compréhension au moins formelle de ce qui constitue un guide d'AER (une situation problématique assortie d'un réseau de questions cruciales et de possibilités de réponses des élèves, le milieu qui permet d'aborder les questions envisagées) : seul un trinôme donne une « fiche élève » détaillée qui limite considérablement le topos des élèves. On notera en outre que ce trinôme change l'étude à mener et qu'on ne voit pas bien les éléments de statistique qu'il s'agit de produire. On reproduit ci-dessous la première partie de l'activité :

Le but de cette activité est **l'Étude de la population en France.**
Compléter le document « évaluation » à l'aide des données présentes dans le fichier "population" et concernant le nombre de naissances, de décès et d'habitants pour les douze mois de l'année 2006. On procédera par "copier-coller.
A. Élaboration du tableau

1. Regrouper les différentes données présentes sur la fiche « population » dans un tableau. Pour cela, vous ferez apparaître en fonction des mois de l'année 2006, le nombre de naissances, le nombre de décès ainsi que le nombre d'habitants (en milliers) correspondant.
Vous pouvez pour vous aider utiliser la fonction « copier-coller ».

2. Sachant que l'on appelle « accroissement mensuel », la différence entre le nombre de naissances et le nombre de décès, calculer et faire apparaître les résultats dans le fichier précédent à l'aide d'une cinquième colonne.
Enregistrer le travail sous le nom : « étude ».

Un autre trinôme propose des étapes qui ressemblent fort à des questions intermédiaires et ne prévoie pas de questions cruciales.

Activité niveau 4^e^ :
On donne aux élèves un fichier dans lequel se trouve la liste des communes d'un département ainsi que le nombre d'habitants par commune. Les élèves travaillent avec Excel.
Le but de l'activité est de savoir si une ville de 7000 habitants est considérée comme une grande ville ou une petite ville.
On peut procéder par différentes étapes:
1/ Reclasser les communes par ordre d'importance de la plus petite à la plus grande.
2/ Calculer les effectifs cumulés croissants.
3/ Calculer le pourcentage d'habitants de chaque commune par rapport à la population totale du département.
4/ Regarder ce pourcentage pour des villes de 7000 habitants et plus.
Que peut-on dire pour une ville de 7000 habitants?
(...)

On ajoutera que le type de tâches « déterminer une question cruciale » reste problématique pour la majorité des trinômes. (Voir *infra.*)

2. Dans l'ensemble toujours, on peut remarquer que la précision du milieu est généralement (très) insuffisante et que les consignes à donner à la classe ou les dispositifs dans lesquels on va la faire travailler sont absentes. (Voir *infra*.)

3. La dernière remarque générale que nous ferons est le fait que certaines propositions restreignent trop l'OM à faire émerger, comme par exemple la proposition suivante destinée à une classe de 3^e^.

Énoncé de l'AER :

Que peut-on dire de la répartition de la population dans les communes des Bouches du Rhône ?

Fiche professeur : On réalise une AER en classe de 3^e^, en salle informatique, les élèves disposant du fichier Excel de la population dans les bouches du Rhône. On suppose que la notion de médiane a déjà émergé, et que son calcul est routinier pour les élèves.

On souhaite faire émerger la question de la pertinence des 2 mesures statistiques : moyenne et médiane, ainsi que les propriétés de ces 2 mesures quant à l'influence des valeurs extrêmes.

Questions cruciales et description de la séance :

1) Quelles mesures statistiques peut-on calculer pour décrire la série ?

-calcul moyenne, médiane, étendue

2) On constate une différence entre la moyenne et la médiane : comment l'interpréter ?

-répartition inégale de la population : on peut regarder les quartiles.

La moyenne est dans le 4^e^ quartile, ce qui confirme l'inégale répartition.

3) La moyenne est-elle alors une mesure pertinente pour décrire notre série ?

Non ! On va regarder le comportement de la moyenne si on enlève les valeurs extrêmes (moyenne élaguée, sans dire le terme).

Nouvelle moyenne ? Nouvelle médiane ?

Que remarque-t-on ?

Le fait de faire émerger en outre la médiane permettrait de gagner du temps et du sens, de la motivation, dans la construction de l'OM relative à la notion de médiane.

4. Nous travaillerons à développer un guide d'AER pour la classe de 5e à partir des trois guides proposés pour cette classe qui figurent en annexe.

On rappellera d'abord le programme de 5e à propos de la statistique.

Connaissances	Capacités	Exemples d'activités, commentaires
Dans les trois premières colonnes, une phrase ou une partie de phrase en italiques désigne une connaissance, une capacité ou une activité qui n'est pas exigible dans le socle. Si cette expression en italiques est précédée d'un astérisque, elle se rapporte à un exigible du socle dans une classe ultérieure.		
1.4. Représentation et traitement de données Classes, effectifs. Fréquences.	- Calculer des effectifs, - **Calculer des fréquences.* - Regrouper des données en classes d'égale amplitude. *[SVT, Histoire, Géographie, Physique, Technologie]*	Dans un premier temps, les calculs d'effectifs et de **fréquences* peuvent être réalisés indépendamment de la notion de classe. Les élèves sont entraînés à lire, interpréter et représenter des données en utilisant un vocabulaire adéquat. Le calcul d'effectifs cumulés n'est pas une compétence exigible, mais il peut être entrepris, en liaison avec d'autres disciplines dans des situations où les résultats peuvent être interprétés. **La notion de fréquence est souvent utilisée pour comparer des caractéristiques de populations d'effectifs différents. Les élèves sont sensibilisés aux problèmes engendrés par l'interprétation de ce type de comparaisons.* **Les écritures 4/10, 2/5, 0,4 (ou en notation anglo-saxonne 0.4 ou .4), 40 % sont utilisées pour désigner une fréquence : elles permettent d'insister sur les diverses représentations d'un même nombre.*
Tableau de données, représentations graphiques de données. [Thèmes de convergence]	- Lire et interpréter des informations à partir d'un tableau, ou d'une représentation graphique (diagrammes divers, histogramme). - Présenter des données sous la forme d'un tableau, les représenter sous la forme d'un diagramme ou d'un histogramme. [SVT, Histoire, Géographie, Physique, Technologie]	Le choix de la représentation est lié à la nature de la situation étudiée. Pour les données relatives à un caractère qualitatif trois types de représentations graphiques sont utilisés : le diagramme en tuyaux d'orgue, le diagramme en bandes (ou diagramme linéaire), le diagramme à secteurs (circulaires ou semi-circulaires). Pour les données à caractère quantitatif discret (ou à valeurs discontinues) le diagramme utilisé est le diagramme en bâtons ; pour les données à caractère continu, un histogramme est utilisé (en se limitant au cas de classes d'égale amplitude). L'utilisation d'un tableur permet d'enrichir ce travail en le prolongeant à des situations plus complexes que celles qui peuvent être traitées « à la main ». [B2i]

Le travail collectif dirigé prévu à ce propos aura lieu lors de la prochaine séance. On demande aux élèves professeurs de prendre connaissance des trois AER proposées (voir l'annexe en fin de fichier).

2. Forum des questions

Pour le type de tâches « connaissant deux couples $(x, f(x))$ pour une fonction f affine, calculer l'image d'un réel x_0 », on peut penser à deux techniques :
① Résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues, trouver la formule définissant f, puis calculer $f(x_0)$;
② Utiliser un tableau de « proportionnalité », c'est-à-dire déterminer le « coefficient directeur » de f.

+... +...

x			
f(x)			

+... +...

(Technologie sous-jacente : si $f : x \mapsto ax+b$, alors $f(x_0) = f(x_1) + a(x_0 - x_1)$.)
Dans ma progression, on n'a pas encore retravaillé la résolution de systèmes d'équations. Quelle technique choisir ? (2^{de}, 16)

1. On rappellera d'abord que les fonctions affines ont été étudiées en classe de 3^e. Voici ce que l'on trouve dans le programme qui a été suivi par les élèves actuellement en seconde :

Contenus

Fonction affine. Fonction affine et fonction linéaire associée

Compétences exigibles

Connaître la notation $x \mapsto ax+b$ pour des valeurs de deux nombres et de leurs images.
Déterminer une fonction affine par la donnée de deux nombres et de leurs images.
Représenter graphiquement une fonction affine.
Lire sur la représentation graphique d'une fonction affine l'image d'un nombre donné et le nombre ayant une image donnée.

Commentaires

Pour des valeurs de *a* et *b* numériquement fixées, le processus de correspondance sera aussi explicité sous la forme « je multiplie par *a* puis j'ajoute *b* ». La représentation graphique de la fonction affine peut être obtenue par une translation à partir de celle de la fonction linéaire associée. C'est une droite, qui a une équation de la forme $y = ax+b$. On interprétera graphiquement le coefficient directeur *a* et l'ordonnée à l'origine *b* ; on remarquera la proportionnalité des accroissements de *x* et *y*.
Pour déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère, on entraînera les élèves à travailler à partir de deux points pris sur la droite et à exploiter la représentation graphique.
On fera remarquer qu'une fonction linéaire est une fonction affine.
Des enregistrements graphiques ou des courbes représentatives de fonctions non affines peuvent servir de support à la construction de tableaux de valeurs ou à la recherche de particularités d'une fonction : coordonnées de points, sens de variation sur un intervalle donné, maximum, minimum.
Aucune connaissance n'est exigible à ce sujet.

Le type de tâches objet de la question a donc dû être étudié en 3^e : on a ainsi une ***reprise de l'étude*** en classe de seconde et il s'agit, par le biais d'un ***test d'entrée,*** de faire le point sur les techniques dont disposent les élèves. Dans un ouvrage pour la classe de 3^e correspondant au programme cité (collection Dimathème, édition Didier, 1999), c'est la résolution d'un système d'équations qui constitue le cœur de la technique proposée.

5 Détermination d'une fonction affine à partir de deux images

Déterminer la fonction affine f telle que $f(2) = -3$ et $f(4) = 1$.

1re étape On écrit $f(x)$ sous la forme $ax + b$. Il s'agit donc de déterminer a et b.

$f(x) = ax + b$.

L'image de 2 est -3, donc $2a + b = -3$. (E_1)

L'image de 4 est 1, donc $4a + b = 1$. (E_2)

2e étape On résout le système formé des équations (E_1) et (E_2).

$$\begin{cases} 2a + b = -3 & (E_1) \\ 4a + b = 1 & (E_2) \end{cases}$$

On soustrait membre à membre les deux équations pour obtenir une égalité ne comportant que la seule inconnue a :

$2a - 4a = -3 - 1$,

soit $-2a = -4$.

Donc $a = 2$.

On remplace a dans l'une des équations. Dans (E_1), on obtient :

$2 \times 2 + b = -3$,

soit $4 + b = -3$.

D'où $b = -7$.

La fonction cherchée est donc la fonction affine définie par $f(x) = 2x - 7$.

Le programme de 3e laisse cependant apercevoir une autre technique, produite par le fait que lorsqu'une fonction est affine, l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable, le coefficient de proportionnalité étant le coefficient de x dans l'expression algébrique de la fonction. En reprenant le spécimen précédent, on aurait ainsi : $4 - 2 = 2$ et $f(4) - f(2) = 1 - (-3) = 4$. Le coefficient de proportionnalité est ainsi 2 et $f(x) = 2x + b$. Comme $f(4) = 1$, on obtient que $8 + b = 1$, soit que $b = -7$.

Ce que l'on peut mettre en forme de la façon suivante :

Calculer $x_0 - x_1$, puis $f(x_0) - f(x_1)$, et écrire que $f(x_0) - f(x_1) = \dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}(x_0 - x_1)$. On a alors $f(x) = \dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} x + b$, et il suffit d'écrire cette égalité pour $x = x_0$ ou x_1 pour obtenir b.

2. Voici ce que dit le programme de seconde à propos des fonctions affines.

Contenus
Fonctions linéaires et fonctions affines.
Capacités attendues
Caractériser les fonctions affines par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable.
Commentaires
Exemples de non-linéarité. En particulier, on fera remarquer que les fonctions carré, inverse, … ne sont pas linéaires.

On voit que la différence avec la classe de 3e se situe dans le fait que, en classe de seconde, l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable ***caractérise*** les fonctions affines. On ajoute donc la réciproque de la propriété vue en troisième : si une fonction est telle que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable, cette fonction est affine. Voici ce que les Archives du Séminaire notaient à ce propos.

1. La proposition réciproque a eu autrefois un usage traditionnel que l'on exposera ici en suivant un ouvrage publié en 1929 à l'intention notamment des élèves instituteurs (J. Gal & A. Marijon, *Les problèmes résolus par la méthode naïve*, Fernand Nathan, Paris, 1929, pp. 56-57).

1.1 Considérons le problème suivant :

> Un piéton, qui s'éloigne de la ville A, était à 12 km de A à midi. Il marche à la vitesse uniforme de 5 km à l'heure. 1° On demande à quelle distance de A il sera à 18 h ; 2° On demande d'autre part à quel moment il sera à 40 km du point A.

1.2 L'hypothèse que le piéton « marche à la vitesse uniforme de 5 km à l'heure » ***implique*** que la distance parcourue y est une ***fonction affine*** du temps de parcours, x. On a donc : $y = ax + b$. En prenant pour unités de temps l'heure et pour unité de distance le kilomètre, on sait que $a = 5$, et que pour $x = 12$, $y = 12$, en sorte que $b = 12 - 5 \times 12 = -48$: $y = 5x - 48$. Pour la 1re question, on a $x = 18$ et donc $y = 5 \times 18 - 48 = 42$.

1.3 On peut aussi considérer la distance z parcourue ***depuis midi***, qui, pour les mêmes raisons, est une ***fonction affine***. On a ici $z = ax + c$, avec, pour $x = 12$, $z = 0$ et donc $c = -5 \times 12 = -60$, en sorte que $z = 5x - 60$. Il vient $z = 5 \times 18 - 60 = 30$. À 18 h, le piéton sera donc à 12 km + 30 km = 42 km de A.

1.4 On peut encore considérer la distance y du piéton à A en comptant le temps t écoulé ***depuis midi***. Cette fois, pour $t = 0$, on a $y = 12$, en sorte que $y = 5t + 12$. À 18 h, soit pour $t = 18 - 12 = 6$, on a $y = 5 \times 6 + 12 = 42$… C'est ce dernier choix que retiennent les auteurs déjà cités :

> La *solution algébrique* est donnée par l'équation du mouvement du piéton : $y = 12 + 5x$ (x, temps en heures, compté à partir de midi ; y distance à A en km). Pour $x = 6$, on trouve $y = 42$.

1.5 Notons la réponse à la 2e question.

Pour $y = 40$, on doit avoir $5x - 48 = 40$ et donc $x = \frac{88}{5} = 17{,}6$. Comme $0{,}6 \times 60$ min = 36 min, le piéton sera à 40 km de A à 17 h 36.

Pour $y = 40$, on a $z = 40 - 12 = 28$, et donc $5x - 60 = 28$, soit, de même que précédemment, $x = \frac{88}{5}$, etc.

Pour y 40, on a aussi $5t + 12 = 40$, soit $t = \frac{28}{5} = 5{,}6$. Le piéton sera à 40 km de A à 5 h 36 de l'après-midi, soit à 17 h 36.

1.6 On aurait pu aussi considérer la distance d parcourue depuis le point 12 km, le temps t étant compté depuis midi : on aurait eu alors $d = 5t$. Pour $t = 18 - 12 = 6$, on obtient $d = 5 \times 6 = 30$: le piéton est, à 18 h, à 30 km + 12 km = 42 km de A. Pour $y = 40$, on a $d = 40 - 12 = 28$ et donc $t = \frac{28}{5} = 5{,}6$, etc. Ce que les auteurs suivis observent dans les termes suivants :

> Ce problème aurait été ramené au problème un peu plus simple du nº 21 en comptant les distances non plus à partir de A, mais à partir de la borne kilométrique 12, c'est-à-dire du point où est le piéton au moment où nous avons commencé à étudier son mouvement.

2. Cet emploi du théorème réciproque permet de ne pas rester prisonniers des grandeurs variables données, lorsqu'elles sont supposées liées de manière affine : on peut effectuer une ***translation*** sur chacune d'elles

(sur x comme sur $y = f(x)$, où f est affine), sans changer le caractère affine de leur liaison. C'est cette observation que l'on exploitera dans de nombreuses situations, pour diminuer la charge de travail à accomplir et rendre donc ce travail à la fois plus intelligible et plus fiable.

D'une manière générale, chaque fois que la connaissance du système à modéliser nous permet d'affirmer que la relation entre deux grandeurs x et y est telle que leurs augmentations sont proportionnelles, on pourra modéliser cette relation par l'égalité $y = ax + b$.

3. Cette propriété peut s'énoncer d'une autre manière. En effet, cela revient à dire, si f est affine, que la fonction $x \mapsto f(x+u) - f(x)$ ne dépend pas de x, mais seulement de u et on a même $f(x+u) - f(x)$ est proportionnelle à u. Autrement dit, si on augmente la variable d'une quantité u, l'augmentation de l'image ne dépend pas du point à partir duquel on augmente la variable, mais seulement de la quantité avec laquelle on l'augmente. Cette propriété est illustrée dans les Archives du Séminaire par le problème suivant :

On imagine qu'on entoure la Terre – supposée être une sphère parfaite – avec une corde (qui s'identifie à l'un des grands cercles de la sphère). On augmente alors la longueur de cette corde d'un mètre seulement, et on suppose que la corde dessine encore un cercle parfait autour de la Terre, à une certaine distance de la surface du sol terrestre. Une souris pourrait-elle passer entre la corde et la Terre ?

❶ La réponse paraît *a priori* franchement ***négative***. Modélisons pourtant la situation évoquée : en désignant par r m le rayon de la Terre, par x m la longueur initiale de la corde, on a $x = 2\pi r$; $x+1 = 2\pi(r+\varepsilon)$. Il vient : $\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}159\ldots$ La distance entre la surface du sol est la corde est donc d'environ 0,16 m = 16 cm. On trouve ainsi, de manière inattendue, que la souris passe... largement ! On voit en outre que la valeur de ε est ***indépendante*** de r.

❷ Ce résultat imprévu n'était pourtant pas ***imprévisible***. Considérons le rayon du cercle dessiné par la corde comme une fonction de la longueur x de la corde : $f(x) = 2\pi\, x$. La fonction f est donc affine (et même linéaire) ; par suite, lorsque x augmente de u, l'accroissement de f, soit $\varepsilon(x, u) = f(x + u) - f(x)$ ***ne dépend pas*** de la valeur x à partir de laquelle se fait l'augmentation, mais seulement de la valeur de u ; plus précisément $f(x + u) - f(x)$ est proportionnel à u, en vertu de la propriété ***caractéristique*** des fonctions affines : $f(x + u) - f(x) \propto u$. L'accroissement de la longueur de la corde à partir de $x = 2\pi r$ entraîne donc un accroissement du rayon qui est le même que celui qu'on obtiendrait à partir de n'importe quelle valeur de x, et par exemple que celui obtenu en remplaçant la Terre par... une balle de ping-pong – auquel cas notre intuition nous « assure » que la souris pourra passer.

❸ Cette étude pourra être prolongée, ultérieurement, par une comparaison, à cet égard, des fonctions affines par rapport aux fonctions convexes (telle x^2), pour lesquelles $x \mapsto f(x + u) - f(x)$ est ***croissante***, et aux fonctions concaves (telle $\sqrt{x}$), pour lesquelles $x \mapsto f(x + u) - f(x)$ est ***décroissante*** (les fonctions affines étant les seules fonctions ***à la fois*** convexes et concaves).

Fluctuations d'échantillonnage

Comment évaluer les compétences des élèves sur les « fluctuations d'échantillonnage et les simulations » ? Le travail de l'élève doit-il se résumer à des activités utilisant les TICE, et produire des fichiers sur support informatique ? (2^{de}, 16)

J'ai du mal à percevoir les types de tâches relatifs au thème « Simulation et fluctuation d'échantillonnage ». Comment évaluer les élèves sur ces notions ? (2^{de}, 16)

1. La notion de « fluctuation d'échantillonnage » apparaît dans le programme de 2^{de}. Dans la partie présentant le domaine de la ***statistique***, ce programme précise ceci.

> **En seconde le travail sera centré sur :**
>
> – la réflexion conduisant au choix de résumés numériques d'une série statistique quantitative ;
>
> – la notion de fluctuation d'échantillonnage vue ici sous l'aspect élémentaire de la variabilité de la distribution des fréquences ;
>
> – la simulation à l'aide du générateur aléatoire d'une calculatrice. La simulation remplaçant l'expérimentation permet, avec une grande économie de moyens, d'observer des résultats associés à la réalisation d'un très grand nombre d'expériences. On verra ici la diversité des situations simulables à partir d'une liste de chiffres.

2. Le même texte formule ensuite les préconisations ci-après.

> L'enseignant traitera des données en nombre suffisant pour que cela justifie une étude statistique ; il proposera des sujets d'étude et des simulations en fonction de l'intérêt des élèves, de l'actualité et de ses goûts.
>
> La notion de fluctuation d'échantillonnage et de simulation ne doit pas faire l'objet d'un cours. L'élève pourra se faire un « cahier de statistique » où il consignera une grande partie des traitements de données et des expériences de simulation qu'il fait, des raisons qui conduisent à faire des simulations ou traiter des données, l'observation et la synthèse de ses propres expériences et de celles de sa classe. Ce cahier sera complété en première et terminale et pourra faire partie des procédures d'évaluation annuelle.

3. Le document d'accompagnement ajoute les développements suivants.

> **• La fluctuation d'échantillonnage**
>
> Nous appellerons échantillon de taille n d'une expérience la série des résultats obtenus en réalisant n fois cette expérience ; on dira aussi qu'un échantillon est une liste de résultats de n expériences identiques et indépendantes ; on se limite en seconde aux échantillons d'expériences ayant un nombre fini d'issues possibles. La distribution des fréquences associée à un échantillon est le *vecteur* dont les composantes sont les fréquences des issues dans l'échantillon ; on ne donnera pas de définition générale de la notion de distribution des fréquences, on se contentera de la définir comme liste des fréquences dans chacune des situations que l'on traitera. Les distributions des fréquences varient d'un échantillon à l'autre d'une même expérience : c'est ce qu'on appellera en classe de seconde la fluctuation d'échantillonnage.
>
> Aborder la notion de fluctuation d'échantillonnage se fera en premier lieu dans des cas simples (lancers de dés, de pièces), où la notion d'expériences identiques et indépendantes est intuitive et ne pose pas de problème ; l'élève reprendra ainsi contact avec des expériences aléatoires familières (lancer de dés équilibrés) et les enrichira. Historiquement, l'honnête homme du XVII^e^ siècle s'est familiarisé à l'aléatoire en pratiquant les jeux de hasard ; maintenant, les calculatrices et les ordinateurs permettent la production aisée de listes de chiffres au hasard ; la production de telles listes fera partie, à coté des lancers de dés ou de pièces équilibrés, à côté de tirage de boules dans des urnes, du bagage d'expériences de référence de l'élève. L'étude de ces expériences de référence sera ainsi à la base de la formation sur l'aléatoire des élèves.
>
> L'esprit statistique naît lorsqu'on prend conscience de l'existence de fluctuations d'échantillonnage ; en seconde, l'élève constatera expérimentalement qu'entre deux échantillons, de même taille ou non, les distributions des fréquences fluctuent ; la moyenne étant la moyenne pondérée des composantes de la distribution des fréquences est, elle aussi, soumise à fluctuation d'échantillonnage ; il en est de même de la médiane. On observera aussi que l'ampleur des fluctuations des distributions de fréquences calculées sur des échantillons de taille n diminue lorsque n augmente. Par ailleurs, on n'hésitera pas à parler de la fréquence d'un événement (« le nombre observé est pair », « le nombre est un multiple de trois », etc.) sans pour autant définir formellement ce qu'est un événement, ni donner de formules permettant le calcul automatique de la fréquence de la réunion ou de l'intersection de deux événements.
>
> Le choix pédagogique est ici d'aller de l'observation vers la conceptualisation et non d'introduire d'abord le langage probabiliste pour constater ensuite que tout se passe comme le prévoit cette théorie.

4. On voit donc apparaître d'abord que la simulation est un moyen au service de la fluctuation d'échantillonnage. À cet égard, le phénomène essentiel qu'il s'agit de mettre en évidence c'est le fait que, quand on prend des échantillons d'une même expérience, la distribution des fréquences de ces échantillons fluctuent, de même que la moyenne et la médiane. Les élèves vont donc d'abord apprendre à mettre en évidence la fluctuation de la distribution des fréquences à partir d'expériences qu'ils vont réaliser, ou qui auront été réalisées par d'autres et pour lesquelles ils auront accès aux données, puis simuler. Ils mettront ensuite en évidence un autre phénomène, le fait que lorsque le nombre d'expériences réalisées devient grand, la fluctuation des distributions des fréquences diminue. Nous poursuivrons ce travail lors de la séance de TD de la semaine prochaine.

5. On notera pour terminer que, comme le met en évidence la deuxième question, fabriquer une réponse à une question du type « comment évaluer les compétences des élèves sur un thème donné ? » relève en général d'une analyse correcte l'organisation mathématique enjeu de l'étude.

À suivre...

3. Forum des questions express

Fonctions trigonométriques en seconde

1. Comment aborder les « fonctions de référence » du programme ? En particulier, les fonctions trigonométriques, le programme est assez vague sur le sujet : « Connaître la représentation graphique de sin x et cos x ». Donc, pour exagérer, on dessine les deux fonctions et c'est tout ! (2^{de}, 16)

2. La motivation principale d'étudier les fonctions de référence est de simplifier l'étude des fonctions dont les expressions sont plus complexes. Comment motiver l'étude des fonctions sin et cos ? (2^{de}, 16)

3. Quelles raisons d'être viables peut-on trouver au sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle, vu que les calculs angles / longueurs peuvent toujours être faits avec le cosinus ? (2^{de}, 13)

1. On reproduit d'abord ci-dessous le programme de seconde relatif aux fonctions de référence « non affines ».

Capacités attendues

Établir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto 1/x$.
Connaître la représentation graphique de $x \mapsto \sin x$ et de $x \mapsto \cos x$.

Commentaires

D'autres fonctions telles que $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto |x|$… pourront être découvertes à l'occasion de problèmes. Les résultats les concernant pourront être admis. Les positions relatives des diverses courbes ainsi découvertes seront observées et admises.
La définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour un réel x quelconque se fera en "enroulant **R**" sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de 30°, 45° et 60°.

2. Comme le rappelle partiellement la deuxième question, nous avons vu dans le séminaire que la connaissance des fonctions carré et inverse était un élément technologique permettant de produire des techniques d'étude de fonctions du second degré ou homographiques, fonctions dont l'étude étaient motivées notamment par l'optimisation de grandeurs. Il en va de même pour la connaissance des fonctions sinus et cosinus, qui sera un élément technologique au service de la production de pratiques – qu'il reste à déterminer. Pour déterminer des situations dans lesquelles interviennent les fonctions sinus et cosinus, une première idée est de penser à des problèmes d'optimisation de grandeurs, comme pour les autres fonctions de référence ; une seconde, à l'étude de phénomènes physiques. Nous donnerons ci-dessous une situation extraite d'un ouvrage pour la classe de seconde (Collection Repère, éditeur Hachette éducation).

On considère les parallélogrammes ABDC tels que AB = 5 cm et AC = 4 cm. En existe-t-il un dont l'aire soit la plus grande possible ? Si oui, quelle est cette aire ?

Le travail de modélisation conduit d'abord à exprimer l'aire comme le produit de la hauteur issue de C par AB. Puis la hauteur s'exprime en fonction de sin x, où x est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ par $h = 4 \sin x$. On a finalement que l'aire du parallélogramme, $\mathcal{A}$, est fonction de la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, x, par $\mathcal{A}(x) = 20 \sin x$. Compte tenu de la configuration géométrique, $x \in [0\ ; \pi[$ et il s'agit d'examiner si la fonction sinus admet un maximum sur cet intervalle. C'est le cas, pour $x = \frac{\pi}{2}$, et le parallélogramme d'aire maximum est donc le rectangle de côtés 5 cm et 4 cm : l'aire est alors de 20 cm².

3. On notera, comme élément de réponse à la troisième question, que l'on a ici une situation où la fonction trigonométrique qui intervient « naturellement » est la fonction sinus. Si l'on voulait faire intervenir la fonction cosinus, il faudrait écrire que $h = 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ce qui complique le travail du modèle. C'est généralement ce cas que l'on rencontre dans le calcul de longueurs.

À suivre...

À quel point doit-on (peut-on ?) (se permettre ?) utiliser un vocabulaire précis de la matière ? Doit-on expliquer ce vocabulaire ?
<u>Exemple :</u> remplir avec la <u>puissance</u> de 10 qui convient :

$1{,}2 \times \_\_ = 12$

$1{,}02 \times \_\_ = 102$ (Classe de 6^{e} et 5^{e})

Que faire si on utilise par mégarde un vocabulaire inadapté « la multiplication est commutative » ? (5^{e})

* expliquer le vocabulaire ;

- passer sans expliquer, trouver une autre expression (les élèves s'intéressent vite aux nouveaux mots). (5^{e}, 13)

Il est essentiel pour le professeur de contrôler le vocabulaire qu'il emploie. On notera ici, par exemple, que les programmes de 6^{e} et de 5^{e} ne parlent pas de puissances mais de multiples de 10, et c'est bien de cela qu'il s'agit. On ne demande pas aux élèves de compléter la première égalité par 10² mais par 100. En cas de bévue, il faut expliciter brièvement le mot employé en le rattachant à des choses connues sans digresser.

Comment gérer les nombreuses questions des élèves sur les thèmes connexes à ceux étudiés dans la séance ? (surtout si elles concernent le thème donné !) Peut-on, doit-on répondre à toutes les questions ? Même si la réponse concerne une notion qui n'est pas au programme, mais qui leur est accessible:

Tracer le symétrique de (d) par rapport à O.

« On prend la longueur de O à (d), on reporte de l'autre côté, on trace la parallèle. »

La distance de O à (d) : doit-on leur répondre ? (VD, 5^{e}, 16)

× O

Compte tenu du temps dont on dispose, on évitera soigneusement toute digression par rapport au programme. La situation évoquée précédemment fait surtout apparaître un défaut de mise en forme de la technique, et c'est cela qu'il faudra mettre en évidence et travailler. (La technique « correcte » devant exprimer par exemple que l'on trace la perpendiculaire à *d* passant par O, D, puis que l'on marque le point d'intersection de cette perpendiculaire avec *d*, K, et que l'on construit le cercle de centre K et de rayon OK qui coupe D en O et O', qui est le symétrique de O par rapport à *d*.)

Si un élève pose le problème de la définition de la distance d'un point à une droite, on pourra mettre en évidence que cela pose manifestement un problème de définition, et que cette question sera étudiée dans les classes ultérieures. « Répondre à la question » reviendrait ici au mieux à passer quelques minutes à donner la définition en la justifiant par le fait qu'on prend « la plus courte », ce qui tuerait une bonne partie du travail de problématisation et de motivation de cette notion au programme de la classe de 4^e^.

Plus généralement, de nombreuses questions des élèves sont souvent le symptôme d'un topos insuffisant et d'une organisation de l'étude « floue », qui n'a pas assez précisé l'OM étudiée. Les élèves cherchent donc, par un questionnement opiniâtre, quelquefois maladroit, à préciser les contour de ce que sera leur topos.

4. Problématique et fonctionnement du Séminaire

La semaine prochaine, une séance de TD sera consacrée à la fluctuation d'échantillonnage; Il concerne les élèves professeurs dont les noms suivent, auxquels s'ajoutent les absents de la dernière séance de TD.

Alexandra Devilers ; Bruno Michel ; Christophe Coupard ; Olivier Dumont ; Elodie Maysou ; Marion Rubin ; Patrick Azra-Rabilloud ; Arnaud;Combes ; Samuel Der Monsessian ; Nicolas Chekroun ; Raphaël Rigaud ; Florian Van Becelaere ; Hélène;Pujol ; Souaad;Benhadi ; Yanna Pons ; Hamdoune Lazrek ; Renaud Cortinovis ; Matthieu Bruno ; Fanny Devaux ; Laurent Petit ; Latifa Attafi.

La rubrique « recherche dans les archives » aura lieu lors de la séance de la rentrée (le mardi 10 mars).

Annexe – Statistique en 5^e
Guide d'AER de 3 trinômes

AER 1

Énoncé :
Paul qui dispose du fichier Excel ci-joint qui contient la liste des effectifs des villes de son département, affirme qu'il habite dans une ville moyenne car la moitié des habitants du département habite dans une ville plus petite que la sienne et l'autre moitié habite dans une ville plus grande que la sienne.
Dans quelle ville habite Paul ?

But : faire travailler sur du calcul d'effectifs et de fréquences.

Questions cruciales :

1) Quelle est la plus grande ville et la plus petite ville du département ?
But : amener les élèves à classer les villes par ordre croissant de population. (Possibilité de tracer le diagramme en bâtons)
On anticipe que les élèves visent la 100^e ville (ville médiane).
2) Combien d'habitants du département vivent dans une ville plus petite que Revest-des-brousses ?
But : calculer les effectifs cumulés.
3) Quel pourcentage de la population habite dans une ville plus petite que Revest-des-brousses ?
But : calculer les fréquences cumulées.
4) Quel pourcentage de la population habite dans une ville plus petite que celle de Paul ?

5) Marine la cousine de Paul habite dans une ville qui totalise 12% de la population du département. Dans quelle ville habite Marine ?
But : calculer la fréquence.

AER 2

Activité Le fichier Excel donne la liste de toutes les communes du département des Alpes de Haute Provence et leurs nombres d'habitants respectifs. Élaborer à partir de ces données, une réponse à la question suivante : quand on dit qu'une commune du département n'a pas beaucoup d'habitants, ça veut dire qu'elle en combien ?

On peut modifier le fichier Excel de manière à ne garder que les dénominations des villes et leurs nombre d'habitants.
On peut proposer cette activité à une classe de cinquième avec comme objectifs :
Calculer des effectifs.
Calculer des fréquences et les interpréter.
Entraînement à l'utilisation d'un tableur.

On peut imaginer les questions cruciales suivantes :

- Combien de communes ont moins de 50 habitants ? : Les élèves vont se rendre compte très rapidement que c'est assez difficile de les compter sans les trier par ordre croissant. On leur explique alors comment le faire.
- Même question pour les communes de moins de 100 habitants. Ici, on peut leur montrer comment utiliser le menu « trier » d'Excel.
- Alors ? Une commune qui a moins de 100 habitants, est-elle une petite commune ? Et s'il s'agissait de toutes les communes de la France ? : ici, l'objectif est de les amener à réfléchir en terme de pourcentage.
- Quel est le pourcentage des communes de moins de 50 habitants ? de moins de 100 habitants ? de moins de 150 habitants ? : on peut introduire ici la notion de fréquence si les élèves ne la connaissent pas encore.

  On décide ensemble avec les élèves la fréquence des communes « qui n'ont pas beaucoup d'habitants » dans le nombre total des communes du département. Ici on peut choisir un pourcentage différent de ceux trouver précédemment, de façon à ce qu'ils trouvent eux même le nombre des petites villes et le nombre d'habitants correspondant.

AER 3

L'Organisation Mathématique visée :
T_1 = calculer des effectifs ; T_2 = calculer des fréquences
Guide d'AER :

Q1 : Une grande ville c'est combien d'habitants ?

- En fonction des réponses données, on essaiera de dégager un consensus sur ce qu'est, pour les élèves une grande ville.
- Mettons que la réponse la mieux partagée est « 1000 habitants ». Ça reste une réponse intuitive, qui motive donc la question suivante :

Q2 : 1000 habitants est-ce que c'est une grande ville ?

- Mettre à disposition des élèves le fichier contenant les tableaux des populations des communes du 13 et du 04.
- Se mettre d'accord sur la façon de procéder pour répondre à Q2.
- Ce qui va probablement émerger :

➔ « On regarde par rapport à la plus grande ville »

A écarter en justifiant que regarder seulement la plus grande ville n'est pas représentatif du reste de la population.
Ou a conserver en disant oui c'est une bonne idée mais qui présente le défaut de ne pas être représentatif du reste de la population.

➔ « On regarde s'il y en a beaucoup qui font plus de 1000 habitants »

Demander à la classe comment faire à partir du tableur.
Technique qui devrait émerger :

- trier dans l'ordre décroissant (en ne se trompant pas dans la sélection de la plage et du critère de tri)
- compter les lignes dont la population est > à 1000 (pour aller plus vite : regarder le numéro des deux lignes extrêmes, faire la soustraction et ajouter 1)

A partir de là :

Q3 : calculer, pour la population de votre choix (13 ou 04), l'effectif de plus de 1000 habitants.

- Utilisation du vocabulaire sans doute délicat : ici la population étudiée c'est l'ensemble des communes (et non pas les habitants des communes) et l'effectif c'est le nombre de communes (et non pas le nombre d'habitants). Il faut pourtant l'utiliser puisque l'AER vise l'introduction des notions de fréquence et d'effectif.
- Résultats attendus : 26 communes pour le 04 et 107 communes pour le 13.

Alors, est-ce que c'est beaucoup, 26 ou 107 communes ?
S'il n'y a pas consensus parmi les élèves, tant mieux, ça permet de passer à Q4. S'il y a consensus, on est embêté, motiver Q4 en disant « sur quoi vous basez-vous pour estimer que c'est beaucoup ou pas beaucoup ? »

Q4 : calculer la fréquence des communes de plus de 1000 habitants.

- Technique à faire émerger :

- compter l'effectif total
- faire le rapport de l'effectif concerné sur l'effectif total
- convertir en pourcentage

- Réponse : 13 % pour le 04 et 90 % pour le 13.
  Là, c'est indubitable, la réponse à Q2 est « oui » pour le 04 et « non » pour le 13.
- Noter qu'on n'a toujours pas répondu à Q1. « Il n'y a pas de réponse absolue, ça dépend de la population étudiée ».

Bilan : pour cette étude, on a calculé des effectifs et des fréquences.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Séminaire de didactique des mathématiques
Résumés des séances

➔ Séance 17 : mardi 17 février 2009

Programme de la séance. 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. Forum des questions // 3. Évaluation et développement – La synthèse // 4. Évaluation et développement – Guide d'AER de Statistique

1. Problématique et fonctionnement du séminaire

1.1. On rappelle d'abord que cette séance sera suivie d'un TD pour les élèves-professeurs dont les noms suivent :

Alexandra Devilers ; Bruno Michel ; Christophe Coupard ; Baptiste Demoulin ; Olivier Dumont ; Elodie Maysou ; Marion Rubin ; Patrick Azra-Rabilloud ; Arnaud;Combes ; Samuel Der Monsessian ; Nicolas Chekroun ; Raphaël Rigaud ; Florian Van Becelaere ; Hélène;Pujol ; Souaad;Benhadi ; Yanna Pons ; Hamdoune Lazrek ; Renaud Cortinovis ; Matthieu Bruno ; Fanny Devaux ; Laurent Petit ; Latifa Attafi.

1.2. La séance de la rentrée, le mardi 10 mars 2009, aura une rubrique « Recherches dans les archives ».

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous apprennent les Archives sur la géométrie dans l'espace ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Le programme de seconde en géométrie (géométrie dans l'espace) demande en « capacités attendues » : « Manipuler, construire, représenter des solides ». Comment évaluer cette compétence ? Doit-on faire construire un solide en devoir surveillé ? (PAR, 15)
2. Que pourrais-je choisir comme question directrice pour le thème « Géométrie dans l'espace » ? exemple : pour le thème Nombres : « ces deux nombres sont-ils égaux ? » (NC, 8)
3. Comment donner du sens à la géométrie dans l'espace ? Quel type d'activité faut-il donner ? (AD,11)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Anne Martinet, Marion Rubin et Élodie Vadé

b) Une deuxième recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Les « cahiers d'AER » doivent-ils témoigner de tous les essais faits lors d'une recherche, y compris les essais inaboutis ? Sinon, quel partage envisager entre brouillon et cahier d'AER ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Comment adapter le dispositif AER aux 6^e qui ont une puissance de feu très faible, notamment au niveau des traces écrites ? (LP, 5) 2. Au cours d'une AER, est-il pertinent d'écrire au tableau une proposition fausse d'un élève pour rebondir avec la classe sur l'erreur, au risque d'entendre à plusieurs reprises « faut-il écrire cela ? » et du coup avoir ce problème à gérer, ou bien seulement dire les choses à l'oral ? (OD, 14)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Nicolas Mizoule, Raphaël Rigaud et Florian Van Becelaere

Les deux trinômes qui ont exposés les deux dernières recherches doivent présenter la manière dont ce travail a permis de modifier leurs praxéologies et les problèmes qui restent posés.

2. Forum des questions

AER pour les fractions en 5^e

Je n'ai pas d'idée d'AER pour entamer le chapitre « écritures fractionnaires » en cinquième. Comment les motiver ? (16, 5^e)

1. On reproduit ci-dessous le programme de la classe de 5^e concernant le thème des écritures fractionnaires.

Connaissances	**Capacités**	**Exemples d'activités, commentaires**	**Commentaires spécifiques pour le socle**
Dans les trois premières colonnes, une phrase ou une partie de phrase en italiques désigne une connaissance, une capacité ou une activité qui n'est pas exigible dans le socle. Si cette expression en italiques est précédée d'un astérisque, elle se rapporte à un exigible du socle dans une classe ultérieure.			

2.2. Nombres positifs en écriture fractionnaire : sens et calculs Sens de l'écriture fractionnaire	- Utiliser l'écriture fractionnaire comme expression d'une proportion. - Utiliser sur des exemples numériques des égalités du type $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.	La classe de Cinquième s'inscrit, pour le travail sur les écritures fractionnaires, dans un processus prévu sur toute la durée du collège. Au cycle 3, l'écriture fractionnaire a été introduite en relation avec la signification « partage » ($\frac{3}{5}$, c'est 3 fois $\frac{1}{5}$). En Sixième, la signification a été étendue : $\frac{3}{5}$ désigne le cinquième de 3 (*le nombre dont le produit par 5 est égal à 3*). En relation avec le travail sur la notion de fréquence, une nouvelle signification est introduite : $\frac{3}{5}$ exprime la relation entre une partie d'une population et la population totale (la proportion de filles dans le collège est de $\frac{3}{5}$). Un travail de mise en relation de ces différentes significations est conduit avec les élèves. L'égalité $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ fait l'objet d'une justification à l'aide d'un exemple générique.	Permettre à tout élève de comprendre que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a est un objectif à poursuivre pendant les quatre années du collège. Toutefois dans le cadre du socle il convient de valoriser encore des procédures personnelles reposant sur la vision fraction (sens premier de $\frac{2}{3}$: 2 tiers) . Il convient aussi d'éviter toute technicité gratuite et de se contenter de mobiliser de tels nombres dans des calculs que les élèves sont amenés à rencontrer lors de la résolution de problèmes de la vie courante. Les capacités travaillées dans le programme de Sixième « Multiplier un nombre entier ou décimal par un quotient de deux entiers sans effectuer une division » « Reconnaître dans des cas simples que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre », qui n'étaient pas exigibles, pour le socle, en fin de Sixième, le sont en Cinquième. Dans le traitement mathématique des problèmes de la vie courante, les fractions interviennent rarement en tant que nombre. L'utilisation des nombres décimaux est souvent suffisante et doit être privilégiée.

Connaissances	**Capacités**	**Exemples d'activités, commentaires**	**Commentaires spécifiques pour le socle**
Dans les trois premières colonnes, une phrase ou une partie de phrase en italiques désigne une connaissance, une capacité ou une activité qui n'est pas exigible dans le socle. Si cette expression en italiques est précédée d'un astérisque, elle se rapporte à un exigible du socle dans une classe ultérieure.			
**Comparaison*	*- *Comparer deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre.*	**En classe de Sixième, la simplification a été abordée et est donc utilisée en classe de Cinquième. C'est l'occasion d'envisager la notion de fraction irréductible, mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet.* *Différents cas peuvent être envisagés :* *- dénominateurs égaux* *- numérateurs égaux* *- dénominateurs et numérateurs différents dans des exemples simples (la généralisation est faite en classe de Quatrième).* *Différentes procédures sont mises en œuvre dans ce dernier cas :* *- comparaison à un même entier (exemple : comparer $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{4}$ à 1) ;* *- mise au même dénominateur (dans des cas accessibles par le calcul*	La capacité du programme de Sixième « Donner la valeur approchée décimale (par excès ou par défaut) d'un décimal à l'unité, au dixième, au centième près », qui n'était pas exigible pour le socle en Sixième, l'est en Cinquième.

		mental); *- calcul des quotients approchés.* *La systématisation de la réduction au même dénominateur est traitée en classe de Quatrième.*	
Addition et soustraction *Multiplication	- Additionner et soustraire deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes **et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre.* *- *Effectuer le produit de deux nombres écrits sous forme fractionnaire ou décimale, le cas d'entiers étant inclus.*	Dans le cadre de la résolution de problèmes, les élèves sont confrontés à des sommes de fractions du type $\frac{3}{4} + \frac{7}{6}$: pour les traiter, ils utilisent des procédures réfléchies (qui participent alors du problème à résoudre), mais l'objectif n'est pas d'aboutir à une règle de calcul. *Celle-ci sera établie en classe de Quatrième.* *Le travail porte à la fois sur les situations dont le traitement fait intervenir le produit de deux nombres en écritures fractionnaires (en relation avec différentes significations de ces écritures) et sur la justification du procédé de calcul.* *Exemples de calculs :* $\frac{7}{8} \times \frac{5}{3}$; $6 \times \frac{22}{7}$; $4{,}8 \times \frac{5}{11}$; $\frac{5{,}24}{2{,}1} \times \frac{2}{3}$ …	Des oralisations du type « 3 quarts plus 5 quarts » permettent d'effectuer directement des opérations sans mobiliser explicitement le statut de nombre.

2. Voici maintenant ce que contient le document d'accompagnement « le calcul numérique au collège » (pages 10-14).

La construction du sens des opérations et la justification des techniques de calcul sur les nombres écrits sous forme fractionnaire sont travaillées d'un double point de vue :

- en référence à la fraction définie à partir d'un partage de l'unité qui va aider à la construction d'images mentales. Mais cette conception de la fraction ne permet de légitimer les techniques que lorsque numérateur et dénominateur sont des entiers naturels ;
- en référence à la définition de la notion de quotient écrit sous forme fractionnaire. Cette seconde approche, complémentaire de la première, présente l'avantage d'étendre les techniques aux cas où numérateur et dénominateur ne sont plus des entiers naturels et de faire fonctionner la définition du quotient introduite en 6^e. Cette approche suppose que soit postulée l'extension des propriétés des opérations sur les entiers naturels à ces nouveaux nombres que sont les quotients.

3.2.1 L'addition

a) En référence aux longueurs

Une unité de longueur étant choisie, les fractions expriment des mesures de longueurs.

- En mettant bout à bout deux segments qui mesurent respectivement $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, on obtient un segment de longueur $\frac{a+b}{c}$. La verbalisation joue ici un rôle important. Par exemple, oraliser l'écriture $\frac{3}{7}+\frac{8}{7}$, « Trois septièmes plus huit septièmes », conduit naturellement à conclure que « c'est onze septièmes ».
- Dans le cas où les segments mesurent $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ avec $b \neq d$, on introduit une sous graduation de l'unité. Par exemple, pour obtenir la mesure du segment obtenu en mettant bout à bout deux segments de longueurs respectives $\frac{7}{6}$ et $\frac{3}{4}$, on partage régulièrement l'unité en un nombre de segments de même longueur qui est multiple de 6 et de 4, par exemple 12, on exprime alors chaque mesure en douzièmes de l'unité : $\frac{14}{12}$ et $\frac{9}{12}$, ce qui permet de se ramener au cas précédent.

b) En référence à la notion de quotient

- Lorsque les dénominateurs sont les mêmes

Posons $\frac{a}{c} = Q$ et $\frac{b}{c} = Q'$. Par définition du quotient de deux nombres :

Q est le nombre qui vérifie $c \times Q = a$ et Q' est le nombre qui vérifie $c \times Q' = b$.

On veut montrer que $Q + Q' = \frac{a+b}{c}$, c'est-à-dire, d'après la définition du quotient $\frac{a+b}{c}$, que $c \times (Q + Q') = a + b$. Or $c \times (Q + Q') = c \times Q + c \times Q'$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition). De $c \times Q = a$ et $c \times Q' = b$, on déduit immédiatement que $c \times (Q + Q') = a + b$.

- Lorsque les dénominateurs sont différents, on remplace les écritures fractionnaires par des écritures fractionnaires équivalentes ayant le même dénominateur.

En classe de 5^{e}, la technique de l'addition de deux nombres écrits sous forme fractionnaire de même dénominateur est construite sur des exemples numériques en référence à la fraction partage et à la mesure. La notion de quotient est sollicitée pour institutionnaliser la technique de l'addition à partir d'un exemple générique. En classe de 4^{e}, la technique de l'addition de deux nombres écrits sous forme fractionnaire de dénominateurs différents est construite de façon similaire en recourant, pour l'institutionnalisation, au calcul littéral ou à un exemple générique, selon la classe.

3.2.2 La multiplication

a) Prendre une fraction d'une quantité

Ce paragraphe est destiné au professeur, comme matériau pour élaborer certaines justifications auprès de ses élèves.

Trop souvent, cette question est abordée en posant a priori que, par exemple, « Prendre 7 tiers de 13 flopeks, c'est multiplier 13 flopeks par $\frac{7}{3}$ » ou encore que « Prendre 23 % de 470 € revient à effectuer 470 € × $\frac{23}{100}$ ». Ceci n'a pourtant rien de naturel aux yeux des élèves pour qui « prendre 7 tiers de 13 flopeks », c'est prendre sept fois le tiers de 13 flopeks, et n'évoque donc pas, à juste titre, le calcul $\frac{7}{3} \times 13$.

En effet, prendre 7 tiers de 13 flopeks, c'est prendre 7 fois le tiers de 13 flopeks.

Le tiers de 13, c'est le quotient de 13 par 3 qui est égal à 13 tiers (la justification que le tiers de 13 est égal à 13 fois un tiers est apportée dans le document « Les nombres au collège »).

Donc 7 tiers de 13 flopeks, c'est 7 fois 13 tiers de flopeks ou encore (7 × 13) tiers de flopeks.

Il est ainsi prouvé que « prendre 7 tiers de 13 » revient à effectuer $\frac{7 \times 13}{3}$. Dans le même temps, ce qui précède montre que dans le cadre des grandeurs, « Prendre 7 tiers de 13 » est associé au produit de 7 et de $\frac{13}{3}$, et non au produit de 13 et de $\frac{7}{3}$.

De cet exemple générique, on peut dégager que pour « prendre $\frac{b}{c}$ de a unités », on est amené à effectuer $\frac{a \times b}{c}$ pour tous les nombres entiers a, b et c, pourvu que c soit non nul.

b) Produit d'un décimal par un quotient de deux entiers, de deux décimaux

Ce paragraphe est destiné au professeur, comme matériau pour élaborer certaines justifications auprès de ses élèves.
En classe de 6e, le cas de la multiplication d'un entier naturel par un quotient de deux entiers peut alors être traité en recourant au sens premier de la multiplication, celui d'une addition itérée. 6 fois 5 septièmes est égal à 30 septièmes : $6 \times \frac{5}{7} = \frac{6 \times 5}{7}$.

Ce raisonnement ne tient plus quand on multiplie un décimal non entier par un quotient de deux entiers.

Pour déterminer le produit de 1,7 par $\frac{5}{7}$, multiplions-le par 7 :

$(1,7 \times \frac{5}{7}) \times 7$ est égal à $1,7 \times (\frac{5}{7} \times 7)$ qui est lui-même égal à $1,7 \times 5$.

Le produit recherché, multiplié par 7, est égal à $1,7 \times 5$: par définition d'un quotient, ce nombre est donc le quotient de $1,7 \times 5$ par 7.
Et donc $1,7 \times \frac{5}{7} = \frac{1,7 \times 5}{7}$.

Cet exemple étant générique, on en déduit que a étant un décimal, b et c deux entiers avec c non nul : $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$
La démonstration précédente montre, en toute rigueur, que si la multiplication demeure associative avec ces « nouveaux » nombres, alors le produit d'un nombre décimal par un quotient d'entiers est nécessairement défini ainsi.
En classe de 5e, cette égalité se généralise au cas où les trois nombres sont décimaux. En utilisant le fait qu'on ne change pas un quotient quand on multiplie numérateur et dénominateur par un même nombre, le produit d'un décimal par un quotient de deux décimaux peut être ramené au cas du produit d'un décimal par un quotient de deux entiers.

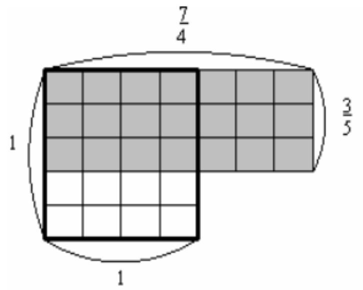
Nous avons vu précédemment que « Prendre $\frac{b}{c}$ de a » conduit à effectuer $\frac{a \times b}{c}$ et maintenant que $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$. La technique évoquée plus haut et qui consiste à multiplier a par $\frac{b}{c}$ pour « prendre $\frac{b}{c}$ de a » est ainsi légitimée.

c) Produit de deux quotients

En référence aux aires

Cette démarche suppose d'admettre l'extension de la formule donnant l'aire d'un rectangle ($L \times \ell$) à des mesures non entières.

En prenant pour unité de longueur la longueur du côté du carré et pour unité d'aire l'aire de ce carré, soit à calculer la mesure de l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont $\frac{7}{4}$ et $\frac{3}{5}$.



Le carré est découpé en 4 × 5 rectangles identiques. Le rectangle dont on cherche à évaluer l'aire contient 7 × 3 de ces rectangles, son aire représente donc $\frac{7 \times 3}{4 \times 5}$ de l'aire du carré. Et donc l'aire du rectangle peut être exprimée de deux façons, ce qui conduit à l'égalité : $\frac{7}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{4 \times 5}$

- **En référence à la notion de quotient**

Posons $\frac{a}{b} = Q$ et $\frac{c}{d} = Q'$ avec b et d deux entiers ou décimaux non nuls. Nous nous proposons de prouver que $Q \times Q' = \frac{a \times c}{b \times d}$, ce qui revient à prouver que $(Q \times Q') \times (b \times d) = a \times c$.

Or : $(Q \times Q') \times (b \times d) = (Q \times b) \times (Q' \times d)$

Et, d'autre part, par définition du quotient de deux nombres, Q vérifie $b \times Q = a$ et Q' vérifie $d \times Q' = c$.

Donc $(Q \times Q') \times (b \times d) = a \times c$

Nous avons ainsi démontré que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

La mise en place en classe de 5^{e} des règles de calcul d'un produit de deux nombres écrits sous forme fractionnaire ne saurait se limiter à la preuve sur des aires. La preuve ci-dessus qui s'appuie sur la notion de quotient est accessible à des élèves de ce niveau, soit en recourant au calcul littéral, soit à un exemple générique, selon la classe.

La multiplication d'un nombre par un nombre en écriture fractionnaire a toute son utilité dans les problèmes de détermination d'une « quatrième proportionnelle », et ceci dès la classe de 6^{e}. Par exemple, si 7 kg d'une denrée coûtent 15,47 €, quel est le prix de 12 kg de cette même denrée ?

	Quantité	Prix	
$\times \frac{12}{7}$	7 kg	15,47 €	$\times \frac{12}{7}$
	12 kg	?	

$\times \frac{15,47}{7}$ €/kg

Qu'on utilise la propriété multiplicative de linéarité ou le coefficient de proportionnalité, on opère alors sur des grandeurs, mais la nature du quotient diffère :

- $12 \text{ kg} = \frac{12}{7} \times 7$ kg donc le prix de 12 kg est égal à $\frac{12}{7} \times 15{,}47$ €.

  Le quotient $\frac{12}{7}$ est un scalaire : 12 kg, c'est $\frac{12}{7}$ fois 7 kg
- $15{,}47$ € $= \frac{15{,}47}{7}$ €/kg $\times$ 7 kg $= 2{,}21$ €/kg $\times$ 7 kg donc le prix de 12 kg est égal à

  2,21 €/kg $\times$ 12 kg. Le quotient $\frac{15{,}47}{7}$ est ici une grandeur quotient : des € par kg.

3.2.3 La division

Il a été mis en évidence que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, avec a et b entiers en classe de 6^e et a et b décimaux en classe de 5^e, ce qui s'énonce de la façon suivante : $\frac{a}{b}$, quotient de a par b, est égal au produit de a par $\frac{1}{b}$.

En classe de 4^e, l'inverse d'un nombre est défini comme étant le quotient de 1 par ce nombre.

Ainsi par définition, $\frac{1}{\frac{a}{b}}$ (avec a et b entiers ou décimaux non nuls) est la solution de $\frac{a}{b} \times x = 1$.

Or $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$, ce qui permet de déduire que $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$.

Cherchons s'il existe un nombre qui soit le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, c'est-à-dire qui soit solution de $\frac{c}{d} \times x = \frac{a}{b}$.

Supposons que ce nombre existe. Il en résulte en multipliant les deux membres de l'égalité par d puis par b que : $c \times x = \frac{a}{b} \times d$, puis que : $b \times c \times x = a \times d$

Les nombres b et c étant non nuls, il en est de même de $b \times c$.
x apparaît comme étant le quotient de $a \times d$ par $b \times c$.

Ainsi, si un tel nombre existe, il ne peut qu'être égal à $\frac{a \times d}{b \times c}$.

Il reste à montrer que ce quotient convient :

$$\frac{c}{d} \times \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{c \times a \times d}{d \times b \times c} = \frac{a}{b}$$

Le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ est égal à $\frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}}$.

Il en résulte que diviser par un nombre, c'est multiplier son inverse.

On obtient ainsi une esquisse de l'OM à mettre en place, notamment du point de vue technologico-théorique, ainsi que des idées à propos de sa mise en place.

L'idée principale de la motivation du travail sur les rationnels (positifs) est constituée par la mesure des grandeurs. C'est en effet d'abord de là que surgit le besoin de ces nouveaux nombres.

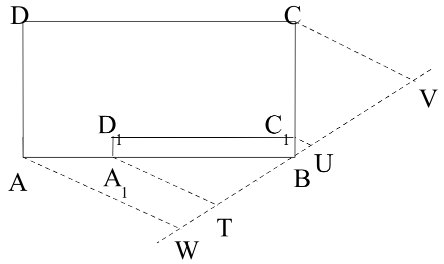
J'ai un tasseau de bois dont la longueur est 2 mètres. Je le coupe en 3 morceaux égaux : quelle est la longueur de chaque morceau ?

À cette question, le programme de 6^e^ permet de répondre que la mesure de la longueur en mètres sera donnée par « le nombre qui multiplié par 3 donne 2 », nombre que l'on notera $\frac{2}{3}$.

En 5^e^, il s'agit pour l'essentiel de travailler autour de la comparaison de tels nombres, et donc de la comparaison de mesures de grandeurs ; puis de l'addition et de la soustraction lorsque ces nombres ont le même dénominateur et des dénominateurs multiples l'un de l'autre, et donc l'addition et de la soustraction de mesures de grandeurs ; et enfin de la multiplication, et donc de l'obtention de mesure de grandeur produit ou de la multiplication d'une grandeur par un scalaire.

C'est donc la comparaison et la détermination de la mesure de grandeurs qui est au cœur de la motivation du travail à effectuer : on peut alors avoir avantage à se placer dans le cadre d'un PER « mesurer des grandeurs » pour unifier le travail sur les nombres positifs mené au collège. On donnera ci-dessous deux exemples de situations qui s'insèrent dans le PER évoqué, qu'il faudra, bien entendu, problématiser.

Considérons un segment [AB] de longueur 2 et un segment [BC] de longueur 1 (par rapport à une certaine unité de longueur u), avec (AB) $\perp$ (BC). Considérons ensuite des sous-segments [A_1B] et [BC_1] respectivement de longueur $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{7}$ (voir ci-après).



Le rectangle ABCD a une aire de mesure $2 \times 1 = 2$ par rapport à l'unité u^2. Quelle est la mesure de l'aire du rectangle $A_1BC_1D_1$? Soit a la mesure de la moitié de l'aire du rectangle $A_1BC_1D_1$: on ignore à ce stade si a est un nombre fractionnaire ou un nouveau nombre, d'un type encore inconnu. D'après le principe d'additivité de la « théorie » naïve des aires acceptée dans l'institution collège, on a (avec des notations évidentes)

$$\mathcal{A}(A_1BC_1D_1) = 2a \ ; \ \mathcal{A}(ABCD) = (3a) \times 7 = 21a.$$

Comme $\mathcal{A}(ABCD) = 2$, il vient $21a = 2$, égalité qui montre que a est un nombre fractionnaire et est égal à $\frac{2}{21}$. En supposant, comme l'indique le document d'accompagnement du programme, que la formule des aires se prolonge quand les dimensions sont fractionnaires, l'aire du rectangle s'exprime également sous la forme du produit $\frac{2}{3} \times \frac{1}{7}$ et on a obtenu que $\frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$.

On a fabriqué des cadres de forme triangulaire en coupant trois baguettes de décoration de longueur 5, 4 et 2 mètres en trois morceaux d'égale longueur et en prenant un morceau de chacune des baguettes. On veut décorer chaque cadre obtenu avec une guirlande lumineuse. De quelle longueur doit être le morceau de guirlande prévu pour chaque cadre ?

Les trois côtés du triangle ont pour longueur $\frac{5}{3}$m, $\frac{4}{3}$ m et $\frac{2}{3}$ m. Son périmètre sera donc $\frac{5}{3}$m + $\frac{4}{3}$ m + $\frac{2}{3}$ m. chaque triangle a le même périmètre, p, et on a $3p$ = 5 m + 4 m +2 m = 11 m. Le périmètre p est donc égal à $\frac{11}{3}$ m, et il faudra prévoir des guirlandes de longueur $\frac{11}{3}$ m (ce qui risque d'être difficile à trouver dans le commerce...).

Reformuler les propositions des élèves

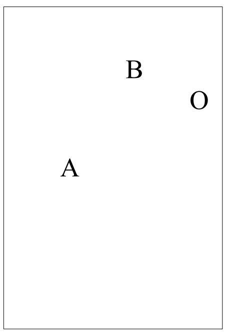
En troisième j'ai fait une AER en trigonométrie et au moment des conjectures ils ont eu de bonnes idées mais ils n'ont pas su bien le rédiger ; j'ai dû intervenir pour dicter une phrase à partir de ce qu'ils m'ont dit. Est-ce que j'ai le « droit » ? (16, 6e & 3e)

Il peut être légitime de reformuler les propositions des élèves quand ils n'arrivent pas à le faire pour gagner un peu de temps et surtout ne pas perdre la dynamique du travail en cours d'élaboration. Il ne faut cependant pas être d'une exigence trop grande quant à la formulation dans certains moments de l'étude, comme par exemple le moment exploratoire, et dans les traces écrites relatives à ce moment on peut accepter des formulations approximatives. Par exemple, dans l'étude du compte rendu sur les programmes de calculs, nous avons vu que le type de tâches qui émerge, c'est « compresser un programme de calcul » ; cette formulation aurait pu être notée dans les traces écrites relatives à l'AER, le travail de synthèse amenant à mettre en place la formulation mathématiquement correcte.

Définir le parallélogramme en 5e

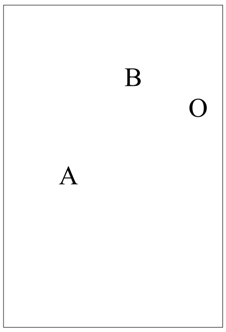
Il me semble, d'un point de vue didactique, plus judicieux de définir le parallélogramme comme un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles, que comme un quadrilatère ayant un centre de symétrie. Qu'en pensez-vous ? (16, 5e)

Il me semble que l'on peut difficilement parler de l'une des propriétés (quadrilatère à côtés opposés parallèles) sans parler de l'autre (quadrilatère ayant un centre de symétrie) dès lors que l'on veut avoir une organisation de l'étude constructive, c'est-à-dire qui ne choisit pas de poser la définition d'emblée, et que l'on a étudié la symétrie centrale au préalable – ce qui, nous l'avions vu, est suggéré par le programme.
Si l'on se place ainsi dans le PER dont nous avons parlé au début de l'année, on peut imaginer partir de la situation suivante :



dans laquelle il s’agit de construire les côtés visibles du quadrilatère ABCD obtenu en prenant pour C le symétrique de A par rapport à O et pour D le symétrique de B par rapport à O.

Le fait que la configuration obtenue a ses côtés opposés parallèles est alors pertinent (voir figure ci-dessous) et on pourra dire que ce type de configuration est un parallélogramme (définition).

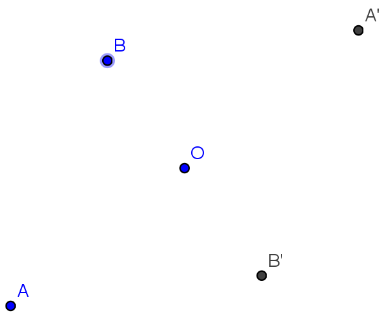


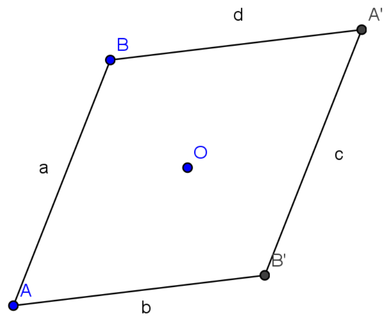
À cet égard, on voit que devra émerger également le fait qu’un quadrilatère construit comme on l’a fait par symétrie centrale à partir de deux points est un parallélogramme, ce qui conduira à se poser la question de la caractérisation d’un parallélogramme par cette propriété.

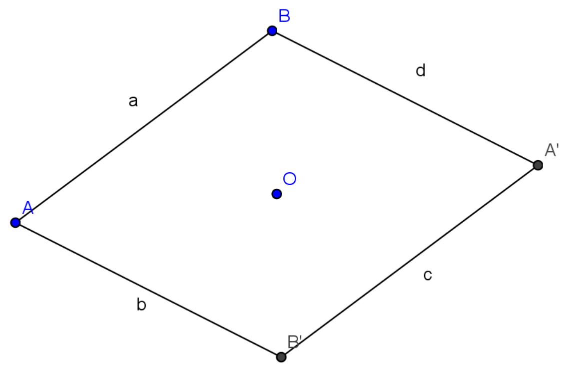
Faire émerger une OM avec les TICE

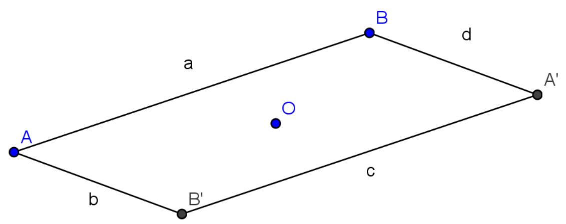
1. Est-ce qu'une simple exploration sur un logiciel de géométrie dynamique peut suffire pour introduire une propriété ? (16, 4^e)
2. Dans le chapitre concernant le cercle circonscrit et le triangle rectangle en 4^e, je voulais introduire une AER représentant une situation de la vie courante (couvrir des jeux de forme triangulaire dans une fête foraine). On modéliserait alors cette situation à l'aide de l'outil géométrique (geogebra ou geoplan).
Est-ce qu'on doit attendre des élèves qu'ils pensent à cette modélisation à l'aide des TICE ou doit-on la leur imposer ? (16, 4^e)

Ce n’est pas la propriété qu’on introduit mais l’OM dont cette propriété fait partie. Il faut donc au moins l’introduire à partir d’un type de tâches pour lequel cette propriété est l’ingrédient technologique essentiel. À partir de là, il faut prévoir au moins un dispositif qui permette aux élèves de réaliser le moment exploratoire de façon à ce que la propriété émerge et puisse être mise à l’épreuve et validée expérimentalement. C’est là qu’un logiciel de géométrie dynamique peut s’avérer utile pour explorer la configuration et mettre à l’épreuve ses propriétés. Par exemple, dans la situation décrite précédemment, si l’on suppose que les élèves ont d’abord construit une configuration du type précédent rentrant dans la feuille et ont cru y voir que les côtés opposés étaient parallèles, la figure réalisée sur un logiciel de géométrie dynamique permet de mettre à l’épreuve cette assertion.









2. « Normalement », en 4[e], le type de travail évoqué par la deuxième question doit être routinier pour les élèves, et le recours au logiciel de géométrie dynamique aussi naturel que le recours à la calculatrice dans les activités numériques. Si cela n'est pas le cas, on « imposera » le recours au logiciel de géométrie dynamique tout en systématisant son emploi de façon à ce que cela s'intègre dans les praxéologies didactiques et que le recours aux TICE se routinise.

3. Évaluation et développement - La synthèse

On examinera ci-dessous une synthèse qui s'est déroulée dans une classe de seconde à la fin du mois de janvier. Cette synthèse est relative à un thème que le professeur a intitulé « Vecteurs et équations de droites ». Le travail sur les vecteurs et les repères dans le plan a déjà eu lieu et a donné lieu à une synthèse. Il s'agit là donc de synthétiser le travail mené sur les équations de droites. P est parti de la poursuite d'une AER faite à propos des vecteurs, où il s'agissait de « caractériser l'alignement de points dont on connaît les coordonnées ». Une des « techniques proposée » était la suivante :

A (7 ; 3)	$7 = 3 \times 2 + 1$	
B (13 ; 6)	$13 = 6 \times 2 + 1$	
C (28 ; 14)	$28 = 14 \times 2 + 0 \neq 14 \times 2 + 1$	A, B, D et E alignés ;
D (17 ; 8)	$17 = 8 \times 2 + 1$	C non alignés avec les autres.
E (25 ; 12)	$25 = 12 \times 2 + 1$	

Et il s'agissait alors « d'éprouver cette technique sur les autres points de l'AER ». C'est cela qui a permis de faire émerger les équations de droites. Dans la première partie de la séance, la classe a travaillé sur le problème suivant : Quelle relation existe-t-il entre A(0; 2), B(2; 5) et M(x, y) pour que les points A, B et M soient alignés ? C'est à l'issue de cette étude que survient la synthèse.

Pour faciliter le commentaire, nous scinderons la synthèse en épisodes. Voici le premier.

L'enregistrement démarre environ un quart d'heure après le début de la séance.

- (P) Bon, ça a l'air de marcher... Donc... C'est bon ?... Ke, t'es enregistré, là... Alors, on va faire le « grand 3 »... Qu'est-ce qu'on va y mettre dans ce « grand 3 » ? Qu'est-ce qu'on a vu entre samedi et aujourd'hui ? Et le bilan qu'on a fait aujourd'hui ?
- (élève) Début samedi ou fin samedi ? Parce qu'il s'est passé des trucs entre le début et la fin.
- (P) C'est vrai. Mais qu'est-ce que t'as retenu ?
- (élève) Qu'il y avait une relation entre x et y pour trouver quand c'était colinéaire, euh, alignés.

- (P) Quand les points étaient alignés, d'accord.
- (élève) Cette formule que Ni avait donnée...
- (P) Ensuite, qu'est-ce qu'on a vu d'autre ?
- (élève) La colinéarité on l'avait vue avant, non ?
- (P) Oui, la colinéarité on l'avait vue avant.
- (élève) Donc, on peut pas le dire.
- (élève) Euh, l'alignement des... enfin deux droites parallèles... quand on a fait l'exercice.
- (P) Ça c'était la correction de samedi, oui.
- (élève) Ah ben, c'était samedi, hein.
- (P) C'est vrai... On a vu les équations de droites. Les équations de droites, elles sont de quelle forme ?
- (élève) $y = ax + b$.
- (P) OK. En tout cas, on l'a observé sur un cas. Est-ce qu'il y a que celle-là ? Est-ce qu'il y a que la forme $y = ax + b$?
- (élève) Non.
- (P) Non ?
- (élève) $x = a$ ou b.
- (élève) Ou n.
- (P) x égale un nombre, une constante. Me ?
- (Me) $y = ax$.
- (P) C'est possible aussi ça. Mais en fait, c'est la même forme que $ax + b$. Quand on a $y = ax$, c'est que b est égal à ?
- (élève) Zéro. C'est que ça passe par l'origine.
- (P) A zéro. D'accord ? On en a vu une aussi... y est égal à 12, mais ça c'est quoi qui est égal à 0 ? Dans ce cas-là ?... C'est petit a. Donc « grand 3 », équation de droites... Comment ?
- (élève) En fait, on l'a pas vue venir la fonction.
- (P) J'ai pas encore prononcé le mot « fonction ».
- (élève) Ah oui, mais ça va pas tarder, là, il y a le coefficient directeur...
P note le titre au tableau.
- (élève) Normalement... On sait jamais si il y a un « s » à droite ou pas.
- (élève) Y en a pas.
- (P) Ah bon ?
- (élève) On avait un prof qui était très sévère sur l'orthographe.
- (élève) En fait, ça dépend des professeurs parce qu'il y en a qui comptent juste.
- (P) Alors, « Propriétés »... Alors, comment on va dire ça ? Cette propriété où on va présenter les équations de droites. Comment le rédiger ?
- (élève) A, B et C sont alignés si...
- (P) Non, équation de droites. On va uniquement travailler avec deux points peut-être...
- (élève) Avec deux points ?
- (P) Ou même pas. D'après vous, qu'est-ce qu'on peut dire sur les équations de droites. On va dire quoi ? Qu'est-ce qui est important ? Qu'est-ce qu'on a retenu ?
- (élève) Il y a plusieurs formes.
- (P) Oui, il peut y avoir plusieurs formes. Et les deux formes que tu as retenu, c'est ?
- (élève) x égale constante et $y = ax + b$.
- (P) Allez, ok. (*P dicte et note au tableau*) Dans un repère, toute droite Δ du plan admet une équation de la forme, première possibilité $x = c$, une constante... Alors, et ça, ces droites-là, elles sont comment ?
- (élève) Parallèles.
- (P) Parallèles avec l'axe des ordonnées. (*P reprend la dictée*) ...si Δ est parallèle à l'axe des ordonnés. Et l'autre, c'est y... L'autre forme, c'est $y = ax + b$, avec bien sûr des constantes qui sont des nombres fixés. Et là, c'est dans quels cas ?

- (élève) Les droites sécantes à l'axe des ordonnées.
- (P) Très bien. (*P reprend la dictée*) ...si Δ est sécante à l'axe des ordonnées.
- (élève) C'est a qui dit où elle coupe après... ?
- (élève) Non, c'est b, raté !
- (élève) C'est a ou b ?
- (P) C'est une bonne question, tiens.
- (élève) C'est b !
- (P) Et pourquoi c'est b ? Pourquoi ça serait a ?
- (élève) Je sais pas, je demande.
- (élève) C'est l'ordonnée à l'origine.
- (P) L'ordonnée à l'origine. Et pourquoi ça ? On n'en a pas parlé...
- (élève) Non, c'est pour ça que je pose la question.
- (P) Vous l'avez vu l'année dernière ou...
- (élève) Oui, mais c'est loin.

- (P) Bon alors... Je vous donne une définition, c'est que cette équation de droite, que ce soit l'une ou l'autre, on l'appelle l'équation réduite de la droite Δ. (*P dicte et note au tableau*) Cette équation est appelée l'équation réduite de la droite Δ. Première définition. Est-ce que vous savez comment on appelle le petit a ?
- (élève) Le coefficient directeur.
- (P) Le coefficient directeur. (*P dicte*) Petit a est le coefficient directeur et petit b est l'ordonnée à l'origine. C'est ça ?
- (élève) Oui.

Commentaires **–** On voit P procéder en questionnant les élèves sur ce qui a été vu précédemment, et piloter le travail de façon à ce que la classe ne s'enlise pas. Par exemple, au début, les élèves se rappellent la relation entre x et y donnée par l'un de leurs camarades, sans identifier les équations de droites et c'est P qui les nomme, avant de reprendre le questionnement, qui devient à ce moment-là plus productif. On notera que l'on a là un effet d'une synthèse qui arrive un peu tôt, les élèves n'ayant pas encore tout à fait identifié la praxéologie enjeu de l'étude. Ce sont les élèves qui apportent l'essentiel du matériel qui va figurer dans la synthèse, même si P empiète sur leur *topos* en le mettant en forme de manière un peu directive. Il aurait sans doute pu noter les éléments pertinents au tableau (ce qu'il fait sans doute, même si on ne le décèle pas à l'enregistrement) et faire formuler les propriétés aux élèves, avant éventuellement de corriger leur formulation.

On notera que l'atmosphère de la classe semble sereine, avec des élèves au travail et participant volontiers à l'élaboration collective – signe que ce type de travail est routinier pour la classe.

Épisode 2

- (P) Bon alors... Je vous donne une définition, c'est que cette équation de droite, que ce soit l'une ou l'autre, on l'appelle l'équation réduite de la droite Δ. (*P dicte et note au tableau*) Cette équation est appelée l'équation réduite de la droite Δ. Première définition. Est-ce que vous savez comment on appelle le petit a ?
- (élève) Le coefficient directeur.
- (P) Le coefficient directeur. (*P dicte*) Petit a est le coefficient directeur et petit b est l'ordonnée à l'origine. C'est ça ?
- (élève) Oui.

- (P) Il faudra que je vérifie le programme de 3[e], mais je suis surpris, là, vous en savez plus que... vous êtes censé savoir...
- (élève) Censé !...
- (élève) Mais y a des choses qu'on devrait savoir et qu'on connaît pas...
- (élève) Y a un équilibre.
- (P) Faut bien compenser...
- (Rires)
- (P) Et vous l'avez démontré l'année dernière ? Est-ce que vous avez fait la démonstration l'année dernière ?
- (élève) Ah ça, on sait pas !
- (élève) Non.
- (P) Allez, démonstration, alors... Ce qu'on a fait sur un exemple, on va le faire dans le cas général. On va prendre deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Eux, c'est des points qui sont fixés, d'accord ? Et M de coordonnées (x, y). Lui, c'est un point dont on veut qu'il soit aligné avec A et B de façon à ce que ce soit... que ça décrive une droite. Qu'est-ce qu'on a fait tout à l'heure ? Pour l'exemple ? (*10 minutes*)
- (élève) Le vecteur.
- (P) Oui. Donc on a calculé quoi comme vecteur ? On a calculé les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$. Alors, $\vec{AB}$, quelles sont ses coordonnées ?... Attention, tout est enregistré... J'ai pas entendu... Voilà : $(x_B - x_A, y_B - y_A)$... Et $\vec{AM}$, ses coordonnées ça va être quoi ?...(*P reprend ce que lui dicte une élève*) $(x - x_A, y - y_A)$...
Après un temps durant lequel les élèves notent, P reprend :

Commentaires – Le travail se poursuit dans un dialogue entre P et la classe. On peut noter que les notions de coefficient directeur et d'ordonnée à l'origine apparaissent un peu prématurément, poussées par les interventions des élèves, sans que le travail effectué précédemment n'ait semble-t-il construit du sens pour ces deux notions. P engage la classe dans la démonstration et c'est lui qui effectue la première étape : choix des points A et B, fixés, et M, variable. Il fait ensuite appel à ce qui vient d'être fait sur un exemple, et qui constitue en quelque sorte un cas particulier du travail démonstratif. Les élèves retrouvent donc du *topos* en cette fin d'épisode.

Épisode 3

- (P) Je suis pas sûr d'avoir été clair. On est en train de chercher quoi, là ? A faire quoi ?... Me ?
- (Me) D'écrire que les points sont alignés sur une droite.
- (P) Oui, d'accord. De façon à obtenir quoi à la fin ?... L'équation de la droite (AB), d'accord ? Donc, on va écrire que M appartient à la droite (AB) si et seulement si ?
- (élève) Si et seulement si...
- (élève) $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.
- (P) Voilà, si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires. C'est-à-dire, M appartient à (AB), c'est pareil de dire que A, B et M sont alignés, hein ? Y aucun souci.
- (élève) C'est qu'il est sur la droite.
- (P) (*en notant au tableau*) $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires.
- (élève) On n'écrit pas $x_{\vec{AB}}$ fois $y_{\vec{AM}}$...
- (P) Exactement. Si et seulement si... Alors, la condition, vous commencez à la connaître... (*sous la dictée d'un élève*) $x_{\vec{AB}}$ fois $y_{\vec{AM}}$ est égal à $x_{\vec{AM}}$ fois $y_{\vec{AB}}$. Je remplace par ce que j'ai trouvé. $x_{\vec{AB}}$ c'est quoi ?
- (élève) $x_{\vec{AB}}$ c'est, euh..., $x_B - x_A$.
P poursuit le calcul sous la dictée des élèves : $(x_B - x_A)(y - y_A) = (x - x_A)(y_B - y_A)$.

- (élève) Pourquoi on a laissé x... Pourquoi on met pas x_M ?
- (P) Non mais, c'est simple la réponse. Pourquoi pour A et B j'ai mis x_A, y_A et x_B, y_B et pour M j'ai mis x et y ?
- (élève) Ah, parce que c'est le milieu, non ?
- (P) Non.
- (élève) C'est le résultat de...
- (P) C'est quoi la différence entre A, B et M, dans cette démonstration ?
- (élève) (AB) c'est une droite.
- (élève) A c'est un point défini...
- (P) Fixé, oui...
- (élève) Et M c'est tout point de la droite.
- (P) Voilà, c'est n'importe quel point de la droite. D'accord ?
- (élève) Ah, d'accord ! On généralise.
- (P) En fait, l'énoncé il nous donne... Nous quand on aura à déterminer l'équation d'une droite pour x_A et y_A on aura des valeurs. D'accord ? Pareil pour x_B et y_B puisque ce sont des points fixés. Par contre, on dira je prends un point M qui appartient à cette droite et j'écris des choses avec lui et le point M, il sera de coordonnées (x, y)... J'ai presque envie de dire que le point M il est mobile.
- (élève) Parce que c'est pas expérimental, c'est théorique.
- (P) Ah oui, là, on est dans le théorique. L'expérimental, on l'a bouclé samedi. Donc... Et maintenant, qu'est-ce qu'on sait faire quand on a ce genre de choses ?
- (élève) On développe.

Commentaires – P précise à nouveau la situation, de manière à ce que le type de tâches antérieurement travaillé « Montrer que 3 points sont alignés » soit clairement identifié, puis apparaît le fait que pour cela, on montre que les vecteurs sont colinéaires ce qui suppose que l'on écrive que la condition etc. On voit le travail effectué précédemment porter ses fruits et les élèves (du moins certains) investir le *topos* qui leur est offert. On notera surtout que la différence entre ce qui est de l'ordre de l'expérimental et de celui du théorique vit dans la classe, sert de justification aux notations de la démonstration et permet à un élève au moins de comprendre où se situe l'enjeu du travail mené.

Épisode 4

- (P) On développe... Qui c'est qui le développe ? Vous savez le faire ça... Allez !

Sous la dictée d'un élève, aidée par d'autres lorsqu'il se trompe, le développement est réalisé, non sans mal : $x_B y - x_A y - x_B y_A + x_A y_A = xy_B - x_A y_B - xy_A + x_A y_A$
- (P) Je vais faire le calcul et je vais vous montrer qu'on arrive aux formes qu'on a voulu, d'accord ? Vous savez faire les calculs. Sauf que vous les calculs vous aurez à les faire comme tout à l'heure, c'est-à-dire dans le cas où on aura des valeurs. C'est un peu plus facile. Alors, regardez. Là, je vais factoriser y. Alors ça fait $(x_B - x_A)$ facteur de y. Ça, je le garde ensemble...
- (élève) y_A, on peut pas le factoriser ?
- (P) Bien sûr qu'on peut le factoriser Ni, mais moi ce que je cherche à obtenir c'est cette forme-là ou celle-là. Donc, ce qui m'intéresse c'est d'isoler le y. Ce qui est intéressant de factoriser, c'est le y et le x. Le reste, ça va pas nous apporter grand'chose, d'accord ? Donc ça fait $-x_B y_A + x_A y_A$ égale... Là, je factorise par contre, le x. Alors le x pour le factoriser, j'ai quoi ? Là j'ai y_B et là j'ai y_A. Donc, ça fait $y_B - y_A$ facteur de x moins $x_A y_B$ plus $x_A y_A$. Ça, je peux le transposer en additionnant des deux côtés de l'égalité... (20 minutes)
- (élève) On le factorise pas le x_A et le...

- (P) Attendez, j'ai un problème de signe... Là, c'est un moins...
- (élève) On le factorise pas le x_A.
- (P) Non, c'est pas la peine. Attendez... Non, non, y a un souci là...
- (élève) On recommence...
- (P) Hop, hop hop, on se tait...

Le professeur réfléchit un long moment tandis que les élèves essaient de trouver l'erreur.
- (P) On a une erreur de signe et j'arrive pas à la voir.
- (élève) C'est pas à la deuxième ligne ?
- (élève) Non, c'est $x_A\ y_A$, normalement il est moins, après $x_B\ y_A$ plus $x_A\ y_A$ puisqu'il fait partie de l'autre côté...
- (élève) Quelle ligne ?
- (élève) A la deuxième. C'est pas la première partie, c'est la deuxième, quand on a factorisé.
- (P) Oui, oui, mais j'arrive pas à...
- (élève) Mais c'est pas au tout début quand il y a Fl qui a fait son calcul... Faudrait pas qu'il le refasse, mais dans l'ordre ?
- (élève) C'est pas Florian, c'est la deuxième partie.
- (élève) M'sieur, pourquoi on le refait pas dans l'ordre ?
- (élève) Pourquoi on recommencerait pas tout depuis le début ?

Le bruit augmente et la classe s'agite un peu.
- (P) Allez, s'il vous plaît... Je vais faire autrement en fait... On va faire comme ça.

Commentaires **–** Les élèves réalisent le développement et P se charge de la factorisation : la tâche continue à être coopérative. Les élèves développent sans anticiper le résultat qu'il s'agit de produire, ce que P laisse faire, et il se trouve à avoir à factoriser à nouveau l'expression, travail qu'il effectue pour obtenir l'expression $y\,(x_B - x_A) - x_B\,y_A + x_A\,y_A = x\,(y_B - y_A) - x_A\,y_B + x_A\,y_A$, où il croit déceler une erreur de signe [ce qui n'est pas le cas]. Après un moment de flottement, devant l'agitation de la classe, il prend la décision de changer de stratégie. On notera que la classe s'agite pour coopérer mais que, si le temps de flottement s'était prolongé, il y aurait eu un risque de dérapage.

P aurait pu choisir de vérifier le calcul effectué de plusieurs façons : avec un logiciel de calcul formel (la classe est équipée de casio classpad) ; en donnant des valeurs aux coordonnées de A et B et en calculant les deux expressions pour vérifier si elles étaient égales.

Il aurait pu également piloter davantage le développement par questions cruciales : par exemple, que veut-on obtenir ? Comment peut-on développer l'expression pour cela ? Etc.

Épisode 5

- (P) Allez, s'il vous plaît... Je vais faire autrement en fait... On va faire comme ça. Donc, on va éviter de développer comme ça, ça évitera les erreurs de calcul. Je vais diviser les deux côtés par ce nombre-là, c'est-à-dire par $x_B - x_A$. Donc, ça veut dire que $y - y_A$ c'est égal à $(x - x_A)\,(y_B - y_A)$, le tout sur $x_B - x_A$. Je manipule un peu. Je fais apparaître un nombre... $y - y_A$ égale $y_B - y_A$ sur $x_B - x_A$, le tout facteur de $x - x_A$.

Tableau : $$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,(x - x_A)$$

- (élève) En fait on a fait passer $x_B - x_A$ de l'autre côté de l'égalité...
- (P) J'aime pas qu'on dise comme ça, mais oui...
- (élève) Faut pas dire faire passer, mais diviser.
- (P) D'accord ?
- (élève) On a divisé de chaque côté par $x_B - x_A$...

- (P) Et maintenant, regardez ce qui apparaît. Je fais les deux en même temps. J'additionne à la fois y_A des deux côtés de l'égalité et ensuite, là je le développe. Donc ça veut dire que ça donne y est égal à $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ facteur de x plus $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ facteur de x_A... Attention, il y avait un moins, donc c'est moins ici... et plus y_A.

Tableau : $$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A + y_A$$

- (P) Est-ce que j'ai obtenu ma forme ? Oui, regardez. Là, j'ai un nombre que je peux appeler petit a qui n'est pas fonction de x. Là, j'ai un nombre, c'est ni fonction de x ni de y, que je peux appeler petit , d'accord ? Et donc je me retrouve avec quelque chose de la forme $y = ax$..., je vais prendre le moins dans le petit b...Y a une précaution qu'on a pas prise...Y a une précaution qu'on a pas prise... Comment ?
- (élève) *inaudible*
- (P) Non. Quand je suis passé de là à là, j'ai divisé par $x_B - x_A$. Dans quels cas j'ai le droit de diviser... par un nombre ?
- (élève) Que quand c'est une équation.
- (P) Non. Il y a une division qu'on peut pas faire, qu'on sait pas faire, c'est laquelle ? Qui n'existe pas ? Par zéro. Donc qu'est-ce qu'il faut veiller ici ?
- (élève) A ce que x soit non nul.
- (P) $x_B - x_A$ soit non nul, c'est-à-dire...
- (élève) Différent de zéro.
- (P) Que x_A et x_B ne soient pas... égaux. Donc, là on va marquer si x_A différent de x_B.
- (élève) Sinon, comment on pouvait l'écrire ? On marque réel avec la petite étoile ?... Pour dire qu'il est non nul.
- (P) Oui, sinon, on peut écrire que $x_B - x_A$ appartient à... Donc, qu'est-ce qu'il faut que je traite maintenant comme cas ? Si x_B égale x_A... Si x_B égale x_A, $x_B - x_A$ ça fait combien ? Zéro. Zéro fois $y - y_A$..., ça fait zéro. Donc ça veut dire qu'on se retrouve qu'avec ce côté de l'égalité.
- (élève) M'sieur ?
- (P) Oui.
- (élève) Vous pouvez noter les étapes de la... de l'équation. C'est-à-dire quand on a divisé par $x_B - x_A$ et après...
- (élève) Parce que je vois pas trop comment on a fait là...
- (élève) Mais si c'est facile.
- (élève) Pour isoler $x - x_A$.
- (P) Là, j'ai simplement écrit la même chose différemment.
- (élève) On a le droit de l'écrire comme ça ?
- (P) Bien sûr!
- (élève) Oui, mais c'est différent si on... C'est pas différent si on multiplie le résultat de la division ou si on multiplie tout par...
- (P) C'est pareil. Si tu écris... Regardez. Si j'ai a fois b sur c, j'ai le droit d'écrire que c'est par exemple b sur c le tout fois a. (30 minutes)
- (élève) D'accord.
- (élève) Et a sur c fois b c'est possible aussi ?
- (P) Aussi, oui. Comment je fais pour ? Ah celui-là, qu'est-ce que j'ai fait ? J'ai fait plus y_A, d'accord ? Et j'ai développé... Écoutez, vous le ferez par le calcul, vous, avec les valeurs.
- (élève) En contrôle, quand on aura une démonstration, faudra le faire avec des x et des A?
- (P) Non, vous aurez des valeurs pour x_A et... pour les coordonnées.
- (élève) Mais quand on démontre, on a le droit de prendre des valeurs comme ça ?
- (P) Quand on démontre, il faut qu'on le voie dans le cas général, donc il faut qu'on prenne pas des valeurs...

- (élève) Ouais, mais c'est pas beau...

Commentaires – On voit là que c'est P qui « prend la main », et qui fait le travail démonstratif. Le type de dialogue avec la classe change, celle-ci n'a plus véritablement prise sur le travail et la plupart des élèves cherchent semble-t-il à comprendre ce que fait le professeur plutôt que de véritablement intervenir dans le travail. Un symptôme du fait que ce qui se passe n'est plus dans le *topos* des élèves, c'est l'intervention d'un élève qui demande si il y aura ce type de choses à faire au contrôle, ce que P avait d'ailleurs anticipé en annonçant l'instant d'avant que les élèves auraient « à le faire avec des valeurs ».

Épisode 6

- (P) Donc, quand x_B égale x_A, ça, ça fait zéro. Je multiplie quelque chose par zéro, donc ça fait zéro. Ça fait zéro égale à ça. D'accord ? Maintenant, le produit des facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Vous êtes d'accord ?
- (élève) Oui.
- (P) Donc ici, soit ça égale à zéro... Moi, je vous dis que celui-là peut pas être égal à zéro. On a déjà x_B qui est égal à x_A. Si y_B est égal à y_A, ça veut dire qu'on a le même point.
- (élève) Ah oui.
- (P) Donc, ce qu'il faut faire au départ, c'est prendre deux points distincts... Y en a un qui me gonfle depuis ce matin. Je trouve qu'il a des yeux bien fatigués pour un lundi matin...
Silence dans la classe.
- (P) Donc ça veut dire que $x-x_A$ est égal à zéro et donc que $x=x_A$. On a bien trouvé l'autre forme : x égale constante. Le type de tâches qu'on va avoir à faire c'est quoi ? Déterminer l'équation d'une droite.
P le note au tableau.
- (P) Pour déterminer l'équation d'une droite, on vous donnera... à partir de deux points... (*en complétant*) passant par $A(x_A, y_A)$ et B (x_B, y_B). Comment je vais faire pour déterminer cette équation de droite ?... Oui, alors, vas-y...
- (élève) (*inaudible*)
- (P) Dis-le clairement. On va calculer le vecteur $\vec{AB}$. On va calculer quoi ? (*Tout en le notant*) Les coordonnées de $\vec{AB}$... On prend un autre point. Ses coordonnées on va les écrire ? L'autre point ? (x, y). Et on va écrire que quoi ? Que... ? On écrit que $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires. Exemple. Deux exemples, que vous allez faire, qu'on va faire dans le cours.
- (élève) M'sieur ?
- (P) Oui.
- (élève) On a trouvé où $x-x_A$, juste en-dessous de « si $x_B=x_A$ »?
- (P) Je l'ai effacé.
- (élève) Oui, mais c'était quoi l'équation ?
- (P) On avait...
A ce moment, la sonnerie marquant la fin de la séance retentit. P poursuit :
- (P) On avait $x_B-x_A=0$ qui était multiplié par $y-y_A$ et zéro fois quelque chose ça fait zéro. Donc, j'ai pris qu'une partie de l'égalité, l'autre partie de l'égalité j'ai dit qu'elle était égale à zéro.
- (élève) D'accord.
- (P) On va faire deux exemples, en reprenant ce que vous aviez fait, pour voir si on retombe dessus. Donc, on va prendre l'exemple... On va chercher la droite passant par G de coordonnées (0; -1) et... Chut... Et H de coordonnées (2; 0). Donc déterminer l'équation de la droite passant par G et H. Et en deuxième exemple, on va faire celui où vous aviez la même ordonnée, je sais plus où c'est... Je l'invente... Par C de coordonnées (2; -4) et D de coordonnées (2; -6)... Pardon, la même abscisse,

j'avais dit la même ordonnée... Là, on est en module. Donc, il y a la moitié de la classe qui y va et l'autre moitié, vous faites ça au brouillon.

Fin de la séance enregistrée. (38 min 59 s)

Commentaires – La fin de la séance donne à nouveau du *topos* aux élèves en identifiant le type de tâches qu'ils auront à effectuer, et la technique pour le faire. On notera cependant que P ne va pas utiliser le résultat technologique qu'il vient de démontrer pour produire la technique. Cela l'aurait conduit à mettre en place la technique suivante : si $x_A \neq x_B$, on calcule le coefficient directeur, *a*, qui est égal à $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; puis on calcule l'ordonnée à l'origine, *b*, qui est égale à $y_A - ax_A$.

4. Évaluation et développement – Guide d'AER de statistique en 5^e^

On reproduit ci-dessous les éléments qui figurent dans les notes de la séance précédente et qui étaient à travailler pour cette semaine.

14 trinômes ont rendus leur travail (voir le fichier AER Statistique_travaux). 7 ont placé l'AER en 3^e^, 3 en 5^e^, 1 en 4^e^ et les trois restant ne se prononcent pas.

1. Dans l'ensemble, on note une compréhension au moins formelle de ce qui constitue un guide d'AER (une situation problématique assortie d'un réseau de questions cruciales et de possibilités de réponses des élèves, le milieu qui permet d'aborder les questions envisagées) : seul un trinôme donne une « fiche élève » détaillée qui limite considérablement le topos des élèves. On notera en outre que ce trinôme change l'étude à mener et qu'on ne voit pas bien les éléments de statistique qu'il s'agit de produire. On reproduit ci-dessous la première partie de l'activité :

Le but de cette activité est **l'Étude de la population en France.**

Compléter le document « évaluation » à l'aide des données présentes dans le fichier "population" et concernant le nombre de naissances, de décès et d'habitants pour les douze mois de l'année 2006. On procédera par "copier-coller.

A. Élaboration du tableau

1. Regrouper les différentes données présentes sur la fiche « population » dans un tableau. Pour cela, vous ferez apparaître en fonction des mois de l'année 2006, le nombre de naissances, le nombre de décès ainsi que le nombre d'habitants (en milliers) correspondant.
Vous pouvez pour vous aider utiliser la fonction « copier-coller ».

2. Sachant que l'on appelle « accroissement mensuel », la différence entre le nombre de naissances et le nombre de décès, calculer et faire apparaître les résultats dans le fichier précédent à l'aide d'une cinquième colonne.
Enregistrer le travail sous le nom : « étude ».

Un autre trinôme propose des étapes qui ressemblent fort à des questions intermédiaires et ne prévoie pas de questions cruciales.

Activité niveau 4^e^ :

On donne aux élèves un fichier dans lequel se trouve la liste des communes d'un département ainsi que le nombre d'habitants par commune. Les élèves travaillent avec Excel.
Le but de l'activité est de savoir si une ville de 7000 habitants est considérée comme une grande ville ou une petite ville.
On peut procéder par différentes étapes:
1/ Reclasser les communes par ordre d'importance de la plus petite à la plus grande.
2/ Calculer les effectifs cumulés croissants.
3/ Calculer le pourcentage d'habitants de chaque commune par rapport à la population totale du département.
4/ Regarder ce pourcentage pour des villes de 7000 habitants et plus.
Que peut-on dire pour une ville de 7000 habitants?
(...)

On ajoutera que le type de tâches « déterminer une question cruciale » reste problématique pour la majorité des trinômes. (Voir *infra.*)

2. Dans l'ensemble toujours, on peut remarquer que la précision du milieu est généralement (très) insuffisante et que les consignes à donner à la classe ou les dispositifs dans lesquels on va la faire travailler sont absentes. (Voir *infra*.)

3. La dernière remarque générale que nous ferons est le fait que certaines propositions restreignent trop l'OM à faire émerger, comme par exemple la proposition suivante destinée à une classe de 3e.

Énoncé de l'AER :

Que peut-on dire de la répartition de la population dans les communes des Bouches du Rhône ?

Fiche professeur : On réalise une AER en classe de 3e, en salle informatique, les élèves disposant du fichier Excel de la population dans les bouches du Rhône. On suppose que la notion de médiane a déjà émergé, et que son calcul est routinier pour les élèves.

On souhaite faire émerger la question de la pertinence des 2 mesures statistiques : moyenne et médiane, ainsi que les propriétés de ces 2 mesures quant à l'influence des valeurs extrêmes.

Questions cruciales et description de la séance :

1) Quelles mesures statistiques peut-on calculer pour décrire la série ?

-calcul moyenne, médiane, étendue

2) On constate une différence entre la moyenne et la médiane : comment l'interpréter ?

-répartition inégale de la population : on peut regarder les quartiles.

La moyenne est dans le 4e quartile, ce qui confirme l'inégale répartition.

3) La moyenne est-elle alors une mesure pertinente pour décrire notre série ?

Non ! On va regarder le comportement de la moyenne si on enlève les valeurs extrêmes (moyenne élaguée, sans dire le terme).

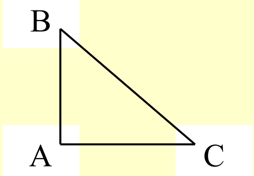
Nouvelle moyenne ? Nouvelle médiane ?

Que remarque-t-on ?

Le fait de faire émerger en outre la médiane permettrait de gagner du temps et du sens, de la motivation, dans la construction de l'OM relative à la notion de médiane.

Avant d'aborder le travail sur le guide d'AER, nous examinerons la notion de « question cruciale », à propos de laquelle nous remarquions que le type de tâches « déterminer une question cruciale » restait problématique pour la majorité des trinômes. Les questions cruciales sont en effet un outil essentiel de la direction d'AER : une question Q_2 sera dite cruciale pour (ou par rapport à) une question Q_1 si le fait de savoir répondre à Q_2 permet d'avancer dans l'élaboration d'une réponse à Q_1. Bien entendu, il peut exister plusieurs questions cruciale pour Q_1. Voici un exemple issu des archives du Séminaire :

② À titre de premier exemple, considérons la question Q suivante :



Est-il vrai que, si un triangle ABC rectangle en A a pour aire $\frac{a^2}{4}$, où a = BC, alors ABC est isocèle ?

❶ Notons d'abord qu'un énoncé de DS traditionnel portant sur Q pourrait prendre l'allure suivante :

On suppose que l'aire d'un certain triangle ABC rectangle en A vaut $\frac{a^2}{4}$, où a = BC. On pose en outre b = CA et c = AB. 1) Exprimer l'aire de ABC en fonction de b et c. En déduire que $4bc = a^2$. 2) Écrire l'égalité de Pythagore pour le triangle ABC. En déduire que l'on a : $4bc = b^2+c^2$. 3) Développer l'expression $(b - c)^2$. En déduire que $b = c$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

❷ Avant de transformer cet énoncé en un « guide de direction d'AER » structuré par des questions cruciales, soulignons la différence de principe entre les deux « genres didactiques » que sont le DS et l'AER :

– dans un énoncé de DS, l'étude est supposée avoir ***déjà été faite***, et a même ***été rédigée*** (par le professeur), mais de façon ***lacunaire*** : il revient à l'élève ***de combler les lacunes*** ménagées à son intention ;

– dans une AER, au contraire, ***l'étude est à faire*** : le questionnement va alors souvent procéder ***« à l'envers »***, ***en recherche de solution***, et non ***en exposé*** – lacunaire – ***de solution*** comme il en va dans l'énoncé d'un DS.

❸ La direction d'une AER visant à résoudre le problème proposé devra ainsi, par contraste, s'appuyer sur des ***questions cruciales***, à l'aide desquelles le professeur aidera les élèves à progresser dans le processus de ***production*** de la solution demandée. C'est à l'aide d'une telle liste de questions cruciales que le professeur va diriger l'AER. Pour le problème indiqué, il pourra par exemple préparer les questions proposées dans la fiche-guide ci-après :

Collège Georges Bouligand ***4^e 3*** **Études et recherches 2 - *Guide d'AER n° 3*** UN TRIANGLE RECTANGLE PARTICULIER 1. La question à étudier : Est-il vrai que, si un triangle ABC rectangle en A a pour aire , où a = BC, alors ABC est isocèle ? 2. Comment démontrer qu'un triangle est isocèle ? 3. Si ABC était isocèle, quels seraient les côtés égaux ? 4. On pose CA = b et AB = c. Il suffirait donc de démontrer que $b = c$. Mais comment démontrer que deux nombres inconnus b et c sont égaux ? 5. Comment démontrer que $(b - c)^2 = 0$? 6. Que vaut $(b - c)^2$? Comment s'écrit l'égalité $(b - c)^2 = 0$? 7. Dans le triangle rectangle ABC, que vaut $b^2 + c^2$? Que vaut bc ? 8. À quoi arrive-t-on ? Rédigeons !…

❹ On voit qu'ici la question clé est la question 4. Pour démontrer que $b = c$, on peut par exemple « partir de b pour arriver à c », mais on peut aussi démontrer que $b - c = 0$, ou, plus sophistiqué, que $(b - c)^2 = 0$: cette dernière réponse est liée au fait que les nombres b et c sont des mesures de côtés d'un triangle (et plus particulièrement d'un triangle rectangle).

Bien évidemment, la fiche guide ci-dessus n'est pas à donner aux élèves, du moins pas avant l'étude ; les questions doivent apparaître dans le cours de travail de recherche, et l'on pourra par exemple en « coller » un exemplaire à l'issue de l'AER dans le cahier de textes, exemplaire que l'on aura adapté à ce qui s'est véritablement passé dans la classe.

Le professeur agissant comme directeur d'étude et de recherche doit ainsi apprendre à poser des questions cruciales et, peu à peu, à faire que la classe et chaque élève apprennent à (se) poser de telles questions. Ce qui gêne le travail de ce point de vue, c'est principalement le fait que l'on ne va pas considérer le ***procédé de production d'une réponse***, mais le ***produit de ce procédé***, la réponse elle-même, que l'on va alors structurer pour l'exposer au lieu de structurer le procédé de production selon un certain ordre de découverte, qui est souvent inverse de l'ordre dans lequel on va exposer la réponse.

Voici ce que les notes du Séminaire 2004-2005 développaient à ce propos :

① Si l'on cherche par exemple à démontrer une proposition q, on s'efforcera de se « ramener » à une question p, c'est-à-dire qu'on recherchera une question p telle que la proposition $p \Rightarrow q$ soit aisément reconnue vraie, en sorte que, pour démontrer q, il suffise de démontrer p, etc. Un énoncé « tout fait » ***pour les élèves*** aurait alors la structure suivante :

> 1. Démontrer *p*.
> 2. En déduire *q*.

Par contraste, le « guide de direction d'étude » ***pour le professeur*** aura l'allure suivante :

> 1. *Q*. Comment démontrer *q* ?
> 2. *R*. En démontrant *p*.
> 3. *Q'*. Comment démontrer *p* ?
> 4. *R'*. …

② Lorsqu'on doit démontrer une proposition du type $h \Rightarrow k$, où h est l'hypothèse et k la conclusion, une source de difficulté classique est la tentation de ***« partir » de h pour « arriver » à k***, c'est-à-dire de chercher une proposition p_1 telle que l'on sache démontrer les implications $h \Rightarrow p_1$ et $p_1 \Rightarrow k$. En général, on choisit p_1 de façon qu'il soit aisé d'établir $h \Rightarrow p_1$ et il reste alors à établir $p_1 \Rightarrow k$. Si l'on n'y parvient pas, on cherche alors une proposition p_2 telle qu'on sache démontrer l'implication $p_1 \Rightarrow p_2$ et on tente de montrer alors d'établir l'implication $p_2 \Rightarrow k$. La « chasse », qu'on appelle en termes techniques « chaînage avant », peut continuer sans aboutir…

③ Le caractère dominant, voire unique, d'une telle stratégie chez les élèves du secondaire (et chez nombre d'étudiants d'université) découle sans doute de la consigne, rappelée à satiété par certains professeurs, selon laquelle il faudrait ~~« partir des hypothèses pour arriver à la conclusion »~~. En fait il s'agit là d'une stratégie souvent peu efficace, comme le montre l'exemple suivant, où l'on va utiliser au contraire un « chaînage arrière ».

❶ On demande de démontrer que, dans ℝ, on a : $\forall a\ \forall b\ \forall c\ \left(a \leqslant b+c \Rightarrow \dfrac{a}{1+a} \leqslant \dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}\right)$. Désignons par h l'énoncé $a \leq b+c$ et par k l'énoncé $\dfrac{a}{1+a} \leqslant \dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$. Partir de $a \leq b+c$ pour essayer d'en faire découler p_1 qui impliquerait clairement k est à peu près voué à l'échec… Il est au contraire vital de ***partir de k*** pour essayer de trouver ***q_1 impliquant k***, et ***impliqué par h*** (q_1 est alors une ***condition suffisante*** de k)

❷ On a ici : $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$ ⇔ $(1+b)(1+c)a \leq (1+a)(1+c)b+(1+b)(1+a)c$ ⇔ $a+ab+ca+abc \leq b+c+ab+2bc+ca+2abc$ ⇔ $a \leq b+c+2bc+abc$. On prendra donc ici pour q_1 l'inégalité $a \leq b+c+2bc+abc$: q_1 équivaut à k et, clairement, h implique q_1.

② Dans ce qui précède, on a remplacé k par q_1 telle que l'on ait $q_1 \Leftrightarrow k$. D'une manière plus générale, on a en fait intérêt à ce que q_1 ne soit pas ***trop forte***, car on augmenterait alors le risque de ne pouvoir établir que $h \Rightarrow q_1$. Comment chercher q_1 ? En s'interrogeant sur le ***type*** de tâches « démontrer une proposition du type de k », c'est-à-dire en se demandant « comment démontrer une proposition du type de k », par exemple, ici, en se demandant « comment prouver une ***inégalité*** portant sur des ***fractions*** ? » De là le fait qu'une question cruciale puisse être appelée aussi une question ***typique***, parce qu'elle porte souvent sur un type de tâches.

③ Il devrait être clair que la découverte de propositions p_1, p_2, …, q_2, q_1 telles qu'on ait les implications $h \Rightarrow p_1$ & $p_1 \Rightarrow p_2$ & … & $q_2 \Rightarrow q_1$ & $q_1 \Rightarrow k$ est le cœur du travail de production de la démonstration visée. Même si, bien entendu, le professeur va aider les élèves aux prises avec la recherche des réponses aux questions cruciales qu'il doit apprendre à poser, la constitution d'une culture mathématique authentique – bien qu'élémentaire – suppose d'apprendre à répondre aux questions cruciales du genre « comment démontrer… ? » D'une manière générale, pour mener à bien l'étude d'une question, il convient ***d'apprendre à poser les questions cruciales***, et, peu à peu, ***à y répondre***.

Examinons maintenant les guides d'AER proposés à la lumière de ce qui précède.

Voici les « questions cruciales » proposées par le deuxième guide d'AER, où il s'agissait de répondre à la question suivante : « Quand on dit qu'une commune du département n'a pas beaucoup d'habitants, ça veut dire qu'elle en combien ? »

- Combien de communes ont moins de 50 habitants ? : Les élèves vont se rendre compte très rapidement que c'est assez difficile de les compter sans les trier par ordre croissant. On leur explique alors comment le faire.
- Même question pour les communes de moins de 100 habitants. Ici, on peut leur montrer comment utiliser le menu « trier » d'Excel.
- Alors ? Une commune qui a moins de 100 habitants, est-elle une petite commune ? Et s'il s'agissait de toutes les communes de la France ? : ici, l'objectif est de les amener à réfléchir en terme de pourcentage.
- Quel est le pourcentage des communes de moins de 50 habitants ? de moins de 100 habitants ? de moins de 150 habitants ? : on peut introduire ici la notion de fréquence si les élèves ne la connaissent pas encore. On décide ensemble avec les élèves la fréquence des communes « qui n'ont pas beaucoup d'habitants » dans le nombre total des communes du département. Ici on peut choisir un pourcentage différent de ceux trouvés précédemment, de façon à ce qu'ils trouvent eux même le nombre des petites villes et le nombre d'habitants correspondant.

Les questions proposées comme étant cruciales n'en sont pas véritablement. Le problème n'est pas posé de savoir comment répondre à la question, mais on demande directement de trouver un nombre de communes qui ont moins de N habitants. Il en va autrement dans la première partie du troisième guide d'AER communiqué.

Q1 : Une grande ville c'est combien d'habitants ?

- En fonction des réponses données, on essaiera de dégager un consensus sur ce qu'est, pour les élèves une grande ville.
- Mettons que la réponse la mieux partagée est « 1000 habitants ». Ça reste une réponse intuitive, qui motive donc la question suivante :

Q2 : 1000 habitants est-ce que c'est une grande ville ?

- Mettre à disposition des élèves le fichier contenant les tableaux des populations des communes du 13 et du 04.

- Se mettre d'accord sur la façon de procéder pour répondre à Q2.
- Ce qui va probablement émerger :

➔ « On regarde par rapport à la plus grande ville »

A écarter en justifiant que regarder seulement la plus grande ville n'est pas représentatif du reste de la population.
Ou a conserver en disant oui c'est une bonne idée mais qui présente le défaut de ne pas être représentatif du reste de la population.

➔ « On regarde s'il y en a beaucoup qui font plus de 1000 habitants »

Demander à la classe comment faire à partir du tableur.
Technique qui devrait émerger :

- trier dans l'ordre décroissant (en ne se trompant pas dans la sélection de la plage et du critère de tri)
- compter les lignes dont la population est > à 1000 (pour aller plus vite : regarder le numéro des deux lignes extrêmes, faire la soustraction et ajouter 1)

La deuxième question pourrait être reformulée de la façon suivante : Comment déterminer si une ville de N habitants, c'est une grande ville ?

Ce qui conduira à replacer la ville dans la population des villes, puis à choisir un critère, par exemple la quantité de villes qui a plus de N habitants. Ce qui amènera à poser la question :

Comment déterminer s'il y a beaucoup de villes qui ont plus de N habitants ?

Etc.

Travail en binômes ou en trinômes
À partir du travail effectué précédemment, proposer une suite de questions cruciales pour la 3e AER.
On rendra un document à la fin de la séance.

À suivre...

Bonnes vacances... studieuses !

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Travaux dirigés de didactique des mathématiques
Utiliser les TICE

N. B. La séance de travail dirigé dont rendent compte les notes ci-après n'a concerné qu'une moitié des participants au Séminaire environ. Elle ne sera pas reprise in praesentia *avec les participants composant l'autre moitié : par principe, et dans le cadre de leur formation au travail en équipe, ces derniers devront étudier le contenu du TDDM 4 à partir des notes qui suivent et avec l'aide, laissée à la convenance de chacun, de participants ayant dûment suivi cette séance.*

➔ Séance 4 : mardi 17 février 2009 (17 h 20 – 18 h 50)

Programme de la séance. 1. Fluctuation d'échantillonnage // 2. Simulations

1. Fluctuation d'échantillonnage

1.1. Ce que disent les textes officiels

a) La notion de « fluctuation d'échantillonnage » apparaît dans le programme de 2de. Dans la partie présentant le domaine de la ***statistique***, ce programme précise ceci.

> **En seconde le travail sera centré sur :**
> – la réflexion conduisant au choix de résumés numériques d'une série statistique quantitative ;
> – la notion de fluctuation d'échantillonnage vue ici sous l'aspect élémentaire de la variabilité de la distribution des fréquences ;
> – la simulation à l'aide du générateur aléatoire d'une calculatrice. La simulation remplaçant l'expérimentation permet, avec une grande économie de moyens, d'observer des résultats associés à la réalisation d'un très grand nombre d'expériences. On verra ici la diversité des situations simulables à partir d'une liste de chiffres.

b) Le même texte formule ensuite les préconisations ci-après.

> L'enseignant traitera des données en nombre suffisant pour que cela justifie une étude statistique ; il proposera des sujets d'étude et des simulations en fonction de l'intérêt des élèves, de l'actualité et de ses goûts.

La notion de fluctuation d'échantillonnage et de simulation ne doit pas faire l'objet d'un cours. L'élève pourra se faire un « cahier de statistique » où il consignera une grande partie des traitements de données et des expériences de simulation qu'il fait, des raisons qui conduisent à faire des simulations ou traiter des données, l'observation et la synthèse de ses propres expériences et de celles de sa classe. Ce cahier sera complété en première et terminale et pourra faire partie des procédures d'évaluation annuelle.

c) Le document d'accompagnement ajoute les développements suivants.

> **• La fluctuation d'échantillonnage**

Nous appellerons échantillon de taille *n* d'une expérience la série des résultats obtenus en réalisant *n* fois cette expérience ; on dira aussi qu'un échantillon est une liste de résultats de *n* expériences identiques et indépendantes ; on se limite en seconde aux échantillons d'expériences ayant un nombre fini d'issues possibles. La distribution des fréquences associée à un échantillon est le *vecteur* dont les composantes sont les fréquences des issues dans l'échantillon ; on ne donnera pas de définition générale de la notion de distribution des fréquences, on se contentera de la définir comme liste des fréquences dans chacune des situations que l'on traitera. Les distributions des fréquences varient d'un échantillon à l'autre d'une même expérience : c'est ce qu'on appellera en classe de seconde la fluctuation d'échantillonnage.

Aborder la notion de fluctuation d'échantillonnage se fera en premier lieu dans des cas simples (lancers de dés, de pièces), où la notion d'expériences identiques et indépendantes est intuitive et ne pose pas de problème ; l'élève reprendra ainsi contact avec des expériences aléatoires familières (lancer de dés équilibrés) et les enrichira. Historiquement, l'honnête homme du XVII^e siècle s'est familiarisé à l'aléatoire en pratiquant les jeux de hasard ; maintenant, les calculatrices et les ordinateurs permettent la production aisée de listes de chiffres au hasard ; la production de telles listes fera partie, à coté des lancers de dés ou de pièces équilibrés, à côté de tirage de boules dans des urnes, du bagage d'expériences de référence de l'élève. L'étude de ces expériences de référence sera ainsi à la base de la formation sur l'aléatoire des élèves.

L'esprit statistique naît lorsqu'on prend conscience de l'existence de fluctuations d'échantillonnage ; en seconde, l'élève constatera expérimentalement qu'entre deux échantillons, de même taille ou non, les distributions des fréquences fluctuent ; la moyenne étant la moyenne pondérée des composantes de la distribution des fréquences est, elle aussi, soumise à fluctuation d'échantillonnage ; il en est de même de la médiane. On observera aussi que l'ampleur des fluctuations des distributions de fréquences calculées sur des échantillons de taille *n* diminue lorsque *n* augmente. Par ailleurs, on n'hésitera pas à parler de la fréquence d'un événement (« le nombre observé est pair », « le nombre est un multiple de trois », etc.) sans pour autant définir formellement ce qu'est un événement, ni donner de formules permettant le calcul automatique de la fréquence de la réunion ou de l'intersection de deux événements.

Le choix pédagogique est ici d'aller de l'observation vers la conceptualisation et non d'introduire d'abord le langage probabiliste pour constater ensuite que tout se passe comme le prévoit cette théorie.

1.2. Quelle distribution sur la population ?

a) Dans un groupe d'écoles supérieures publiques de formation professionnelle, les épreuves communes de passage de la 1re à la 2e année ont vu la réussite de 1000 élèves, chacun d'eux recevant l'une des mentions suivantes : Passable ; Assez bien ; Bien ; Très bien.

b) Une association d'usagers souhaite connaître la distribution de ces mentions. N'ayant pas accès aux données détenues par l'administration des écoles, elle envoie plusieurs observateurs relever des données affichées (où les mentions figurent par ordre alphabétique des noms des lauréats). L'un des observateurs a relevé la suite de mentions ci-après en les codant ainsi : Passable, 1 ; Assez bien, 2 ; Bien, 3 ; Très bien, 4. La voici.

13123124312131243122222211131243121312431222243111.

En copiant cette liste et en la collant dans un fichier Word, il dénombre les différentes mentions (à l'aide de la fonction **Remplacer**) et obtient ceci.

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	18	17	10	5	50
%	36	34	20	10	100

c) Sur cette base, cet observateur croit pouvoir avancer les conjectures suivantes relatives à la population des 1000 mentions attribuées :

1) comme on pouvait s'y attendre, les effectifs décroissent quand la mention s'élève ;
2) environ un lauréat sur 10 a eu la mention « Très bien » ;

3) environ 70 % des lauréats ont reçu la mention « Passable ou « Assez bien ».

d) D’autres observateurs ont, de même, relevé d’autres séries de mentions.

• On reproduit ci-après 10 séries de 50 mentions.

Série 1 : 11122312311131222421113121312431243122224311111122

Série 2 : 43112124312431243122222311131243122312131222242111

Série 3 : 11124312311131222431113112231242123124312431213124

Série 4 : 31223123111312224211113111312231222243111111211312

Série 5 : 11111124121212311431243122312431213222431113124223

Série 6 : 12131243222421231243122312311131222431111311131243

Série 7 : 12222421111112111131211111122124312311431213124312

Série 8 : 23124322243111212134311243122322224311131213431431 2

Série 9 : 13124312231222242111312431213124312231231113122243

Série 10 : 11142111312231222243121111112112431221143124312431

• Chaque trinôme de participants dresse, pour l’une de ces séries (qui lui est communiquée dans un fichier Word), le tableau des effectifs ci-dessous (en le reproduisant dans un fichier séparé).

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif					50
%					100

• Dans le tableau ci-après, on a reporté les séries de pourcentages pour chacune des quatre mentions. (Pour les 10 tableaux demandés ci-dessus, voir l’Annexe 1 ci-dessous.)

Mention	**1**	**2**	**3**	**4**	**Total**
Série 1	44	32	16	8	100
Série 2	34	36	18	12	100
Série 3	40	28	20	12	100
Série 4	48	30	18	4	100
Série 5	40	30	18	12	100
Série 6	38	30	22	10	100
Série 7	52	28	12	8	100
Série 8	32	30	24	14	100
Série 9	34	34	22	10	100
Série 10	46	28	14	12	100

• À l’aide du tableau précédent, on examine collectivement les trois conjectures formulées plus haut, à savoir

1) comme on pouvait s’y attendre, les effectifs décroissent quand la mention s’élève ;
2) environ un lauréat sur 10 a eu la mention « Très bien » ;
3) environ 70 % des lauréats ont reçu la mention « Passable ou « Assez bien ».

➔ Il n’est pas toujours vrai que « les effectifs décroissent quand la mention s’élève », même si c’est presque vrai : dans la série 2, ainsi, l’effectif des mentions « Assez bien » dépasse l’effectif des mentions « Passable » ; dans la série 9, ces deux effectifs sont égaux.

➔ La conjecture qu’« un lauréat sur 10 a eu la mention “Très bien” » n’est pas véritablement confirmée sur l’ensemble des dix séries examinées : le pourcentage de mentions « Très bien » attribuées varie de 4 % à 14 %, soit un rapport de 1 à 3,5 ; la proportion selon la série examinée varie de 4/100 = 1/20 à 14/100 ≈ 1/7. La série des pourcentages est la suivante : 4, 8, 8, 10, 10, 12, 12, 12, 12, 14 ; on voit ainsi que, toutefois, la médiane est égale à 10.

➔ La série des pourcentages de l’événement « Passable ou Assez bien » est la suivante : 62, 68, 68, 68, 70, 70, 74, 76, 78, 80 ; la médiane est 70. Mais on voit que l’étendue est de 18 points !

1.3. Échantillons aléatoires

a) L’étude précédente illustre une situation typique.

• On s’y intéresse à la distribution d’un certain caractère X sur une certaine population Ω. Ici, le caractère X est la mention obtenue à un examen : c’est un caractère ***ordinal*** ; la population Ω, d’effectif 1000, est celle des élèves reçus à l’examen.

• Pour étudier la distribution de X sur Ω, il faudrait connaître l’ensemble des mentions $\{ X(\omega) / \omega \in \Omega \}$. Comme cet ensemble n’est pas connu, on se tourne vers un échantillon E (ou plusieurs). À partir de la connaissance de la distribution de X sur E, on essaie d’***inférer*** la distribution de X sur Ω.

• Les échantillons E que l’on utilise pour tenter de cerner la distribution de X sur Ω sont ici les échantillons que l’on a été capable de se procurer : on parlera alors d’échantillons ***disponibles***. À cet égard, l’auteur d’un ouvrage intitulé (dans son édition originale) *Principles of Statistics* (1971), Victor E. McGee, écrit ceci (*Principes de statistiques*, Vuibert, Paris, 1975, p. 30).

> Beaucoup de recherches sont fondées sur des échantillons disponibles. En fait, aux États-Unis, la recherche effectuée dans le domaine psychologique sur des êtres humains a été caractérisée par l’étude des étudiants de deuxième année, et il est fréquent pour les étudiants suivant des cours d’introduction en psychologie d’être récompensés (par une note meilleure) pour avoir participé à des expériences psychologiques. Dans beaucoup de cas il n’y a rien à redire à cette procédure.

b) L’association d’usagers parvient enfin à obtenir communication de la liste (anonymée) des mentions attribuées.

• On la reproduit ci-après.

1312312431213124312222221113124312131243122224311111223123111312224211131213124312431
2222431111112243112124312431243122222311131243122312131222242111111243123111312224311 1
3112231242123124312431213124312231231113122242111131113122312222431111121131211111124
12121231143124312231243121322243111312422314312431243121312222231113124212431243122312
3111312222311123111312421222213111111241113121111112412131231142431223121312422224311 1
31243231131243124312231222242111312431213124312222431112431231113122222111312431243124
31213124312231221113222431111311131223122224311111124111312111111211242311431223124312
13124322242123124312231231113122243111131113124312222421111112111131211111122124312311
43121312431223124322243111212134311243122322243111312134314312131243122312222421113124

31213124312231231113122243111421113122312222431211111121124312211431243124312231243222 13111312434314231113122312431213122312311131222431111111221113121111112412431221113124 32231213122224211131243124312131222242111111243122111 3

• Cette liste est communiquée à chacun des trinômes, qui établit alors l’effectif des différentes mentions (codées 1, 2, 3, 4).

• Les résultats de l’étude de cette population sont consignés dans le tableau suivant.

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	409	306	184	101	1000
%	40,9	30,6	18,4	10,1	100

➔ On observe que la première et la deuxième conjectures du premier observateur sont bien vérifiées sur la population totale.

➔ La troisième conjecture appelle un léger correctif : les mentions « Passable » et « Assez bien » représentent 71,5 % du total (et non 70 %).

➔ On notera surtout que, si l’échantillon disponible étudié par le premier observateur avait été l’un des neuf autres examinés ci-dessus, ses inférences auraient pu s’éloigner ***plus ou moins fortement*** de la réalité. On notera encore que la médiane des séries de 50 mentions elle-même fluctue légèrement : égale à 2 dans 9 séries sur 10, elle est égale à 1 dans la série 7 (où l’effectif de la valeur 1 atteint 52 %).

c) Informés des résultats de l’étude conduite par l’association d’usagers, plusieurs formateurs des écoles concernées sont inquiets de la manière dont seront constitués les groupes de formation (GF), dont il est prévu qu’ils regroupent chacun 20 élèves : ils pensent que si ces groupes sont déterminés par l’administration simplement selon l’ordre alphabétique, il y a de grandes chances pour que leur composition varie sensiblement, créant par là des conditions de travail inégalitaires pour les formateurs.

• Chaque trinôme sélectionne un groupe formé des lauréats pris dans l’ordre alphabétique du rang $20n + 1$ au rang $20(n + 1)$, où $0 \leq n \leq 49$, puis dresse le tableau des effectifs des différentes mentions en comparant ces effectifs avec les effectifs « théoriques » indiqués dans le tableau ci-après.

Mention	1	2	3	4	Total
Moyennes	8,18	6,12	3,68	2,02	20
« Idéal »	8	6	4	2	20

(On a calculé la deuxième ligne ainsi : 8,18 = 40,9 % × 20, 6,12 = 30,6 % × 20, 3,68 = 18,4 % × 20, 2,02 = 10,1 % × 20 ; la troisième ligne découle de la deuxième en arrondissant les valeurs de cette dernière.)

➔ Pour $n = 27$, par exemple, on sélectionne dans la liste des mentions celles allant du rang 541 au rang 560.

13123124312131243122222211131243121312431222243111111223123111312224211131213124312431 22224311111122431121243124312431222223111312431223121312222421111112431231113122243111 31122312421231243124312131243122312311131222421111311131223122224311111121131211111124

1212123114312431223124312132224311131242231431243124312131222223111312421243124312231 2
3111312222311123111312421222213111111241113121111112412131231142431223121312422224311 1
3124323113124312431223122224211131243121312431222243111243123111312222211131243124312 4
31213124312231221113222**4311113111312231222243**111112411131211111121124231 1…

➔ Le tableau demandé est alors le suivant.

Mention	1	2	3	4	Total
Effectif	9	6	4	1	20
« Idéal »	8	6	4	2	20

➔ En l'espèce, le formateur en charge de ce GF pourra être tenté de réclamer que, dans son groupe, l'administration remplace une mention Passable par une mention Très bien…

➔ On notera toutefois que chacun des 50 GF ne saurait avoir la composition « idéale ». On a en effet ceci : mention 1 : $50 \times 8 = 400 < 409$; mention 2 : $50 \times 6 = 300 < 306$; mention 3 : $50 \times 4 = 200 > 184$; mention 4 : $50 \times 2 = 100 < 101$.

On pourra trouver un complément d'étude dans les archives du Séminaire 2006-2007 (TD5).

2. Simulations

2.1. Ce que disent les textes officiels

a) Le programme de la classe de 2de présente ainsi le secteur des simulations.

Contenus
Simulation et fluctuation d'échantillonnage.

Capacités attendues
Concevoir et mettre en œuvre des simulations simples à partir d'échantillons de chiffres au hasard.

Commentaires
La touche « random » d'une calculatrice pourra être présentée comme une procédure qui, chaque fois qu'on l'actionne, fournit une liste de *n* chiffres (composant la partie décimale du nombre affiché). Si on appelle la procédure un très grand nombre de fois, la suite produite sera sans ordre ni périodicité et les fréquences des dix chiffres seront sensiblement égales.

Chaque élève produira des simulations de taille n (n allant de 10 à 100 suivant les cas) à partir de sa calculatrice ; ces simulations pourront être regroupées en une simulation ou plusieurs simulations de taille N, après avoir constaté la variabilité des résultats de chacune d'elles. L'enseignant pourra alors éventuellement donner les résultats de simulation de même taille N préparées à l'avance et obtenues à partir de simulations sur ordinateurs.

b) Le document d'accompagnement apporte d'autres précisions.

• **Simulation**
Formellement, simuler une expérience, c'est choisir un modèle de cette expérience puis simuler ce modèle : cet aspect sera introduit ultérieurement en première. Dans le cadre du programme de seconde, simuler une expérience consistera à produire une liste de résultats que l'on pourra assimiler à un échantillon de cette expérience (voir plus loin la fiche *listes de chiffres au hasard*). On se contentera de simuler des situations très simples, reposant le plus souvent sur la simulation d'expériences de référence où toutes les issues ont des chances égales d'apparaître.

La simulation permettra de disposer d'échantillons de grande taille et d'observer des phénomènes appelant une explication dans le champ des mathématiques. Pour bien comprendre les mathématiques, il est utile d'apprendre quel type de questions sont à adresser à cette discipline et aussi d'apprendre à reformuler ces questions dans le langage propre des mathématiques ; le langage des probabilités présenté en première S, ES et en option de première L, formalisera le langage naïf des *chances* et du *hasard* employé en seconde ; le calcul des probabilités permettra ensuite d'expliquer certains phénomènes observés.

En seconde, on approche dans le cadre d'un langage simple et familier les techniques de simulation ; pour que l'élève ne soit pas écrasé par la puissance des outils modernes de simulation, il convient qu'il ait établi un lien concret entre l'expérience et sa simulation : certaines expériences simples pourront être réalisées par une partie de la classe et simulées par le reste de la classe ; il n'est pas nécessaire, dans un premier temps, de lier les premiers pas vers la simulation de l'aléatoire à l'introduction de concepts théoriques difficiles tel celui de modèle.

2.2. Simuler les fluctuations

On touche là à une deuxième raison d'être de la notion de fluctuation : si l'on extrait un échantillon d'une population de structure connue ou supposée connue, à quoi peut-on s'attendre quand à cet échantillon ?

Un exemple classique à cet égard est le jeu de pile ou face : si la pièce est bien équilibrée, on s'attend à avoir à peu près autant de piles que de faces. Voici par exemple ce qu'on obtient avec des échantillons de taille 10 :

										Piles	Faces
1	1	1	2	1	2	1	1	2	1	**7**	**3**
1	2	1	1	1	1	2	1	2	2	6	4
2	2	1	1	1	2	1	2	2	1	5	5
2	2	1	2	1	2	1	2	2	2	**3**	**7**
1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	**8**	**2**
2	2	2	1	1	2	1	2	1	1	5	5
1	1	2	2	1	1	2	1	1	2	6	4
2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	6	4
1	2	2	2	2	1	2	2	2	1	**3**	**7**
2	2	2	1	2	1	1	1	1	1	6	4
1	2	1	2	1	1	2	1	1	2	6	4
2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	4	6
1	2	1	2	2	2	1	2	2	1	4	6
1	1	2	1	1	1	2	2	1	2	6	4

[Open office ; =ALEA.ENTRE.BORNES(1;2) ; Piles : =SOMME.SI(A7:J7;1) ; Faces = 10 – piles]

4 distributions sur les 14 présentées sont « fortement dissymétriques ».

Nous examinerons ici un problème, fort connu, celui du Chevalier de Méré que Pascal expose ainsi à Fermat dans une lettre du 29 juillet 1654 :

> Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré ; car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre. C'est, comme vous savez, un grand défaut. Il me disait donc qu'il avait trouvé difficulté sur les nombres pour cette raison : Si on entreprend de faire un 6 avec un dé, il y avantage de l'entreprendre par quatre coups. Si on entreprend de faire « sonnez » avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en vingt-quatre coups, et néanmoins 24 est à 36, qui est le nombre des faces de

deux dés, comme 4 est à 6, qui est le nombre des faces d'un dé. Voilà qui était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'Arithmétique se dément.

Si l'on fait rouler un dé équilibré, on peut « avoir avantage » à parier qu'on amènera un 6 en quatre lancers, c'est-à-dire que, plus d'une fois sur deux en moyenne, il se trouvera un 6 parmi les quatre sorties. La première chose à faire, *aujourd'hui*, c'est de tenter de vérifier cette « croyance » *par une simulation* : c'est ce qu'on fera en 2de.

Chaque trinôme de participants effectue une simulation qui permet de se faire une idée de la validité de cette proposition.

Voici par exemple 50 séries de quatre lancers d'un dé.

3 – 5 – 3 – 6 // 4 – 3 – 1 – 4 // 5 – 6 – 3 – 3 // 2 – 3 – 1 – 5 // 1 – 5 – 5 – 5 // 2 – 1 – 6 – 6 // 6 – 4 – 5 – 4 // 1 – 5 – 4 – 1 // 4 – 1 – 4 – 5 // 2 – 1 – 2 – 1 // 6 – 2 – 2 – 3 // 4 – 4 – 4 – 4 // 3 – 4 – 2 – 6 // 5 – 4 – 2 – 2 // 3 – 4 – 3 – 1 // 5 – 3 – 6 – 5 // 1 – 1 – 5 – 3 // 2 – 2 – 1 – 2 // 1 – 4 – 3 – 4 // 3 – 4 – 1 – 6 // 3 – 2 – 4 – 2 // 3 – 6 – 2 – 1 // 4 – 2 – 3 – 3 // 2 – 6 – 6 – 4 // 4 – 4 – 5 – 4 // 2 – 1 – 4 – 3 // 6 – 6 – 6 – 4 // 5 – 5 – 5 – 6 // 2 – 1 – 4 – 6 // 6 – 1 – 3 – 2 // 3 – 2 – 5 – 2 // 2 – 1 – 1 – 1 // 5 – 6 – 4 – 1 // 1 – 2 – 4 – 6 // 3 – 5 – 6 – 5 // 1 – 5 – 3 – 4 // 6 – 3 – 1 – 4 // 4 – 6 – 3 – 4 // 4 – 6 – 6 – 4 // 3 – 6 – 5 – 6 // 6 – 5 – 4 – 1 // 1 – 2 – 5 – 1 // 2 – 5 – 3 – 2 // 2 – 3 – 2 – 6 // 3 – 4 – 5 – 4 // 4 – 6 – 3 – 6 // 4 – 6 – 4 – 5 // 6 – 6 – 1 – 2 // 2 – 2 – 5 – 3 // 5 – 2 – 4 – 4

Parmi ces 50 séries, 24 contiennent un 6, ce qui est donc moins que « prévu » (ou qu'espéré) ! L'examen d'autres séries de quatre lancers permettrait de voir s'il s'agit là d'un fait un peu exceptionnel, ou bien s'il faut conclure par exemple que, s'il y a « avantage », celui-ci est fort limité… Si l'on avait parié d'obtenir un 6 en cinq lancers – mais il aurait fallu trouver un parieur qui relève le défi ! –, les 40 séries de 5 lancers ci-après semblent suggérer que l'affaire aurait été sensiblement plus avantageuse, puisqu'on y compte 23 séries (sur 40) contenant un 6.

3 – 5 – 3 – 6 – 4 // 3 – 1 – 4 – 5 – 6 // 3 – 3 – 2 – 3 – 1 // 5 – 1 – 5 – 5 – 5 // 2 – 1 – 6 – 6 – 6 // 4 – 5 – 4 – 1 – 5 // 4 – 1 – 4 – 1 – 4 // 5 – 2 – 1 – 2 – 1 // 6 – 2 – 2 – 3 – 4 // 4 – 4 – 4 – 3 – 4 // 2 – 6 – 5 – 4 – 2 // 2 – 3 – 4 – 3 – 1 // 5 – 3 – 6 – 5 – 1 // 1 – 5 – 3 – 2 – 2 // 1 – 2 – 1 – 4 – 3 // 4 – 3 – 4 – 1 – 6 // 3 – 2 – 4 – 2 – 3 // 6 – 2 – 1 – 4 – 2 // 3 – 3 – 2 – 6 – 6 // 4 – 4 – 4 – 5 – 4 // 2 – 1 – 4 – 3 – 6 // 6 – 6 – 4 – 5 – 5 // 5 – 6 – 2 – 1 – 4 // 6 – 6 – 1 – 3 – 2 // 3 – 2 – 5 – 2 – 2 // 1 – 1 – 1 – 5 – 6 // 4 – 1 – 1 – 2 – 4 // 6 – 3 – 5 – 6 – 5 // 1 – 5 – 3 – 4 – 6 // 3 – 1 – 4 – 4 – 6 // 3 – 4 – 4 – 6 – 6 // 4 – 3 – 6 – 5 – 6 // 6 – 5 – 4 – 1 – 1 // 2 – 5 – 1 – 2 – 5 // 3 – 2 – 2 – 3 – 2 // 6 – 3 – 4 – 5 – 4 // 4 – 6 – 3 – 6 – 4 // 6 – 4 – 5 – 6 – 6 // 1 – 2 – 2 – 2 – 5 // 3 – 5 – 2 – 4 – 4

En sens inverse, parier sur la sortie de 6 en trois coups apparaîtra nettement plus risqué…

Bien entendu, on pourra aussi explorer par simulation la seconde « croyance » du chevalier de Méré – le fait qu'il y aurait avantage à parier sur la sortie de deux 6 (« sonnez ») en 24 lancers de deux dés.

Séminaire de didactique des mathématiques
Résumés des séances

➔ Séance 18 : mardi 10 mars 2009

Programme de la séance. 1. Évaluation et développement – Questions cruciales // 2. Forum des questions // 3. Recherches dans les Archives

1. Évaluation et développement – Questions cruciales

Nous reprendrons ici, pour le poursuivre, le travail à propos des questions cruciales que nous avons engagé à partir de la fabrication d'un guide d'AER de statistique en 5^{e}. Nous étions partis de la question suivante : quand on dit d'une commune française qu'elle a beaucoup d'habitants, ça veut dire qu'elle en a combien ?, qui modifiait la question initiale travaillée lors de la troisième séance de travail dirigé.

Sauf erreur de ma part, 13 groupes ont rendu une suite de questions cruciales : en dehors de deux groupes qui sont passés totalement à côté du sujet, certains principes semblent avoir été entendu par la plupart de la classe, malgré la subsistance d'incompréhensions.

Ainsi par exemple, certains mobilisent-ils très rapidement la notion de fréquence. Par exemple :

Q1 : Comment déterminer si une ville de N habitants, c'est une grande ville ?
Q2 : Comment déterminer s'il y a beaucoup de villes de plus de N habitants ?
Q3 : Comment déterminer la fréquence des villes de plus de N habitants ?
Q4 : Comment calculer l'effectif total des communes ?

Mettre Q3 comme successeur de Q2, c'est faire l'hypothèse « qu'assez vite », les élèves vont répondre à Q2 en disant « en déterminant la fréquence ». Or c'est a priori précisément la notion de fréquence, entre autres, que l'on va vouloir faire émerger. On notera que la question Q2, reprise par la totalité des propositions à partir du travail du binôme considéré lors de la dernière séance, se place dans le scénario d'une classe qui, à la question Q1, répondrait par exemple « qu'il faudrait voir s'il y a beaucoup de villes de plus de N habitants ».

Le travail suivant remplace de manière pertinente la notion de fréquence par celle de proportion, que l'on peut penser familière aux élèves en 5^{e} :

Q1 : Comment déterminer si une ville de N habitants, c'est une grande ville ?
Q2 : Comment déterminer s'il y a beaucoup de villes de plus de N habitants ?
Q3 : Comment déterminer la proportion de communes de plus de N habitants ?
Q4 : Comment représenter visuellement les résultats ?

La question Q4 surprend : quelle réponse à Q3 amènerait à poser Q4 comme ingrédient pour solutionner Q3 ? Il manque au moins des intermédiaires pour faire apparaître Q4 comme cruciale par rapport à Q3.

Ce manque d'intermédiaires est le défaut le plus fréquemment constaté dans les travaux rendus.

Considérons par exemple le travail suivant :

Q1 : Comment déterminer si une ville de N habitants, c'est une grande ville ?
Q2 : Comment déterminer s'il y a beaucoup de villes de plus de N habitants ?

> On va les trier par ordre croissant du nombre d'habitants ;
> L'idée qui va émerger serait de déterminer l'effectif de l'ensemble des villes de plus de N habitants.

Est-ce que cet effectif signifie quelque chose ? Est-ce que ce serait beaucoup à l'échelle du pays / du département ?

On va alors faire émerger l'idée de rapporter l'effectif à l'effectif total : on a fait émerger la notion de fréquence.
(...)

Il explicite un intermédiaire qui permet de faire surgir la notion de proportion que l'on pourrait structurer ainsi en termes de questions cruciales :

Q2 : Comment déterminer s'il y a beaucoup de villes de plus de N habitants ?
Q3 Comment compter le nombre de villes de plus de N habitants dans le fichier ?
Q4 Comment compter le nombre de villes de plus de N habitants dans le fichier trié par ordre croissant de population ?
Q5 Comment savoir si c'est beaucoup ou pas ?
Q6 Comment déterminer la proportion de villes qui ont plus de N habitants ?

Ce découpage en questions cruciales plus fin est un outil indispensable du professeur dans la gestion de l'AER : c'est lui qui va permettre de relancer la dynamique de l'étude, et on aura avantage à prévoir plusieurs suites de questions cruciales suivant les réponses qui vont pouvoir émerger de la classe. On rappelle que, bien entendu, le découpage en questions cruciales ne doit pas être donné à priori, mais co-construit par la classe et le professeur, l'objectif étant que les élèves arrivent, au fur et à mesure, à poser eux-mêmes les questions cruciales, le professeur se « contentant » le plus souvent de relancer l'étude par des questions du type : où en est-on ? Que faire maintenant pour progresser ?

On examinera maintenant successivement deux travaux qui ont été davantage détaillés.

ASTIER Sylvain, DEVILERS Alexandra, MAYSOU Elodie
Q2 : Est-ce qu'une ville de N habitants est une grande ville ?
Les élèves disposent du fichier Excel contenant la liste des villes des départements des Alpes de haute Provence et des Bouches du Rhône ainsi que le nombre d'habitants de chacune des villes. Toutefois les élèves ont à travailler sur le département des Alpes de Haute Provence.
Q3 : Y a-t-il beaucoup de villes ayant au moins N habitants ?
A l'aide du fichier Excel, les élèves doivent compter le nombre de villes ayant au moins N habitants.
Pour cela, les élèves auront à ranger les villes par nombre d'habitants croissant.
Ils leur restera à compter le nombre de ville en relevant le numéro des lignes.
(formule : dernière ligne – première ligne + 1)
Q4 : Que représente ce nombre par rapport au nombre total de villes ?
On espère que les élèves vont exprimer une proportion à l'aide d'un pourcentage.

<u>Q5 :</u> Dans ce cas précis est ce que l'on peut conclure quand à la question posée « Qu'est ce qu'une grande ville ? »

- Si le pourcentage obtenu est très grand la classe répondra sans ambigüité que « non » et si le pourcentage est faible alors la classe répondra « oui ».
- On est alors amené à réfléchir si le pourcentage tourne autour de 50% .

La classe pensera alors à augmenter le nombre N car un pourcentage de 50% sera associé à une ville moyenne. Ensuite la classe recommence le processus jusqu'à l'obtention d'une nouvelle proportion.

<u>Q6 :</u> Est-ce que pour N habitants une ville sera considérée comme une grande ville dans tous les départements ?

La classe doit alors se demander si cette réponse peut s'étendre à tous les départements et ainsi tester cette hypothèse sur le département des Bouches du Rhône.

<u>Q7 :</u> Est-ce que dans le deuxième département une ville de N habitants est une grande ville ?

Les élèves remarqueront que les réponses varient d'un département à l'autre et pourront conclure que cela dépend complètement du département choisit et qu'un nombre d'habitant N ne peut pas fixer la barre pour une grande ville pour n'importe quel département de France.

Commentaires collectifs effectués oralement. Synthèse lapidaire.

Réduire le travail à un département sans justification n'est pas la meilleure chose à faire. Il est d'une meilleure politique de faire travailler la classe sur deux départements de structure un peu différente de façon à faire émerger la notion de proportion. On peut également le faire avec un seul département mais en situant le travail dans la perspective de l'étude de la population complète. Dans tous les cas, il faut clairement faire apparaître la problématisation statistique de la question (on recueille une série de données qu'on étudie). On retrouve le problème du rangement par ordre croissant déjà signalé, mais amené par la nécessité de compter. La question Q4 n'apparaît pas comme cruciale pour Q3, ou du moins, il manque un intermédiaire (voir précédemment).

Francine Bert, Elodie Vadé

<u>Question 1</u> : Une grande ville, c'est combien d'habitants ?

<u>Question 2</u> : Comment déterminer si une ville de N habitants est une grande ville ?

Réponse probable des élèves : « On regarde par rapport à la plus grande ville ».
A conserver en disant que oui c'est une bonne idée mais qui présente le défaut de ne pas être représentatif du reste de la population.
Réponse : on regarde par rapport à l'ensemble des autres villes.

<u>Question</u> 3 : Pourquoi peut-on dire qu'une ville est grande, en comparaison des autres villes? Par exemple : pourquoi pourriez-vous dire qu'une ville de 4000 habitants est une grande ville?

Réponse probable des élèves : «Dire qu'une ville est grande, ça veut dire qu'elle est plus grande que les autres, elle est plus grande que beaucoup d'autres. ». (Selon la région où ils habitent, les élèves peuvent citer des exemples, et on peut les orienter vers cette réponse).
Technique qui devrait émerger : pour déterminer si une ville de N habitants est grande, il faut donc regarder combien y a-t-il de villes de plus de N habitants (ou inversement combien y en a-t-il de moins de N habitants) . Pour cela, on trie les villes par ordre décroissant d'habitants et on compte combien il y a de villes de plus de N habitants, en faisant varier N (on utilise un compteur). S'il y a peu de villes de plus de N habitants, on peut dire qu'une ville de N habitants est une grande ville.
On peut d'abord faire ce travail pour N=4000, puis on fait varier N.

<u>Question 4</u> : Sur quoi vous basez-vous pour dire qu'il y a « peu » de villes de plus de N habitants?

Réponse: on regarde le nombre de villes de plus de N habitants par rapport au nombre total de villes.
Technique qui devrait émerger : calculer les fréquences des villes de plus de N habitants, pour chaque N.
On peut se mettre d'accord sur une fréquence : par exemple, s'il y a moins de 20% de villes de plus de N habitants, on peut dire qu'une ville de N habitants est une grande ville.

Pour la question 2 :
Autre réponse possible des élèves : On regarde la plus grande ville (en enlevant les deux plus grandes valeurs) et la plus petite ville.
On peut regrouper les villes en classes d'amplitude 1000 habitants.
Par exemple, pour le 04, la plus petite ville comporte 7 habitants ; la plus grande ville comporte 6954 habitants (on a enlevé les deux plus grandes villes). On peut donc faire des tranches de 1000 habitants (pour avoir sept tranches) . Et on peut dire qu'une ville appartenant à la dernière tranche sera une grande ville.
En triant les villes dans l'ordre croissant, on voit que la dernière tranche (villes de plus de 6000 habitants) comporte 1 seule ville. On voit que ces tranches ne sont pas très équilibrées. On remarque qu'il y a énormément de villes de moins de 1000 habitants. Une ville de 4000 habitants n'est-t-elle pas alors une « grande ville » par rapport au reste des villes du 04?

Autre question possible pour la question 3 : Est-ce suffisant de savoir dans quelle tranche se situe la commune de N habitants ? N'a-t-on pas besoin d'un autre élément ?
Réponse : Il faut compter le nombre de communes par tranches.
On peut alors leur faire calculer les effectifs de chaque tranche. Puis calculer les effectifs des villes de plus de 1000 habitants, 2000, 3000 …. de plus de 6000 habitants. Puis, comme précédemment, les inciter à calculer les fréquences.

Question : Cependant, on a seulement six fréquences possibles. Si on veut décider d'une fréquence qui nous convient, comment faire ?

Réponse : on peut regrouper les villes en classe d'amplitude plus petite ou on amène les élèves à faire le même travail que précédemment : calcul des effectifs, fréquences des villes de plus de N habitants en faisant varier N.

Commentaires collectifs effectués oralement. Synthèse lapidaire.

Pour la question 2, la réponse proposée est trop directive encore, elle limite le topos des élèves. Il faut faire tester la validité de la proposition pour la disqualifier. Si cette réponse émerge parmi d'autres réponses qui paraissent davantage adaptées, le professeur pourra proposer de la laisser de côté pour le moment, et y faire revenir la classe ultérieurement. On voit que le travail de réponse est nettement détaillé et fait apparaître qu'il y aura du travail intermédiaire à faire entre deux questions identifiées, travail qu'il faudra structurer en questions cruciales.

On poursuivra ce travail, pour le terminer, en liaison avec la fabrication d'un guide d'AER et la réponse à la question suivante :

1) Selon moi, aujourd'hui, préparer un chapitre c'est accomplir la suite de types de tâches dans l'ordre privilégié suivant (bien qu'il soit entendu que chaque étape peut-être l'occasion d'une rétroaction sur les étapes suivantes) : 2) Déterminer l'OM à l'aide du programme, des documents d'accompagnement et du corpus des exercices du livre de classe ; 3) Amalgamer l'OM et faire un avant-projet de synthèse 4) Diffracter l'OM et planifier son enseignement en programmant dans le temps les AER, exercices et bouts de synthèse - la conception des AER se faisant à cette étape 5) Concevoir le test d'entrée en fonction des besoins de l'OM diffractée de l'étape 3. Me trompé-je en énonçant ainsi la technique pour « préparer un chapitre » ? (5e, 17)

Avant de clore, provisoirement donc, cette rubrique on notera qu'elle apporte des éléments de réponse à la question suivante :

Au sujet d'une AER dans le chapitre « angles » celle que je compte proposer semble un peu difficile (autour d'un problème, on montre à un moment la propriété « si les droites sont parallèles, les angles alternes internes sont égaux », car c'est cette propriété qui permet de tout dénouer, puis par tout un jeu d'angles correspondants et alternes internes, on conclut). Dois-je en proposer un autre, plus simple, plus ciblé, mais moins « attraction » pour les élèves ? (BF, 5^{e}, 17)

Il faut dans le cas décrit préparer une suite de questions cruciales « serrée » pour garantir que la difficulté analysée puisse être dépassée par la classe, sous réserve bien entendu d'avoir toiletté l'activité de difficultés qui peuvent paraître, a posteriori, superflues par rapport au travail que l'on a à effectuer.

2. Forum des questions

Fonctions affines, systèmes et équations de droites

1. Dans le chapitre fonction affine, faut-il ne jamais faire intervenir les systèmes (afin de trouver a, b) mais plutôt toujours se servir de $\frac{(\Delta f)}{(\Delta x)} = a$? Les systèmes seront vus plus tard avec les droites dans le plan...
(17, 2de)

2. Le programme de seconde demande de ne traiter les équations de droites que sous la forme « réduite » : $y = ax + b$ ou $x = c$. Comment alors faire le lien avec l'interprétation graphique du nombre de solutions des systèmes de deux équations à deux inconnues qui sont en général sous la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$? (17, 2de)

1. Reprenons l'exemple cité lors de la séance 16, issu d'un ouvrage pour la classe de 3e.

5 Détermination d'une fonction affine à partir de deux images

Déterminer la fonction affine f telle que $f(2) = -3$ et $f(4) = 1$.

1re étape On écrit $f(x)$ sous la forme $ax + b$. Il s'agit donc de déterminer a et b.

$f(x) = ax + b$. L'image de 2 est -3, donc $2a + b = -3$. (E_1)
L'image de 4 est 1, donc $4a + b = 1$. (E_2)

2e étape On résout le système formé des équations (E_1) et (E_2).

$$\begin{cases} 2a + b = -3 & (E_1) \\ 4a + b = 1 & (E_2) \end{cases}$$

On soustrait membre à membre les deux équations pour obtenir une égalité ne comportant que la seule inconnue a :

$2a - 4a = -3 - 1$,
soit $-2a = -4$.
Donc $a = 2$.

On remplace a dans l'une des équations. Dans (E_1), on obtient :

$2 \times 2 + b = -3$,
soit $4 + b = -3$.
D'où $b = -7$.

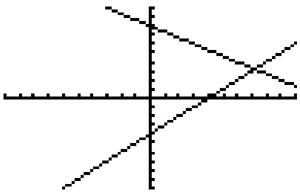
La fonction cherchée est donc la fonction affine définie par $f(x) = 2x - 7$.

La technique consiste donc à écrire d'abord le système $\begin{cases} x_0 a + b = y_0 \\ x_1 a + b = y_1 \end{cases}$ puis à soustraire membre à membre les deux équations pour obtenir $x_0 a - x_1 a = y_0 - y_1$ puis enfin $a = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$.

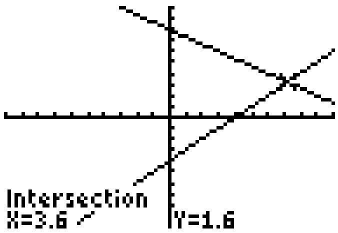
Si l'on a dans l'équipement technologique la définition du coefficient directeur comme le quotient de la différence des images par la différence des points, on n'a nul besoin de la retrouver par une mise en système. En revanche, la mise en œuvre de la technique précédente sur quelques spécimens peut permettre de faire émerger, s'il en est besoin, l'expression du coefficient directeur.

2. On dispose en seconde du fait qu'une droite est caractérisée par une équation de la forme $y = ax + b$ ou $x = m$. Le travail sur les systèmes, et notamment la méthode de substitution, va alors amener à transformer une équation du type $ax + by = c$ en une équation du type $y = \left(\frac{c}{b}\right) - \left(\frac{a}{b}\right) x$ si b est non nul, $x = \frac{c}{a}$ si b est nul et a ne l'est pas, ce qui permettra de retrouver les équations de droites. Une technique que l'on peut mettre en place est alors de mettre les équations du système sous la forme $y = \ldots$, de tracer les courbes représentatives des deux fonctions affines à la calculatrice pour obtenir la ou les solutions du système, ou alors le fait qu'il n'a pas de solution, et de déduire le résultat obtenu de la théorie dont on dispose.

Ainsi par exemple, si l'on a à résoudre le système $\begin{cases} -x + y = -2 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$, on commencera par écrire qu'il est équivalent à $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 4 - \left(\frac{2}{3}\right) x \end{cases}$. Une calculatrice graphique donne :



puis



Le point d'intersection a pour abscisse x qui vérifie $x - 2 = 4 - \left(\frac{2}{3}\right) x$ soit $\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)\right) x = 6$ ou encore $x = 6\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{18}{5}$=3,6. Son ordonnée est l'image de x par l'une des deux fonctions : $y = 3{,}6 - 2 = 1{,}6$.

La mise en œuvre de la technique de substitution pourra donc faire émerger le fait qu'une expression $ax + by = c$ avec a ou b non nul est une équation de droite, ce que l'on pourra enregistrer dans la synthèse, mais ce résultat ne sera pas véritablement exploité. Et surtout, on n'aura pas le fait que toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Fonctions affines encore

Concernant les fonctions affines, le programme ne parle que de la caractérisation des fonctions affines par le fait que « l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable ». Parler des variations des fonctions affines est-il par conséquent hors programme ? (17, 2^{de})

Lorsqu'une notion n'apparaît pas explicitement dans le programme, et qu'elle n'est pas signalée « hors programme », la règle est d'examiner la mesure dans laquelle elle s'avère utile à l'accomplissement des types de tâches au programme et elle s'insère dans l'ensemble du programme. Si l'on considère ici le secteur des fonctions, il serait assez étrange de parler du sens de variations de toutes les fonctions de référence, sauf des fonctions affines, d'autant que le programme de troisième ne mentionne pas cette notion. Il reste à voir dans quelle mesure on peut la fonctionnaliser dans le cadre du programme.

Comme on l'a déjà vu dans des séances précédentes, la solution est le plus souvent à rechercher au niveau du secteur. Examinons les techniques suivantes relatives à la résolution d'inéquations, type de tâches qui figure au programme du secteur considéré :

Résoudre $-7x+2>2x-4$.

$-7x+2=2x-4 \Leftrightarrow 9x=6 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$. La fonction affine définie par $f(x)=(-7x+2)-(2x-4)$ étant décroissante (coefficient directeur -9), l'ensemble des solutions est]-∞;2/3[.
Vérification calculatrice : on représente la fonction *f*.

Résoudre $g(x)=(4-x)(x+2)>0$.
La fonction affine $f_1(x)=4-x$ s'annule en x = 4. Comme elle est décroissante, elle est positive sur $]-\infty\,;4]$ et négative sur $[4\,;+\infty[$.
La fonction affine $f_2(x)=x+2$ s'annule en x = -2. Comme elle est croissante, elle est positive sur $[-2\,;+\infty[$ et négative sur $]-\infty\,;-2]$.
Les deux fonctions ne pouvant pas être toutes les deux négatives, le produit est strictement positif quand elles sont toutes deux strictement positives, ce qui est réalisé sur l'intervalle $]-2\,;4[$.
Vérification calculatrice : on représente la fonction *g*.

On a là deux techniques qui utilisent les variations des fonctions affines pour simplifier notablement le travail algébrique puisque l'on diminue en particulier les risques d'erreur de changement de signe dans les inégalités – et donc le rendre plus fiable.

Compte tenu des perturbations sonores, les matériaux de réponses aux deux questions ci-dessous ont été rapidement parcourues en séance. Ils sont à étudier en autonomie.

Les archives ! Les archives vous dis-je !

Comment concevoir une AER sur le thème des puissances en en amenant une raison d'être ? (4e, 17)

Dans ce type de questions, les archives du séminaire s'avèrent une ressource précieuse et, disons-le, irremplaçable. Une recherche permet par exemple de rapporter le passage suivant du séminaire 2003-2004 dont nous ferons une lecture commentée :

• On s'arrête ici sur une question qui n'est pas sans lien avec la séance analysée plus haut.

Des puissances, pour quoi ?

Que serait une AER possible pour l'introduction de la notation 10^n ? Mon idée est de présenter un nombre tel que 1 000 000 000 000 000 …, de leur faire remarquer qu'un nombre aussi long à écrire peut être difficile à comparer ou à multiplier (il faut compter les zéros). Mais comment ne pas « balancer » la notation 10^n ? (Sylvain Dotti, JT, 4e, 11)

① Historiquement, la notation exponentielle ne s'est imposée que très lentement.

❶ Le passage suivant de l'ouvrage classique de Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations* (Dover, 1993) permettra de s'en convaincre.

An important step was taken by Romanus [Adrien Romain, Adriaan van Roomen (1561-1615)] who uses letters and writes bases as well as the exponents in expressions like

A(4)+*B*(4)+4*A*(3) *in B*+6*A*(2) *in B*(2)+4*A in B*(3) which signifies $A^4+B^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3$. A similar suggestion came from the Frenchman, Pierre Hérigone [1580-1643], a mathematician who had a passion for new notations. He wrote our a^3 as $a3$, our $2b^4$ as $2b4$, and our $2ba^2$ as $2ba2$. The coefficient was placed *before* the letter, the exponent *after*. In 1636 James Hume brought out an edition of the algebra of Vieta [*L'Algèbre de Viète, d'une méthode nouvelle claire et facile*, Paris, 1636], in which he introduced a superior notation, writing down the base and elevating the exponent to a position above the regular line and a little to the right. The exponent was expressed in Roman numerals. Thus, he wrote A^{iii} for A^3. Except for the use of the Roman numerals, one has here our modern notation. Thus, this Scotsman, residing in Paris, had almost hit upon the exponential symbolism which has become universal through the writings of Descartes.

❷ C'est dans sa *Géométrie* de 1637 que Descartes introduisit la notation aujourd'hui adoptée. À ce propos, Cajori note encore :

Hérigone and Hume almost hit upon the scheme of Descartes. The only difference was, in one case, the position of the exponent, and, in the other, the exponent written in Roman numerals. Descartes expressed the exponent in Arabic numerals and assigned it to an elevated position. Where Hume would write $5a^{\text{iv}}$ and Hérigone would write $5a4$, Descartes wrote $5a^4$. From the standpoint of the printer, Hérigone's notation was the simplest. But Descartes' elevated exponent offered certain advantages in interpretation which the judgment of subsequent centuries has sustained.

② En conséquence de ce qui précède, il n'est aucunement question de faire « inventer » par les élèves la notation 10^5 pour 100 000, etc. ! La conception d'une AER à ce sujet gagnera à prendre place au sein d'un PER fondé sur la question :

Q. Comment calculer avec des « grands nombres » ?

On se borne dans ce qui suit à quelques observations préalables à l'élaboration d'un tel PER.

❶ Dans une première étape, on peut par exemple s'être arrêté sur une notation non terminale permettant une ébauche de règles de calcul, comme le montre le calcul suivant :

$$342\,000\,000 + 480\,000 = 342[6] + 48[4] = 34200[4] + 48[4] = 34248[4] = 342480000.$$

❷ Il n'y a aucune raison ici pour que la notation exponentielle apparaisse : cette dernière est en effet liée, non à l'addition mais à la ***multiplication*** : une AER convenable devra ainsi conduire à vouloir exprimer ***multiplicativement*** sous la forme 48×100 ou même $48 \times 10 \times 10$ le nombre que, dans la notation précédemment introduite on écrirait 48[2]. Voir que l'on a

$$48[n] = 48\underbrace{\times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}}$$

est la difficulté à vaincre ; le passage, ensuite, de l'écriture $48 \times 10 \times \ldots \times 10$ à l'écriture 48×10^n est simplement commode et ne pose pas de difficulté conceptuelle majeure…

③ Que peut-on viser avec une classe de 4^e^ ? On s'en tiendra à quelques notations en vrac.

❶ Soit le nombre $a = 123456789$, dont on veut calculer le carré. On a en fait : $a^2 = 123456789^2 = 15241578750190521$.

❷ Supposons que la calculatrice disponible ne fournisse pas le résultat (ou pas le résultat exact) : on songera ici, par exemple, à la calculatrice disponible sur certains modèles de téléphones mobiles. On aura par exemple $12345^2 = 152399025$ mais la calculatrice se refusera à donner 123456^2…

❸ On peut alors procéder ainsi : on écrit d'abord que $123456789 = 1234 \times 10^5 + 56789$. Il vient alors : $123456789^2 = (1234 \times 10^5 + 56789)^2 = 1234^2 \times 10^{10} + 2 \times 1234 \times 56789 \times 10^5 + 56789^2$. La calculette disponible permet d'obtenir les produits utiles ; il vient : $123456789^2 = 1522756 \times 10^{10} + 140155252 \times 10^5 +$

3224990521 = (152275600000 + 140155252) × 10^5 + 3224990521. On procède alors à deux additions successives « à la main », qui donne le résultat attendu.

• On examine à la lueur de ce qui précède deux nouvelles questions.

① La première question est la suivante :

Exposants négatifs ?

Dans le chapitre sur les puissances, comment motiver le fait de calculer des puissances de nombres négatifs pour des élèves de 4e ? (Stéphane Bardau, OS, 4e + soutien & IDD en 5e, 13)

❶ Le travail fait sur les puissances a montré jusqu'à présent deux grands types d'emplois : les puissances servent à ***calculer*** (comme ci-dessus), et elles servent à ***modéliser*** (comme dans la séance observée en 4e). L'utilité des puissances de nombres négatifs devra être recherchée dans ces deux champs d'intervention. On laissera ici le problème ***ouvert*** – et ***à chercher*** – et on se bornera, à titre d'illustration, à examiner le type de problèmes auquel il appartient sur l'exemple des ***exposants*** négatifs : « comment motiver le fait de calculer des puissances d'exposant négatif pour des élèves de 4e ? »

❷ Supposons une population de bactéries qui double chaque heure ; un comptage a permis d'établir que l'effectif courant est $N = 1792$. Quel était l'effectif il y a trois heures ? Quel sera l'effectif dans cinq heures ? La réponse à la seconde question est donnée par l'expression $N \times 2^5 = 1792 \times 32 = 57344$ tandis que la réponse à la première question sera donnée par : $N \times 2^{-3} = 1792 \times 0{,}125 = 224$. C'est autour de tels questionnements que l'on pourra faire surgir l'emploi de la notation a^{-n}.

❸ S'agissant du calcul, le programme lui-même apporte ce commentaire :

Modifier l'écriture d'un nombre comme 25 698, 236 sous la forme $2{,}5698236 \times 10^4$ ou $25\,698\,236 \times 10^{-2}$ ou $25{,}698236 \times 10^3$ est une activité que doivent pratiquer les élèves.

Bien entendu, l'intérêt de telles activités de calcul doit être précisé. On aura par exemple :

$1{,}77245385^2 = (177245385 \times 10^{-8})^2 = 177245385^2 \times 10^{-16} = (17724 \times 10^4 + 5385)^2 \times 10^{-16} = (17724^2 \times 10^8 + 2 \times 17724 \times 5385 \times 10^4 + 5385^2) \times 10^{-16} = 17724^2 \times 10^{-8} + 2 \times 17724 \times 5385 \times 10^{-12} + 5385^2 \times 10^{-16} = 3{,}14140176 + 0{,}00019088748 + 28998225 \times 10^{-16}$.

Il vient :

$$\begin{array}{l} 3{,}14140176 \\ 0{,}00019088748 \\ 0{,}0000000028998225 \\ \hline 3{,}1415926503798225 \end{array}$$

On laisse le lecteur poursuivre la recherche.

Les unités dans les calculs

Peut-on mettre des unités dans un calcul ? Est-ce plus clair pour les élèves ? Par exemple: 2h 57 min - 1 h 13 min = 1 h 44 min, ou tout simplement : 3,8 km - 2 km = 1,8 km. (YP, 17, 5e & 4e)

Une recherche dans le séminaire de la même année apporte les matériaux suivants :

❶ Une technique peut être insuffisamment ***fiable***. C'est ainsi que le calcul, traditionnel en France, non sur des ***grandeurs*** (comme 5 km, 32 cm^2, 18 m/s^2, 12 g/dm^3, etc.), mais sur les seules ***mesures*** de ces grandeurs (5, 32, 18, 12, etc.), c'est-à-dire en excluant les ***unités*** des calculs pour ne les réintroduire qu'à la fin, constitue une technique ***peu fiable***, si on la compare avec la technique, certes plus « lourde », consistant à calculer directement sur les ***grandeurs***, c'est-à-dire ***avec les unités***.

♣ Soit ainsi à calculer la masse linéique M, en g/cm, d'un barreau d'acier de section constante, de 4 dm de longueur, qui pèse 2,85 kg ; la masse linéique est, par définition, le quotient de la masse par la longueur ; on a donc : M = $\frac{2,5\ kg}{4\ dm} = \frac{2,85\left(10^3\ g\right)}{4\left(10\ cm\right)} = \frac{285\ g}{4\ cm} = \frac{285}{4}$ g/cm = 71,25 g/cm.

♦ De même, soit à déterminer la masse M, en grammes, de 9 cm^3 de zinc, sachant que la masse volumique du zinc est de 7,29 kg/dm^3 ; par définition de la masse volumique, la masse est égale au produit de la masse volumique par le volume ; on a donc :

M = (7,29 kg/dm^3)(9 cm^3) = (7,29kg·dm^{-3})(9cm^3) = 7,29(10^3g)$(10cm)^{-3}$(9cm^3) = 7,29 × 9 g ≈ 65,6 g.

❷ Bien d'autres cas peuvent être cités pour illustrer le caractère ***défectueux*** de certaines techniques mises entre les mains des élèves. Cette pénurie de techniques adéquates est d'autant plus remarquable que les technologies nécessaires pour produire ces techniques sont parfaitement disponibles !
(...)

4. La question de la présence des unités dans les calculs a été abordée dans la séance 16 : contre une tradition encore dominante, la technique préconisée consiste ***à calculer avec les unités***, ce qui a de multiples avantages, dont certains seront soulignés ici.

① Le calcul incluant les unités, c'est-à-dire le calcul sur des ***grandeurs***, et non sur leurs ***mesures*** par rapport à des unités fixées, permet de donner des définitions ***indépendantes des unités***. C'est ainsi que la vitesse est le quotient de la distance parcourue par la durée du parcours, et ce ***quelles que soient les unités de temps, de distance et de vitesse utilisées***.

❶ Si par exemple « une voiture parcourt 800 m en 45 s », sa vitesse est $v = \frac{d}{t} = \frac{800\ m}{45\ s} = \frac{800}{45}$ m/s ≈ 18 m/s. La calculatrice TI-89 donne ainsi :

❷ Si l'on veut la vitesse précédente en km/h, on écrira :

$$v = \frac{800\ m}{45\ s} = \frac{160\ m}{9\ s} = \frac{160 \times \left(\frac{1}{1000}\right) km}{9 \times \left(\frac{1}{3600}\right) h} = 64 \text{ km/h.}$$

La TI-89 donne ici :

❸ Notons que l'emploi des unités permet d'éviter des résultats absurdes que l'usage des seules mesures tend à induire entre les mains des élèves : à propos d'un cycliste qui a roulé à la vitesse moyenne de 40 km/h pendant 5 h et dont on demande quelle distance il a parcouru, certains élèves seront tentés de répondre par un nombre (de kilomètres) égal à $\frac{40}{5} = 8$… Alors que l'on a très simplement : $d = vt = 40\ \frac{km}{h} \times 5\text{ h} = 200$ km.

② Il est didactiquement judicieux d'***exploiter*** (et donc de développer) la capacité de calculer à l'aide de ***puissances d'exposant entier relatif***, qui doit se construire en 4e, pour manipuler de manière intelligible et fiable les unités de grandeurs composées en combinant l'emploi des ***fractions*** et l'emploi des ***puissances***.

❶ On aura ainsi par exemple : $9\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = \frac{9\ km}{h} = \frac{9000\ m}{3600\ s} = \frac{9000}{3600}\ \frac{m}{s} = 2{,}5\text{ m s}^{-1}$.

❷ Si on a trouvé dans un ouvrage spécialisé qu'un escargot avance à la vitesse moyenne de 5,4 m/h et qu'on veuille exprimer cette vitesse en ***décimètres par 5 minutes***, on calculera ainsi (par exemple) : 5,4 m/h = $\frac{5{,}4\ m}{h} = \frac{54\ dm}{60\ min} = \frac{9\ dm}{10\ min} = \frac{\left(\frac{9}{2}\right) dm}{5\ min} = \frac{9}{2}$ dm/(5 min) = 4,5 dm/(5 min).

③ Ce qui précède s'étend à des contextes autres que le calcul d'une ***formule***. Il est ainsi tout à fait justifié de résoudre une ***équation*** en conservant les unités, notamment dans la préparation des deux membres de l'équation, ce qui permettra de vérifier qu'ils ont bien la même « dimension », avant d'omettre les unités dans l'étape de résolution proprement dite. (...)

On notera que cette technique est justifiée dans les passages précédents par la ***notion de grandeur*** : « mettre les unités dans un calcul », c'est calculer sur les ***grandeurs***, et non sur leur mesures. La question posée souligne donc le fait que, sans doute au moins pour l'auteure de la question, la notion de grandeur n'est pas bien intégrée dans l'équipement praxéologique professionnel. Les archives du séminaire contiennent des justifications détaillées de cette technique, prenant appui sur les grandeurs et sur la notion d'espace vectoriel. On les retrouve en substance dans le document d'accompagnement du programme de collège à propos du domaine « grandeurs et mesure ».

À suivre

3. Recherches dans les Archives

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous apprennent les Archives sur la géométrie dans l'espace ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Le programme de seconde en géométrie (géométrie dans l'espace) demande en « capacités attendues » : « Manipuler, construire, représenter des solides ». Comment évaluer cette compétence ? Doit-on faire construire un solide en devoir surveillé ? (PAR, 15)
2. Que pourrais-je choisir comme question directrice pour le thème « Géométrie dans l'espace » ? exemple : pour le thème Nombres : « ces deux nombres sont-ils égaux ? » (NC, 8)
3. Comment donner du sens à la géométrie dans l'espace ? Quel type d'activité faut-il donner ? (AD,11)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Anne Martinet, Marion Rubin et Élodie Vadé

b) Une deuxième recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Les « cahiers d'AER » doivent-ils témoigner de tous les essais faits lors d'une recherche, y compris les essais inaboutis ? Sinon, quel partage envisager entre brouillon et cahier d'AER ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Comment adapter le dispositif AER aux 6e qui ont une puissance de feu très faible, notamment au niveau des traces écrites ? (LP, 5) 2. Au cours d'une AER, est-il pertinent d'écrire au tableau une proposition fausse d'un élève pour rebondir avec la classe sur l'erreur, au risque d'entendre à plusieurs reprises « faut-il écrire cela ? » et du coup avoir ce problème à gérer, ou bien seulement dire les choses à l'oral ? (OD, 14)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Nicolas Mizoule, Raphaël Rigaud et Florian Van Becelaere

Quelles praxéologies, ou quelle modification de praxéologies, les recherches précédentes ont-elles permis ?

a)

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à l'***enseignement des nombres négatifs*** au collège ?

• Le compte rendu de la recherche s'était efforcé de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Comment introduire les nombres relatifs en classe de cinquième ?(12, 5e) 2. J'ai du mal à expliquer à mes élèves que « soustraire un nombre relatif, c'est ajouter son opposé ». Comment rapprocher cela de la vie courante ? (11, 5e)

• Cette recherche avait été confiée au trinôme formé de Souaad Benadi, Sihame El Khaine, David Félix.

b)

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant à ***l'effet des attentes formulées à l'endroit des élèves sur leurs performances scolaires ? (effet Pygmalion)*** ?

• Le compte rendu de la recherche s'était efforcer de présenter des éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Dans ma classe un élève me rend depuis peu des copies quasi blanches, sous prétexte de ne pas être certain de la réponse. Que faire pour lui faire prendre confiance en lui pour qu'il réponde aux questions ? (à noter que cet élève a de lourds problèmes dus à son vécu : enfant quasi aveugle de naissance, greffe de la cornée, timidité maladive...) (11, 2de) 2. Trois de mes élèves ont un niveau de quatrième en math et justifient leur manque de travail / résultats par leurs difficultés. Y a-t-il des pistes pour les remotiver ? (Je les ai déjà pris à part, convoqués en AI... sans grands résultats) (9, 2de)

3. Sur quels critères doit-on se baser pour émettre un avis favorable ou défavorable pour un passage en première S ? Un élève peut-il aller contre l'avis du conseil de classe et « forcer » le passage en S malgré un avis défavorable ? (12, 2de)
4. Que faire avec un élève de 3^{e} qui n'a pas un niveau collège ? Aucune base, de ce fait aucune motivation... Il s'agit d'un élève passif ; si je suis à ses côtés, il tente de travailler ; dès qu'il est seul, il ne fait plus rien. Chez lui, aucun travail. (Par exemple : il ne sait pas faire des soustractions...) (12, 5^{e}, 4^{e} & 3^{e})
5. Un élève a abandonné. Il vient en aide individualisée, fait les exercices demandés avec difficulté. Mais il ne fait rien lors des DS. Que faire ? (12, 2de)
6. Suite au conseil de classe, le bilan du premier trimestre s'avère un peu inquiétant. En effet, seul 10 élèves peuvent prétendre passer en 1re (et plus précisément en 1re STG...). Comment faire réagir les élèves ? (12, 2de)

• Cette recherche avait été confiée au trinôme formé de Daniela Carafa-Bernard, Bruno Michel et Julien Fontana.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 19 : mardi 17 mars 2009

Programme de la séance. 1. Problématique et fonctionnement du Séminaire // 2. C2i2e // 3. Évaluation et développement – Concevoir une séquence // 4. Forum des questions

1. Problématique et fonctionnement du Séminaire

Programmation des séances

La semaine prochaine, GFP le matin ; pas de séminaire l'après-midi.

Les deux prochaines séances de TD : le mardi 7 avril et le mardi 19 mai (à confirmer)

Corpus B à rendre le 7 avril : sauf demande des tuteurs, on laisse les GFP gérer les questions liées à sa constitution.

1. Évaluation et développement – Concevoir une séquence d'enseignement

Selon moi, aujourd'hui, préparer un chapitre c'est accomplir la suite de types de tâches dans l'ordre privilégié suivant (bien qu'il soit entendu que chaque étape peut-être l'occasion d'une rétroaction sur les étapes suivantes) :
1) Déterminer l'OM à l'aide du programme, des documents d'accompagnement et du corpus des exercices du livre de classe ;
2) Amalgamer l'OM et faire un avant-projet de synthèse
3) Diffracter l'OM et planifier son enseignement en programmant dans le temps les AER, exercices et bouts de synthèse - la conception des AER se faisant à cette étape
4) Concevoir le test d'entrée en fonction des besoins de l'OM diffractée de l'étape 3.
Me trompé-je en énonçant ainsi la technique pour « préparer un chapitre » ?

1. On a là une proposition de technique relative à une partie de la question $\mathcal{Q}$ que nous avons mise au cœur du travail de formation : Comment concevoir et mettre en œuvre une séquence d'enseignement en classe n sur le thème θ figurant au programme de la classe ?

Nous avions donné, lors de la séance 6 du séminaire une première mise en forme reproduite ci-dessous :

1.1. Comment concevoir et mettre en œuvre une séquence d'enseignement en classe n sur le thème θ figurant au programme de la classe ?

Déterminer une organisation mathématique (OM) relative au thème θ considéré ;

Déterminer une organisation didactique (OD) relative à l'OM constituée ;

Mettre en œuvre l'OD fabriquée.

1.1.1. Comment déterminer une organisation mathématique (OM) relative au thème θ considéré ?

Déterminer les ***types de tâches*** et les ***techniques*** relatives à ces types de tâches que permet de justifier, de produire et de rendre intelligible la ***technologie*** θ relative à [T / τ] qu'il s'agit bien entendu également de déterminer. Cette détermination de l'organisation mathématique à étudier se fera par l'observation, l'analyse, l'évaluation et le développement d'OM $\mathcal{R}^{\lozenge}$ recueillies, et notamment le programme de la classe et son document d'accompagnement, le Séminaire et ses archives, des ouvrages, des observations de séances du maître de stage ou d'autres professionnels, etc.

Exemple : le travail effectué en GFP à propos du thème des fonctions affines en seconde.

Dans la constitution de l'organisation mathématique locale (OML) autour du thème θ, on l'articulera aux organisations mathématiques étudiées dans les classes antérieures auxquelles elle est reliée ainsi qu'aux organisations mathématiques locales du secteur, voire du domaine, dans lequel elle prend place dans la classe *n*.

Par exemple, pour les fonctions affines, on examinera au moins quelle place occupera cette OML dans le secteur des fonctions, d'abord en identifiant les types de tâches du secteur auxquels cette OML est reliée notamment parce qu'elle apparaît comme faisant partie de la technique qui leur est relative. Dans cette perspective, on déterminera au moins les types de tâches du secteur et leur articulation en termes de techniques.

1.1.2. Comment déterminer une organisation didactique (OD) relative à l'OM constituée ?

Six moments de l'étude, qui sont autant de fonctions didactiques, sont à réaliser à travers quatre dispositifs :

Moment de la ***(première) rencontre*** avec le ou les types de tâches, ***moment exploratoire*** et ***moment technologico-théorique*** dans le dispositif d'**AER** ;

Moment de l'***institutionnalisation*** de l'OM pour l'essentiel dans le dispositif de **synthèse** ;

Moment du ***travail*** de l'OM pour l'essentiel dans les ***exercices*** en classe et hors classe ;

Moment de l'***évaluation*** de l'OM dans les ***devoirs*** en classe et hors classe.

Nous avons mis en évidence que la conception d'une AER passait par le choix d'un problème, soit une situation assortie d'une question, dont le travail doit permettre de produire une partie de l'OM à étudier en s'appuyant sur des OM antérieurement étudiées et motivant l'OM à étudier. Dans cette perspective, la détermination de ***raisons d'être*** de l'OM à étudier s'avère essentielle. La détermination du problème passe par l'analyse des techniques déjà connues des élèves et leur portée : nous avons notamment vu que dans le domaine numérique, un changement dans le champ numérique des nombres en jeu permettait de disqualifier certaines techniques et motiver la fabrication d'une technique nouvelle.

Nous avons étudié la semaine dernière certaines conditions que la conception du moment de l'évaluation devait satisfaire : des devoirs surveillés « longs » peu nombreux (2 à 3 par trimestre) qui doivent comporter des types de tâches travaillés, avec des interrogations « courtes » plus fréquentes (une par quinzaine) et des devoirs à la maison fréquents (hebdomadaires, sauf la semaine du DS) mais courts. La correction des devoirs fait l'objet d'une annotation des copies détaillée et d'un rapport de correction.

À propos de la conception du moment de l'institutionnalisation, nous avons vu qu'elle passait par la réalisation de bilans intermédiaires préparant la synthèse, celle-ci gagnant souvent à être un peu différée pour réaliser la mise en forme d'une partie significative de l'OML.

Dans la conception du travail de l'OM, on peut donner un travail de mise en forme de la rédaction d'un exercice. Il convient de prévoir que chaque type de tâches étudié soit travaillé à travers à peu près trois spécimens.

1.1.3. Comment réaliser, mettre en œuvre, l'OD fabriquée ?

Nous avions repris cette mise au point lors de la séance 13, à la lumière du travail effectué dans l'intervalle, en le structurant moins nettement.

2. La question propose ainsi une technique qui, pour l'essentiel, est compatible avec ce qui précède, bien qu'encore un peu grossièrement découpée. Voyons cela.

2.1. On a vu d'abord dans les séances précédentes que, dans la détermination de l'OM, un ingrédient essentiel pouvait s'avérer être les archives du séminaire, ou le séminaire de l'année en cours. Ainsi par exemple, les deux questions suivantes :

J'ai du mal à déterminer une organisation mathématique sur le thème « Les configurations du plan ». A priori, pour moi, il ne s'agit que d'une reprise d'étude... Doit-on en faire un chapitre à part entière ? (2de, 17)
Comment motiver les fonctions cosinus et sinus ? (2de, 18)

ont-elles trouvés des éléments de réponse dans des séances antérieures. Voici par exemple ce qui figure dans le notes de la première séance du séminaire de cette année :

• Il faut noter que toute programmation doit être confrontée au programme de la classe, pour s'assurer qu'elle en respecte les contraintes. Par exemple, pour la classe de seconde et la programmation citée précédemment, la confrontation au programme de seconde montre d'emblée quelques problèmes. En effet, voici ce qu'indique le programme de la classe de seconde à propos de la Géométrie :

Deux objectifs principaux sont assignés à cette partie du programme : – développer la vision dans l'espace ; – proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes faits au collège. Pour dynamiser la synthèse et éviter les révisions systématiques, trois éclairages nouveaux sont proposés : les triangles isométriques, les triangles de même forme et des problèmes d'aires.

Or, dans la progression proposée, on voit scindé en deux chapitres séparés de quelques 7 semaines le secteur de la géométrie plane :

Chapitre 2 : Outil de géométrie (2 sem) Utiliser pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées. **Chapitre 8 : Triangles semblables (2 sem)** Reconnaître des triangles isométriques. Reconnaître des triangles de même forme. Construction de tels triangles. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.

L'évitement des révisions systématiques n'est donc pas empêché par la programmation de l'étude.

De même, la motivation des fonctions sinus et cosinus a été abordée dans la séance 16.

2. Comme le rappelle partiellement la deuxième question, nous avons vu dans le séminaire que la connaissance des fonctions carré et inverse était un élément technologique permettant de produire des techniques d'étude de fonctions du second degré ou homographiques, fonctions dont l'étude étaient motivées notamment par l'optimisation de grandeurs. Il en va de même pour la connaissance des fonctions sinus et cosinus, qui sera un élément technologique au service de la production de pratiques – qu'il reste à déterminer. Pour déterminer des situations dans lesquelles interviennent les fonctions sinus et cosinus, une première idée est de penser à des problèmes d'optimisation de grandeurs, comme pour les autres fonctions de référence ; une seconde, à l'étude de phénomènes physiques. Nous donnerons ci-dessous une situation extraite d'un ouvrage pour la classe de seconde (Collection Repère, éditeur Hachette éducation).

On considère les parallélogrammes ABDC tels que AB = 5 cm et AC = 4 cm. En existe-t-il un dont l'aire soit la plus grande possible ? Si oui, quelle est cette aire ?

Le travail de modélisation conduit d'abord à exprimer l'aire comme le produit de la hauteur issue de C par AB. Puis la hauteur s'exprime en fonction de sin x, où x est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ par $h = 4\sin x$. On a finalement que l'aire du parallélogramme, $\mathcal{A}$, est fonction de la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, x, par $\mathcal{A}(x) = 20 \sin x$. Compte tenu de la configuration géométrique, $x \in [0\ ; \pi[$ et il s'agit d'examiner si la fonction sinus admet un maximum sur cet intervalle. C'est le cas, pour $x = \frac{\pi}{2}$, et le parallélogramme d'aire maximum est donc le rectangle de côtés 5 cm et 4 cm : l'aire est alors de 20 cm²

Bien entendu, si les documents cités sont les matériaux de base, ils devront être complétés selon les besoins de l'enquête. Ainsi, à propos des fonctions sinus et cosinus, on aurait à enquêter du côté de la physique, et il faudrait se procurer des documents à ce propos (programme et document d'accompagnement, matériaux issus d'une recherche Internet, etc.).

2.2. Le travail de détermination de l'organisation mathématique concerne la détermination des types de tâches, des techniques et de l'environnement technologico-théorique ainsi qu'en témoignent les questions suivantes posées dernièrement :

1. Sur le thème « statistiques », en particulier « résumer une série statistique », j'ai l'impression que les seules choses pouvant être mises dans la partie synthèse sont du vocabulaire et la définition de moyenne/médiane/étendue (des rappels de troisième !). Y a t-il d'autres choses auxquelles je ne pense pas ? (2de, 18)

2. Dans la partie Statistique et Probabilités du programme de 1re STG, on trouve la notion de fréquence conditionnelle (dans la sous partie Statistique) mais on ne trouve pas les probabilités conditionnelles (dans le sous-partie Probabilités). Or, dans les commentaires, on cite l'exemple des tirages successifs avec ou sans remise et donc les probabilités conditionnelles vont être utilisées. Comment faire ? (1re STG, 18)

3. Dans le chapitre triangle rectangle et cercle circonscrit en quatrième, est-il nécessaire de travailler le type de tâches « montrer qu'un triangle est rectangle à l'aide de ses médianes » (car dans le programme on ne nous en parle pas) ? (4e, 18)

4. Que peut-on faire comme exercice/application sur les fonctions de référence en classe de seconde ? Applications différentes de celles faites pour « les généralités sur les fonctions » ? (2de, 17)

5. Dans le chapitre « fonctions de références » en seconde, faut-il parler des polynômes du second degré ? Et jusqu'où peut-on aller ? (2de, 18)

6. Pour les fonctions de référence $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$, les « capacités attendues » (dans le programme) sont :

- connaître les variations
- savoir tracer la courbe représentative.

Quels types de tâches peut-on travailler dans ce thème ? (2de, 18)

7. Dans le programme de seconde, il est précisé que les élèves doivent savoir « interpréter les cartes et les plans ». Qu'est-il attendu exactement des élèves sur ce sujet ? (2de, 15)

8. Le programme de seconde concernant les vecteurs insiste sur le repérage sur un réseau carré ou rectangulaire, sur les plans ou les cartes. Quels sont les types de tâches visés ? Si possible, un exemple d'activité. (2de, 18)

9. Dans le programme officiel de cinquième, j'ai lu la compétence (ou capacité) suivante : « Reproduire un angle au compas ». J'ai un peu de mal avec cette compétence ; pour l'instant je l'interprète : « à partir d'un angle, construire un triangle et reproduire ce triangle... » Y a-t-il une autre interprétation ? (5e, 17)

10. Prendre les $\frac{5}{6}$ des $\frac{3}{4}$ de 100 euros

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times 100.$$

Comment expliquer la « traduction » : de $\to \times$? (évidemment cela concerne le collège, donc pas de problème avec la phrase « f de x » ?) (5e, 18)

11. Comment (expliquer) amener l'idée aux élèves que prendre par exemple $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ cela revient à multiplier ces quantités ? (5e, 17)

12. Pour comparer deux nombres en écriture fractionnaire, il faut réduire au même dénominateur. Par exemple, comparer $\frac{5}{16}$ et $\frac{7}{24}$. Pour les réduire au même dénominateur, est-il préférable de rechercher le plus petit multiple commun de 16 et 24 par « tâtonnement » c'est-à-dire on essaie 16×2, 16×3, etc. puis 24×2, 24×3, etc. ou bien décomposer 16 et 24 en produit de facteurs : $16 = 2 \times 8$ et $24 = 3 \times 8$. Donc $\frac{5}{16} = \frac{5}{2 \times 8}$ et $\frac{7}{24} = \frac{7}{3 \times 8}$. Par conséquent, $\frac{5}{16} = 5 \times \frac{3}{2 \times 3 \times 8} = \frac{15}{48}$ et $\frac{7}{24} = 7 \times \frac{2}{3 \times 8 \times 2} = \frac{14}{48}$? (4e, 18)

Avant d'étudier certaines d'entre elles dans le forum des questions (voir *infra*), examinons les types de problèmes rencontrés. Il y a clairement des incertitudes quand au découpage en types de tâches, soit que l'on doute que l'un des types de tâches découpés doivent figurer dans l'OM (3), soit plus fréquemment que l'on n'arrive pas à identifier les types de tâches enjeu de l'étude (4, 6, 7, 8 par exemple). Bien entendu, dans ce cas, c'est pour l'essentiel l'ensemble de l'OM qui est enjeu de la question, même si l'environnement technologico-théorique est faiblement déterminé. Il y a également des questions liées à la détermination des techniques (12, 9 notamment) et à l'environnement technologico-théorique (1, 2, 10, 11 par exemple).

2.3. Une fois levées les incertitudes liées à l'organisation mathématique, il s'agit effectivement d'en constituer une structure amalgamée. Une technique pour faire cela est de constituer un réseau articulés des types de tâches identifiés. Examinons par exemple la question suivante :

Dans le chapitre triangle rectangle et cercle en classe de quatrième, les types de tâches étudiés sont :
1. montrer qu'un point appartient à un cercle à l'aide de la propriété de l'angle droit ;
2. calculer la longueur d'une médiane ;
3. montrer qu'un triangle est rectangle
   a) à l'aide du cercle circonscrit ;
   b) à l'aide de la médiane.

Est-il plus judicieux de commencer par les propositions directes(1) et 2)) puis de voir les réciproques (3a) et 3b)) ou de commencer par les triangles et les cercles (1), 3a)) puis les triangles et les médianes (2) et 3b)) ? (4e, 17)

Sous un habillage didactique (chronogenèse), elle pose clairement le problème de la constitution de l'OM amalgamée, traduit par la quasi identification entre les types de tâches énoncés et les propriétés qui permettent de fabriquer une technique relative à ces types de tâches.
Si l'on cherche à constituer une organisation mathématique amalgamée, il faudra « monter » dans les niveaux de détermination didactique pour que les types de tâches identifiés apparaissent comme sous types de tâches d'un ou deux des grands types de tâches du domaine considéré. En géométrie, deux de ces principaux types de tâches sont « Déterminer une longueur » et « Déterminer un

angle ». Voyons si ces types de tâches nous permettent de structurer l'OM proposée (que l'on prend ici comme donnée, sans examiner sa validité).

Calculer la longueur d'une médiane se range clairement dans Déterminer une longueur :
Déterminer une longueur
Faire apparaître cette longueur comme médiane d'un triangle et calculer cette médiane.

De même, montrer qu'un triangle est rectangle apparaît comme sous-type de tâches de Déterminer un angle.
Déterminer un angle
Montrer qu'un angle est droit
Faire apparaître cet angle comme angle d'un triangle et montrer que ce triangle est rectangle
calculer le carré du plus grand côté et montrer qu'il est égal à la somme des carrés des deux autres côtés ;
Ou montrer que le plus grand côté est le diamètre d'un cercle auquel le sommet de l'angle appartient ;
Ou montrer que la longueur du plus grand côté est le double de la médiane relative à ce côté.

Il reste à placer, dans l'architecture précédente, « montrer qu'un point appartient à un cercle ». On peut le placer dans la détermination de longueur : en effet, le fait de savoir qu'un point appartient à un cercle permet de déterminer par exemple la longueur d'un segment, rayon de ce cercle. Ou encore dans la détermination d'un angle : on a alors la tangente au cercle en ce point qui est perpendiculaire au rayon. On obtient finalement :

Déterminer une longueur
Faire apparaître cette longueur comme médiane d'un triangle et calculer cette médiane.
Faire apparaître cette longueur comme rayon d'un cercle connu.
Montrer qu'il s'agit du côté de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse le diamètre du cercle.

Déterminer un angle
Montrer qu'un angle est droit
Faire apparaître cet angle comme angle d'un triangle et montrer que ce triangle est rectangle
Montrer que le plus grand côté est le diamètre d'un cercle auquel le sommet de l'angle appartient ;
Ou montrer que la longueur du plus grand côté est le double de la médiane relative à ce côté.
Faire apparaître cet angle comme l'angle entre un rayon d'un cercle et sa tangente au point considéré du cercle
Montrer que le sommet de l'angle est un point du cercle.

On notera que cette structure devra s'enrichir au fur et à mesure de l'étude menée, qu'elle doit bien entendu être complétée par les techniques plus précises relatives aux types de tâches enjeu de l'étude, comme par les technologies qui les justifient et les produisent, et qu'elle est très liée aux raisons d'être des OM à faire émerger, comme le souligne par exemple la question suivante :

En cinquième, en ce qui concerne « la hauteur » ou « les hauteurs » d'un triangle, existe-t-il une autre raison d'être que pour calculer l'aire du triangle ? (5^e, 18)

(voir *infra* pour des éléments de réponse)

2.4 La troisième étape mentionnée est rédigée ainsi :
Diffracter l'OM et planifier son enseignement en programmant dans le temps les AER, exercices et bouts de synthèse - la conception des AER se faisant à cette étape

La diffraction signalée consiste à repérer dans l'architecture régionale de l'OM élaborée les types de tâches qui seront enjeu de l'étude et autour desquelles les AER viendront s'élaborer. On notera que la structuration « amalgamée » permet de penser des AER qui ne diffractent pas trop l'OM enjeu de l'étude. Dans le cas détaillé ci-dessus par exemple, on peut envisager deux AER, une AER autour de la détermination de longueurs et une AER autour de la détermination d'angles. Ou encore c'est ainsi que dans le cas de la statistique en 5^{e}, on peut envisager comme AER « quand on dit d'une commune française qu'elle a beaucoup d'habitants, ça veut dire qu'elle en a combien ? ».

3. Dans la perspective de préparer les AER, nous avons vu qu'il s'agit d'avoir une situation problématique dont l'OM envisagée émergera, partiellement ou en totalité, comme permettant d'apporter une solution. Puis de constituer un guide d'AER, qui structurera la dynamique de l'étude en une suite de questions cruciales et s'assurera autant que possible que la dynamique de l'étude envisagée est viable. Pour cela, nous avons vu émerger les semaines précédentes une technique de fabrication de questions cruciales reposant sur un réseau assez fin de questions qui permettent de scander la dynamique de l'étude en suivant le « processus de production » des solutions envisagées. Nous avons ainsi abouti, pour la statistique, à peu de choses près, à la proposition de la suite de questions cruciales suivantes :

Q1 : Comment déterminer si une ville de N habitants, c'est une grande ville ?
Q2 : Comment déterminer s'il y a beaucoup de villes de plus de N habitants ?
Q3 : Comment compter le nombre de villes de plus de N habitants dans le fichier ?
Q4 : Comment compter le nombre de villes de plus de N habitants dans le fichier trié par ordre croissant de population ?
Q5 : Comment savoir si c'est beaucoup ou pas ?
Q6 : Comment déterminer la proportion de villes qui ont plus de N habitants ?
Q7 : Comment déterminer le nombre total de communes ?
Q8 : Quel critère va-t-on se donner pour déterminer si la proportion est grande ou petite ?

Ce maillage de questions cruciales n'est pas encore suffisant : il faut envisager l'élaboration des réponses par les élèves, ce qui se fait dialectiquement, nous l'avons vu, avec la constitution des questions cruciales, en portant attention aux ressources, notamment en termes de milieu, dont dispose les élèves pour effectuer le travail demandé.

Travail collectif dirigé à propos de la statistique

Traces écrites du travail mené

Passage de Q2 à Q3 Comment déterminer s'il y a beaucoup de villes de plus de N habitants ? Déterminer le nombre de telles villes ; nécessité d'avoir des données et notamment les données du nombre d'habitants par ville. Deux voies : faire chercher les données sur données sur Internet ; les apporter en donnant leur source.

Compter le nombre de villes de plus de N habitants.
Technique de comptage à la main ; (on peut la mettre en œuvre quand N est suffisamment grand – 1000 par exemple dans le cas du dép. 04 –, ce qui garantit l'entrée des élèves dans le problème) ; disqualification par reproduction et confrontation à la possibilité de mettre en œuvre par rapport à la population totale.

Pour faire advenir la technique de tri croissant, il faut soit faire varier N, soit le nombre total de villes.

2. C2i2e

Jusqu'à quelle date peut-on déposer des documents sur Espar et demander la validation des items correspondants pour le C2i2e ? (4e, 18)

1. On laisse jusqu'au 5 mai 2009. On signale que, cette année, l'acquisition de la compétence 8 du cahier des charges est liée à celle du C2i2e.

2. Nous avons parlé à plusieurs reprises du C2i2e, et nous n'avons quasiment pas passé une séance de séminaire sans parler de l'utilisation des TICE. On notera que c'est d'abord sur le travail avec la classe qu'il faut faire porter les efforts, et sur la qualité de ce travail, la mise en ligne des travaux ne demandant pas un effort démesuré même s'il n'est pas négligeable. Toutefois, comme nous l'avons déjà noté, la mise en ligne de ces travaux sur Espar doit être assortie de commentaires justifiant la validation des compétences demandées. On examinera ici quelques documents issus de portfolios différents (les porfolios étant, dans l'ensemble, peu fournis).

3. Voici le premier document.
Compétence demandée : B4.1 Identifier les compétences des référentiels mises en œuvre dans une situation de formation proposée aux élèves, aux étudiants.

Voici deux situations de formation proposées à mes élèves, à l'issue desquelles j'ai identifié et validé 3 compétences du B2i.

Il s'agit de deux séances de soutien en 5e.

L'objectif de la première était de maîtriser :
- la technique pour nommer un angle sur une figure donnée,
- reconnaître un angle sur une figure à partir de son nom,
- maîtriser le vocabulaire (complémentaire, supplémentaire, alterne-interne, correspondant)

L'objectif de la deuxième était de maîtriser la technique d'addition et de soustraction de deux fractions, le dénominateur de l'un étant multiple de celui de l'autre.

Pour ces deux séances, il a été demandé aux élèves de se connecter, d'aller sur le site Mathenpoche 5e, de faire la série d'exercices demandées par le professeur, puis, à la fin de l'heure, de se déconnecter. La série Mathenpoche propose des exercices simples, de difficulté progressive, que les élèves peuvent faire en autonomie. Elle favorise l'auto-contrôle : à tout instant l'élève peut consulter une aide animée et refaire l'exercice raté.

A la suite de ces séances, j'ai validé les compétences C1.1, C1.2, C4.3. En effet :

C1.1 Je sais m'identifier sur un réseau ou un site et mettre fin à cette identification
Les élèves ont su se connecter et, à la fin de la séance, se déconnecter, sans aide.

C.1.2 Je sais accéder aux logiciels et aux documents disponibles à partir de mon espace de travail
Les élèves ont su retrouver le navigateur internet sur leur espace de travail et le lancer correctement.

C.4.3 Je sais utiliser les fonctions principales d'un outil de recherche sur le web (moteur de recherche, annuaire...)
Une fois le navigateur web lancé, ils ont su trouver le site Mathenpoche sans en connaître l'adresse URL, mais en utilisant Google

On voit une description d'une séance de formation et la justification, par cette description, de l'acquisition de compétences du B2i, ce qui justifie effectivement la validation de la compétence B.4.1., du moins si l'on suppose que ce type de travail a été reproduit quelques fois dans l'année, notamment du point de vue de C.4.3.

4. Voici maintenant une situation proposée pour la validation des compétences B.2. et B.3.1., B.3.2., B.3.3. On notera que le texte de l'activité et le commentaire sont sur deux pages séparées, ce qui nuit à lisibilité et diminue la probabilité que l'évaluateur la repère parmi les nombreux documents qui figureront dans le portfolio...

ACTIVITE : CONJECTURER, TESTER PUIS DEMONTRER

L'objectif de cette activité est de démontrer de deux manières différentes une propriété qui sera conjecturée puis testée à l'aide du logiciel GEOGEBRA.

Problème :
Soit ABCD un quadrilatère quelconque.
Soient I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].
1) A l'aide du logiciel de géométrie dynamique GEOGEBRA, établir une conjecture quant à la nature du quadrilatère IJKL. Proposer ensuite différentes manières de tester cette conjecture en utilisant les fonctions du logiciel.
2) Démonstration géométrique
Démontrer à l'aide d'un théorème de géométrie la conjecture établie à la question 1).
3) Démonstration vectorielle
Démontrer vectoriellement la conjecture établie à la question 1).

Elle est accompagnée du commentaire suivant :

Le parallélogramme des milieux d'un quadrilatère me semble être un très bon exercice de géométrie bien adapté au programme de seconde pour plusieurs raisons. D'une part, la situation est assez nouvelle pour les élèves puisqu'ils n'ont pas l'habitude de travailler avec un quadrilatère quelconque et cette situation s'appuie fortement sur la perception. D'autre part, la résolution peut être réalisée sous plusieurs points de vue : un point de vue géométrique avec le théorème des milieux et un point de vue vectoriel. Cet exercice répond donc bien au programme de seconde qui précise que les problèmes étudiés devront « inciter à la diversité des points de vue ».
Lorsque j'ai choisi d'intégrer cet exercice à mon étude, il m'a semblé intéressant de fournir aux élèves un milieu expérimental afin d'observer la propriété. J'ai donc choisi d'utiliser le logiciel de géométrie dynamique GEOGEBRA.

Description de la séance :
La séance s'est déroulée dans une salle informatique. Ainsi, tous les élèves disposaient de façon individuelle d'un ordinateur.
Il s'agissait de la deuxième séance informatique sur GEOGEBRA.

Après m'être assuré du bon fonctionnement des ordinateurs ainsi que des connexions au réseau du lycée, j'ai demandé aux élèves de chercher seul l'activité distribuée.

Une partie de la classe s'est tout de suite mise au travail en traçant un quadrilatère quelconque. D'autres élèves ne se souvenaient plus comment utiliser GEOGEBRA. Je passais donc à chaque table afin de donner les indications pour construire la figure. J'ai encouragé les élèves qui avaient fini leur construction à aider leurs camarades. Finalement tout le monde a obtenu son quadrilatère et ses milieux.
Durant cette phase de construction de la figure, j'ai repéré un petit groupe d'élèves qui avait de réelles difficultés avec la manipulation du logiciel. J'ai organisé une séance d'Aide individualisée avec ce groupe d'élèves en salle informatique afin de les familiariser avec le logiciel.

Tous les élèves ont observé le parallélogramme. Je leur ai demandé alors de tester cette propriété à l'aide du logiciel.

Très naturellement, certains ont fait varier les sommets du quadrilatère afin de s'assurer de la conservation de la propriété. Je leur ai ensuite précisé qu'il devait utiliser des fonctions du logiciel afin de tester la propriété.

Très vite, plusieurs élèves ont remarqué l'égalité des côtés opposés en regardant la longueur des segments qui apparaît dans la fenêtre de gauche.
Ensuite les réponses des élèves étaient incomplètes. Il m'a semblé judicieux de rappeler précisément les différentes caractérisations d'un parallélogramme.
Les élèves ont ensuite eu du mal à trouver comment tester le parallélisme des côtés opposés. Cela provient d'une spécificité de GEOGEBRA qui reconnaît le parallélisme de droites mais pas de côtés. Lorsque nous avons tracé les droites, un élève a proposé de s'intéresser aux équations de ces droites et de remarquer l'égalité des coefficients directeurs.
Enfin, afin de vérifier que les diagonales se coupent en leur milieu, les élèves ont crée le point d'intersection des diagonales puis ont créé les segments correspondant aux « demi-diagonales ».

On a résumé sur le cahier toutes les manipulations correspondantes aux trois caractérisations géométriques du parallélogramme :
côtés opposés de même longueur deux à deux
côtés opposés parallèles deux à deux
deux côtés opposés parallèles et de même longueur.
les diagonales se coupent en leur milieu
Cette première partie a duré 45 minutes.

Ensuite, j'ai demandé aux élèves de laisser les ordinateurs pour démontrer la propriété à l'aide de la théorie géométrique disponible. Les élèves se sont donc déplacés pour venir s'installer sur les tables au centre de la classe (les ordinateurs étant disposés contre les murs).

J'ai laissé ensuite aux élèves un temps de recherche pour réaliser la démonstration géométrique. En passant près d'eux, j'ai remarqué que plusieurs élèves avaient de bonnes idées mais ne les approfondissaient pas. J'ai donc demandé à l'ensemble de la classe de rédiger une démonstration complète sur leur brouillon. L'heure s'est ainsi achevée sur ce moment de recherche.
J'ai demandé aux élèves de mettre au point leur démonstration pour la séance suivante et de réfléchir à la démonstration vectorielle.

Demande de validation

Voici les compétences que je prétends pouvoir valider :

B.2.1. Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE.
B.2.2. Concevoir des situations d'apprentissages et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe.
B.2.3. Intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias.
B.2.4. Préparer des ressources adaptées à la diversité des publics et des situations pédagogiques en respectant les règles de la communication.
B.3.1. Conduire des situations d'apprentissage en tirant parti du potentiel des TICE.

B.3.2. Gérer l'alternance, au cours d'une séance, entre les activités utilisant les TICE et celles qui n'y ont pas recours.
B.3.3. Prendre en compte la diversité des élèves, la difficulté scolaire en utilisant les TICE pour gérer des temps de travail différenciés, en présence et/ou à distance des élèves.

Pour les compétences **B.2.1**, **B.2.2**, **B.2.3 et B.3.1.**, il m'a semblé intéressant d'utiliser GEOGEBRA pour résoudre cet exercice pour plusieurs raisons :
1) D'une part, le logiciel permettait aux élèves d'obtenir un premier quadrilatère quelconque puis en déplaçant les sommets de celui-ci d'obtenir plusieurs autres quadrilatères quelconques. Ainsi, tous les élèves ont pu suffisamment expérimenter et se convaincre que la propriété à démontrer était toujours vraie quelque soit le quadrilatère.
2) D'autre part, les élèves ont pu tester la propriété à l'aide des fonctions du logiciel. Ainsi, en s'intéressant à la longueur des segments tracés dans la fenêtre de gauche, les élèves ont observé que les côtés opposés étaient égaux deux à deux. Ensuite, en traçant les droites associées aux côtés, ils ont testé le parallélisme. Puis en observant l'équation de ces droites, ils ont une nouvelle fois vérifié le parallélisme des côtés opposés. Enfin, en créant le point d'intersection des diagonales ainsi que les segments représentant les « demi-diagonales », ils ont vérifié que les diagonales du quadrilatère se coupaient bien en leur milieu. Ces expérimentations ont permis de rappeler les différentes caractérisations du parallélogramme et de faire des rappels sur les équations de droite.
Le logiciel a donc permis de réaliser d'une part des expérimentations puis ensuite de construire un raisonnement mathématique tout en rappelant les technologies indispensables à la démonstration.

Pour la compétence **B.3.2.**, la transition entre l'expérimentation sur le logiciel et la démonstration géométrique de la propriété sur le cahier d'Activité s'est très bien déroulée. Elle a été favorisée par la disposition matérielle de la classe. En effet, les ordinateurs sont disposés sur des tables contre les murs et il y a d'autres tables au centre sans ordinateurs. J'ai demandé aux élèves de venir s'installer sur les tables du centre. Ainsi, ils étaient tous disposés à travailler sur leur cahier.

Pour les compétences **B.2.4** et **B.3.3.**, j'ai été confronté à une grande hétérogénéité des élèves quant à l'usage du logiciel. Certains avaient bien intégré le fonctionnement du logiciel et sont immédiatement rentrés dans la phase d'expérimentation. D'autres ont eu besoin de plusieurs indications afin de démarrer. Enfin un petit groupe d'élèves ont montré de réelles difficultés liées à leur manque de pratique informatique. J'ai donc organisé une séance d'aide individualisée en salle informatique avec ces élèves afin de les familiariser avec le logiciel. Afin de m'assurer de la maîtrise suffisante du logiciel GEOGEBRA de la classe, j'ai donné à tous les élèves à la suite de cette heure d'aide individualisée une série d'expérimentations à réaliser hors classe. Les élèves m'ont transmis leurs figures à l'aide d'espar. J'ai alors pu constater que tous les élèves ont réussi à réaliser les expérimentations en particulier ceux qui étaient venus en AI.

Conclusion : Le logiciel GEOGEBRA a permis durant l'activité d'expérimenter afin d'établir une conjecture puis de tester la propriété conjecturée à partir d'une recherche de preuves.
J'ai tenté en préparant cette séance de répondre aux deux orientations précisées dans le document d'accompagnement du programme :

Pour toute la partie géométrie, le programme donne deux orientations fondamentales :
– **prendre du temps** pour s'adonner à une vraie recherche de problèmes – en respectant toutes les étapes relatives à ce type de recherche (conjectures et expérimentations, recherche de preuves, mise en forme d'une démonstration) ;
– **s'appuyer sur des notions fortement liées à la perception** pour progresser dans la maîtrise des savoirs géométriques. S'il est vrai, en effet, que la géométrie sert à dépasser par

Commentaires développés oralement
Pas convaincu par B.2.3. Voir le document repères et balises.

Pour les autres compétences B.2., et B.3.1., on ne sait pas quel moment de l'étude de quelle organisation mathématique cela concourt à réaliser. La compétence B.2.4. n'est pas bien visible dans le travail proposé. On ne sait rien des traces écrites laissées aux élèves, et notamment de l'institutionnalisation des techniques « à Geogebra ».

5. On examinera enfin un troisième document, toujours issu d'un portfolio.

Séance informatique : GeoGebra

Nous allons résoudre le problème du paysan grâce au logiciel GeoGebra.

<u>I. Construction de la figure</u>
1. Créer les points A(0,0), B(4,0) et C(4,3).
2. Construire les segments [AB], [AC] et [BC].
3. Placer un point N sur [AC].
Le logiciel ne permet pas de construire des projetés orthogonaux, mais nous allons les construire « à la main ».
4. Construire la perpendiculaire de [AB] passant par N.
Placer M le point d'intersection entre la perpendiculaire et [AB].
De même, construire P le projeté orthogonal de N sur [BC].
5. Effacer les perpendiculaires construites (clique droit sur la droite).
6. Construire les segments [NM] et [NP].
<u>II. Résolution du problème</u>
Pour calculer l'aire du rectangle NPBM, il faut définir au logiciel le polygone NPBM.
1. Définir le polygone NPBM.
2. Afficher l'aire du rectangle NPBM.
3. Conjecturer l'aire maximale du rectangle.
On va maintenant construire la représentation graphique de la fonction Aire sans connaître son expression.
4. Placer un point F(x,Aire(x)) où x = AN et Aire(x) = NP*NM
5. Cliquer droit sur F et faire « trace activée ».
6. Faire varier N sur [AC].
7. Que constate-t-on ?

Il est assorti du commentaire suivant, qui figure dans un fichier séparé :

Mon premier fichier « introduction à la notion de fonction », a été donné comme activité pour introduire le chapitre des fonctions. Tout le vocabulaire des fonctions a été découvert grâce a cet exemple.
L'AER s'est très bien déroulée. Ensuite sachant que mes élèves ne connaissaient pas le logiciel GéoGébra, j'ai voulu faire une séance TICE : fichier « Séance informatique ».

J'ai dû faire face à plusieurs problèmes :
- coupure de courant : il fallait aller dans les toilettes pour le remettre...
- pas de bon branchement pour le vidéoprojecteur : j'ai dû me servir du cable de mon écran...

La séance TICE s'est bien déroulée (demi groupe).
En premier temps j'ai présenté le logiciel très rapidement. Ensuite les élèves se sont bien débrouillés.
J'ai repris la classe a des moments clés pour que le classe soit au même point : je leur ai montré les manipulations sur le vidéoprojecteur.
Finalement l'animation « trace activée » a beaucoup plu.

Commentaires développés oralement

On ne sait rien des compétences qui demandent à être validées ici (la feuille de position signale B.2.1., B2.2., B.3.5.). L'analyse proposée est dans l'ensemble indigente – le critère d'évaluation « ça leur a plu » est indigne d'une formation universitaire ; le travail proposé est antinomique d'un dispositif qui ménage un *topos* aux élèves et ne peut pas prétendre à une validation des compétences B.2.1 et B.2.2.

6. Pour terminer sur cette question du C2i2e, chaque participant au séminaire mettra par écrit une description succincte d'un travail qu'il a réalisé ou qu'il projette de réaliser relativement au deux compétences suivantes :

B.2.1. Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE.
B.2.2. Concevoir des situations d'apprentissages et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe.

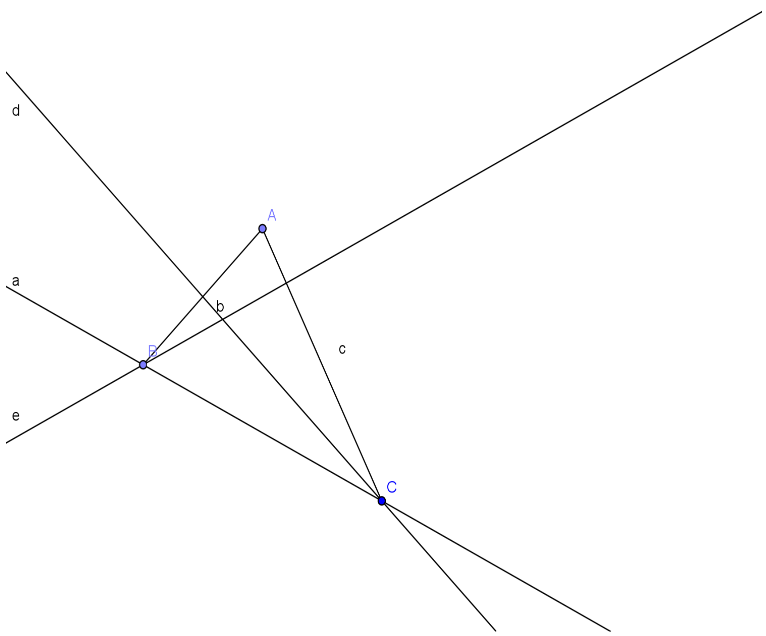
Nous examinerons à lumière de ces travaux, , lors de la prochaine séance, la question suivante :

Comment doit-on préparer un TP d'informatique ? Le support écrit doit-il détailler un minimum la démarche expérimentale (commande,...) afin que les élèves progressent de manière autonome, pendant que le professeur se déplace de poste en poste pour guider si besoin les différents groupes ? Comment guider collectivement les élèves et éviter uniquement d'accompagner individuellement les différents groupes à chaque poste de travail ?

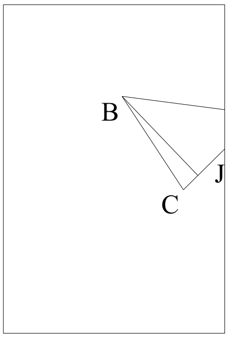
3. Forum des questions

En cinquième, en ce qui concerne « la hauteur » ou « les hauteurs » d'un triangle, existe-t-il une autre raison d'être que pour calculer l'aire du triangle ? (5^{e}, 18)

Nous avons vu dans la première partie de la séance, deux grands types de tâches relatifs à la géométrie : Déterminer une longueur et déterminer un angle. Il en est un troisième, que nous avons déjà rencontré à plusieurs reprises, « Construire une droite ». Nous avons vu qu'il conduisait à une AER relative au parallélogramme dans la première observation de classe effectuée. En quoi est-il pertinent ici ? Supposons que j'ai un point A et une droite *d* ne passant pas par ce point et que je souhaite construire la perpendiculaire à cette droite passant par A. Si je peux faire apparaître un triangle de sommet A dont un côté soit porté par la droite et dont je connaisse les deux autres hauteurs, le problème est réglé dès lors que l'on sait que les trois hauteurs sont concourantes.



On pourra alors en déduire une AER qui prend appui sur le PER que nous avons envisagé : tracer la partie visible de la droite perpendiculaire à BC passant par A, sommet du triangle qui ne figure pas dans la feuille.



Sur le thème « statistiques », en particulier « résumer une série statistique », j'ai l'impression que les seules choses pouvant être mises dans la partie synthèse sont du vocabulaire et la définition de moyenne/médiane/étendue (des rappels de troisième !). Y a t-il d'autres choses auxquelles je ne pense pas ? (2[de], 18)

1. On précisera d'abord que les éléments de « vocabulaire » évoqués sont d'abord des notions de statistique qu'il s'agit de préciser pour permettre la modélisation d'une question en termes statistique. Ainsi dans le travail mené à propos de la question « quand on dit d'une commune française qu'elle a beaucoup d'habitants, ça veut dire qu'elle en a combien ? », fait-on émerger que la première étape de la technique d'étude de ce type de question est de repérer la ***population*** (les communes françaises) et le ***caractère*** étudié sur cette population (le nombre d'habitants) de façon à recueillir une ***série de données*** sur ce caractère dans cette population. Cette technique repose sur trois ingrédients technologiques « population », « caractère », « série de donnée », qui sont des notions de statistique de la même manière que « droite », « cercle », « hauteur » sont des notions de géométrie plane.

2. Contrairement à ce qui figurait anciennement, et dans une période de rétraction des textes du savoir, dans un cours, on rappelle que c'est l'ensemble de l'organisation mathématique qui doit figurer dans la synthèse. On notera ici que ce qui fait le « neuf » du programme de statistique évoqué n'est pas à chercher dans les types de tâches mais dans les techniques, et donc également dans les éléments technologico-théoriques. C'est en effet le type de tâches « déterminer une moyenne » qui est enrichi de nouvelles techniques fabriquées notamment par la propriété de linéarité de la moyenne qui figure dans le programme de seconde :

Contenus	**Capacités attendues**	**Commentaires**
Résumé numérique par une ou plusieurs mesures de tendance centrale (moyenne, médiane, classe modale, moyenne élaguée) et une mesure de dispersion (on se restreindra en classe de seconde à l'étendue).	Utiliser les propriétés de linéarité de la moyenne d'une série statistique. Calculer la moyenne d'une série à partir des moyennes de sous-groupes.	L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur la nature des données traitées, et de s'appuyer sur des représentations graphiques pour justifier un choix de résumé. On peut commencer à utiliser le symbole Σ. On commentera quelques cas où la médiane et la moyenne diffèrent sensiblement.
Définition de la distribution des fréquences d'une série prenant	Calcul de la moyenne à partir de	On remarquera que la médiane d'une

un petit nombre de valeurs et de la fréquence d'un événement.	la distribution des fréquences.	série ne peut se déduire de la médiane de sous-séries. Le calcul de la médiane nécessite de trier les données, ce qui pose des problèmes de nature algorithmique.

Cette situation est semblable au cas des fonctions de références, qui font l'objet des questions suivantes :

1. Que peut-on faire comme exercice/application sur les fonctions de référence en classe de seconde ? Applications différentes de celles faites pour « les généralités sur les fonctions » ? (2^{de}, 17)

2. Dans le chapitre « fonctions de références » en seconde, faut-il parler des polynômes du second degré ? Et jusqu'où peut-on aller ? (2^{de}, 18)

3. Pour les fonctions de référence $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, les « capacités attendues » (dans le programme) sont :

- connaître les variations
- savoir tracer la courbe représentative.

Quels types de tâches peut-on travailler dans ce thème ? (2^{de}, 18)

Nous avons déjà travaillé sur ces questions, comme nous l'avons rappelé dans la première partie de la séance. Nous présenterons ici une partie d'un travail effectué dans le séminaire de l'an dernier, que nous compléterons dans une séance ultérieure.

Voici par exemple l'organisation mathématique qu'un élève-professeur de l'IUFM d'Aix-Marseille avait constituée avant d'aborder le secteur des fonctions[20]. Cette analyse se présente sous la forme d'un fichier Excel comportant 3 feuilles : la première détaille les types de tâches et les techniques de l'OMR (organisation mathématique régionale, correspondant au secteur) selon le programme et les ouvrages pour la classe de seconde ; la deuxième, les raisons d'être de l'OM à étudier ; la troisième, une analyse de l'OM relative aux fonctions qui a dû être étudiée au collège dont on ne parlera pas ici. On trouvera ci-dessous l'analyse de l'OMR à étudier (pour des raisons pratiques, nous présentons « linéairement » ce qui, dans le fichier proposé, figure en deux colonnes) :

T1 identifier variable et ensemble de définition (fonction définie par courbe, tableau, formule) ;

τ1 : courbe: abscisse (x) ; tableau : 1^{re} ligne ou colonne ; formule : variable de la formule (x ou autre) ;

T11 : dans quelques rares cas l'ensemble de définition ;

τ11 : cas fonction définie par formule: trouver les x pour lesquels on ne peut pas calculer l'image ;

T2 déterminer l'image d'un nombre (fonction définie par courbe, tableau, formule) ;

τ2 : courbe : tracer la verticale passant par ce nombre ; tableau : case correspondante au nombre donné ; formule : remplacer la variable par le nombre.

T3 décrire comportement d'une fonction définie par courbe…

τ3 : placer des flèches montantes ou descendantes en lisant la courbe de gauche à droite ; lire les abscisses des points extrémaux et de changement de sens ;

T31 : avec tableau variation ;

τ31 : placer les flèches dans même ordre que celles de la courbe ; ajouter les abscisses puis les ordonnées des points extrémaux et de changement de sens ;

T32 : avec vocabulaire adapté ;

τ32 : flèches montantes : fonction croissante (id. décroissante) de … à … (abscisses des points)

T4 dessiner une représentation graphique à partir d'un tableau de variations ;

τ4 : placer les points extrémaux et de changement de sens ; relier ces points par un trait continu en suivant les flèches

T51 : établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \to x^2$;

[20] Ce document a été communiqué au mois de novembre 2007 pour servir de point d'appui dans le Séminaire de formation au travail d'une question posée par un élève professeur. Voir Artaud et Jullien 2008.

τ51 : démontrer croissance sur **R**+ et décroissance sur **R**- ; tableau de variation; calculer 1 point; savoir que la fonction est paire ;

T52 établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \to 1/x$ *;*

τ52 : démontrer décroissance sur **R**–* et sur **R**+* ; calculer un point ; savoir que la fonction est impaire ;

T6 connaître la représentation graphique de $x \to \sin x$ et $x \to \cos x$ *;*

τ6 : connaître la représentation graphique sur [0;2π] (savoir calculer les points d'abscisse:0 ; π/2 ;π ;3π/2 ;2π et connaître allure) et tracer par périodicité.

T7 caractériser les fonctions affines par l'accroissement de la fonction est proportionnel à accroissement de la variable

T8 reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de 2 carrés) ;

T9 identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ (fonction donnée par une formule) ;

T10 reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la plus adaptée (donc savoir anticiper les effets d'une modification d'écriture) : réduite, factorisée; lier l'étude des différentes techniques et traitements envisagés ;

T11 modifier, développer, réduire une expression selon l'objectif poursuivi ;

mise en équation ?

T12 résoudre une équation ou inéquation se ramenant au 1er degré ;

T13 utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction ;

T14 résoudre graphiquement une équation ou une inéquation du type $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$.

On notera d'abord que l'OM était en cours de constitution, ce qui peut expliquer par exemple l'absence de l'environnement technologico-théorique, mais qu'elle donne une bonne idée des aspects problématiques même quand le travail a l'ambition d'être mené au niveau du secteur.

On voit en effet apparaître, au delà des quelques maladresses d'analyse du débutant, une succession de types de tâches et de techniques associées qui reflète la structuration du programme sans que leur fonctionnalité soit recherchée. On aboutit alors à une juxtaposition d'organisations mathématiques ponctuelles (dont les blocs technologico-théoriques resteraient à élucider), leur articulation n'étant pas manifeste.

On notera également que certains types de tâches n'en sont pas véritablement, comme par exemple les deux énoncés suivants :

T51 établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \to x^2$;

τ51 : démontrer croissance sur R+ et décroissance sur R- ; tableau de variation; calculer 1 point; savoir que la fonction est paire ;

T52 établir le sens de variations et représenter graphiquement $x \to 1/x$ *;*

τ52 : démontrer décroissance sur R-* et sur R+* ; calculer un point ; savoir que la fonction est impaire ;

On a en effet à faire ici à deux tâches, spécimens du type « établir le sens de variation et représenter graphiquement une fonction donnée par son expression algébrique » qui n'apparaît pas dans l'analyse de l'OM du professeur. En outre la fonction de ces tâches au sein de l'organisation mathématique étudiée n'est pas élucidée[21].

Des raisons d'être, on l'a dit, sont avancées :

Optimiser une situation

Exemple : maximiser une aire, minimiser un coût, …

Décrire exhaustivement un phénomène

On peut alors connaître d'autres valeurs, analyser le phénomène, …

Mais, on l'a vu, ces types de tâches ne sont pas reliés aux types de tâches de l'OMR que le professeur a identifiés par ailleurs – ce dont témoigne entre autres l'incertitude liée à la « mise en équation » que manifeste le point d'interrogation.

[21]. Ces tâches font parties de l'organisation de l'étude. Elles permettront de constituer une partie de l'environnement technologico-théorique de l'OMR. Cela souligne l'intérêt de mener d'emblée le travail d'analyse sur l'OM dans son ensemble.

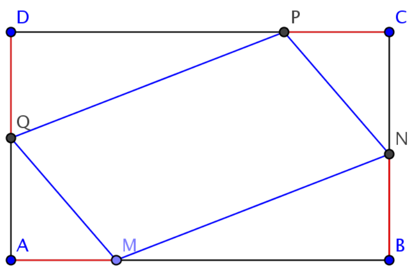
On pourrait donner de multiples témoignages de ces deux aspects problématiques : manque de fonctionnalisation et vision trop thématique ; nous en donnerons un autre encore, issu de l'observation, en février 2006, d'une séance en classe de seconde sous la responsabilité d'un élève professeur.

À la suite de l'examen du programme par l'ensemble des professeurs de seconde de ce lycée, le secteur des fonctions a été découpé en thèmes associés à des sujets d'étude dont trois ont déjà été étudiés : *les équations* (équations « produits et quotients », mise en équation de problèmes), *généralités sur les fonctions* (notion de « être fonction de… », variable et ensemble de définition, image d'un élément par une fonction, lectures graphiques, fonctions croissantes et décroissantes, maximum et minimum sur un intervalle), *inéquations* (étude de signes d'expressions algébriques) ; un quatrième thème est en cours d'étude : *fonctions de références* (fonctions carrée et inverse).

La définition, le sens de variation et la représentation graphique de la fonction qui à x associe x^2 ont été établis précédemment et il s'agit d'étudier la situation suivante :

On considère ABCD un rectangle tel que AB = 5 et BC = 3. On place les points M, N, P et Q respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] de telle sorte que les longueurs AM, BN, CP et DQ soient égales. Il s'agit de déterminer la position du point M sur le segment AB telle que l'aire du parallélogramme MNPQ inscrit dans le rectangle ABCD soit minimum.

Figure 1



Le travail de la veille a permis d'obtenir que l'aire de MNPQ est donnée par $\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15$ où x représente la longueur AM. La séance comporte alors trois grandes étapes

1. On met en évidence qu'il s'agit de déterminer le minimum de la fonction $\mathcal{A}$ sur $[0 ; 3]$
2. Une étude expérimentale à l'aide de calculatrices graphiques met en évidence que $\mathcal{A}$ atteint un minimum en 2 qui vaut 7.
3. On prouve analytiquement l'assertion précédente :

   a) en résolvant l'inéquation $\mathcal{A}(x) \geq 7$, qui se ramène à la résolution de l'équation $\mathcal{A}(x) - 7 \geq 0$;

   b) En résolvant l'équation $\mathcal{A}(x) = 7$. [Cette dernière question a été abordée en classe et laissée à faire pour la séance suivante.]

La résolution de l'inéquation $\mathcal{A}(x) \geq 7$ s'effectue de la façon suivante :

$\mathcal{A}(x) - 7 = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x^2 - 2\times 2\times x + 2^2) = 2(x - 2)^2$; cette quantité étant toujours positive, on obtient finalement que pour tout $x \in [0 ; 3]$ $\mathcal{A}(x) - 7 \geq 0$ ce qui équivaut à pour tout $x \in [0 ; 3]$ $\mathcal{A}(x) \geq 7$.

En dehors du fait que la technique mise en œuvre dans la classe pour résoudre une inéquation est purement algébrique, la séance soulève une autre question. Les élèves ont déjà étudié le type de tâches « déterminer le minimum d'une fonction » lors de l'étude du thème « généralités sur les fonctions » et la technique qui a été donnée à cette occasion repose sur une lecture graphique de la courbe. Cette première technique peut être justifiée par la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction : en effet, la fonction étant décroissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$ on a $\mathcal{A}(x)$

$\geq \mathcal{A}(2)$ pour tout x appartenant à cet intervalle ; de même la fonction étant croissante sur l'intervalle $[2 ; 3]$, $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ pour tout x appartenant à cet intervalle et finalement, sur l'intervalle $[0 ; 3]$, on obtient $\mathcal{A}(x) \geq \mathcal{A}(2)$ soit, puisque $\mathcal{A}(2) = 7$, $\mathcal{A}(x) \geq 7$. Ce qu'il resterait à justifier analytiquement, ce sont les variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle, nous y reviendrons. Le professeur fait donc émerger dans la séance une autre technique relative au même type de tâches, qui s'appuie sur cette première technique dans la partie expérimentale tout en s'en éloignant d'un point de vue technologique puisqu'elle repose sur un travail algébrique.

La motivation de l'apport de la nouvelle technique n'est pas véritablement abordée dans la séance, mais elle apparaît implicitement dans le discours du professeur comme étant mieux justifiée parce qu'elle donnerait la « valeur exacte » du minimum. Pourtant, cette valeur exacte du minimum et de la valeur en laquelle il est atteint a été conjecturée à partir de la représentation graphique de la fonction ce qui limite de fait la portée de la technique algébrique[22].

Pour résoudre les difficultés que nous venons d'évoquer, il faudrait disposer d'une technique de détermination de l'extrémum dont la justification repose sur la théorie des fonctions. Voyons cela.

Si l'on sort un moment des contraintes du programme de seconde, une technique classique pour produire la valeur de l'extrémum d'une fonction du second degré, une consiste à mettre l'expression sous « forme canonique » de la façon suivante : $2x^2 - 8x + 15 = 2(x^2 - 4x) + 15 = 2[(x - 2)^2 - 8] + 15 = 2(x - 2)^2 + 7$. Cette expression met alors en évidence le minimum de la fonction, 7, et la valeur en laquelle il est atteint, 2 – la valeur qui annule le terme variable. Cette expression de la fonction permet également de justifier analytiquement les variations de la fonction : la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}+$ et décroissante sur $\mathbb{R}-$, la fonction qui à x associe $(x - 2)^2$ est croissante sur $[2 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 2]$, et il en est donc de même pour la fonction qui à x associe $2(x - 2)^2$ puis pour la fonction qui à x associe $2(x - 2)^2 +7$, soit la fonction $\mathcal{A}$.

On le voit, on rejoint là un thème du programme, « fonctions et formules algébriques », à travers les types de tâches « Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule », « Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…) » et « Modifier une expression, la développer, la réduire selon l'objectif poursuivi ». Ce thème permet alors d'unifier les deux techniques précédentes pour déterminer les extrémums d'une fonction sur un intervalle de la façon suivante :
– tracer la courbe de la fonction sur cet intervalle à la calculatrice et établir à partir de cette courbe le tableau de variation de la fonction ;
– justifier les variations de la fonction à partir des variations des fonctions de références, en mettant si nécessaire l'expression algébrique de la fonction sous une forme adaptée ;

en particulier, dans le cas d'une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$, mettre l'expression sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$; dans le cas d'une fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, mettre l'expression sous la forme $\alpha + \frac{\mu}{cx+d}$;
– donner alors les inégalités à justifier et utiliser la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction pour les justifier.

Il reste encore à régler le problème de la mise en place d'une technique permettant de mettre les expressions du second degré sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$. On donnera ci-dessous les éléments d'une

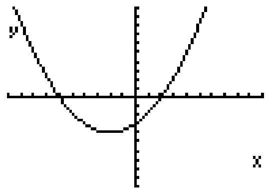
[22] On ajoutera en outre que la technique algébrique qui vit actuellement le plus souvent dans les classes de seconde permet généralement de produire la valeur du minimum mais en donnant la forme canonique de la fonction du second degré.

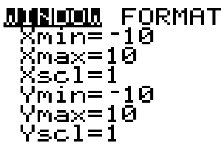
telle technique en la mettant en œuvre sur deux spécimens, sans aborder ici la question de sa mise en place.

$h : x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right) x^2 + x - 3$.

Partie expérimentale

Représentation graphique de la fonction





Tables de valeurs

X	Y1
-5	-1.75
-4	-3
-3	-3.75
-2	-4
-1	-3.75
0	-3
1	-1.75

X=-5

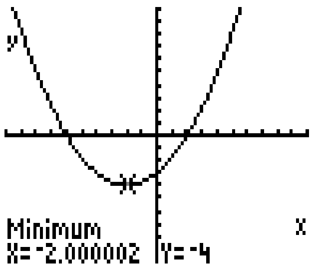
X	Y1
-5	-1.75
-4	-3
-3	-3.75
-2	-4
-1	-3.75
0	-3
1	-1.75

Y1=-3.75

X	Y1
-2.3	-3.978
-2.2	-3.99
-2.1	-3.998
-2	-4
-1.9	-3.998
-1.8	-3.99
-1.7	-3.978

Y1=-4

Détermination graphique du minimum



La fonction est décroissante sur]- ∞ ;–2] et croissante sur [–2 : + ∞ [. Elle admet un minimum en –2 qui vaut –4.

Elle se met sous la forme $\left(\frac{1}{4}\right)(x+2)^2 - 4$, ce que l'on vérifie :

```
Y1=(1/4)*X^2+X-3

Y2=(1/4)*(X+2)^2
-4
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

X	Y1	Y2
-3	-3.75	-3.75
-2.5	-3.938	-3.938
-2	-4	-4
-1.5	-3.938	-3.938
-1	-3.75	-3.75
-.5	-3.438	-3.438
0	-3	-3

X=-3

Preuves :

1. On a $(x+2)^2 = x^2 + 4 + 4x$. Donc $\frac{1}{4}(x+2)^2 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ et finalement $\frac{1}{4}(x+2)^2 - 4 = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$

2. On considère $a \leqslant b \leqslant -2$. On a alors $a+2 \leqslant b+2 \leqslant 0$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, on obtient que $(a+2)^2 \geqslant (b+2)^2$ et donc $\left(\frac{1}{4}\right)(a+2)^2 \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)(b+2)^2 \geqslant 0$, soit finalement $\left(\frac{1}{4}\right)(a+2)^2 - 4 \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)(b+2)^2 - 4 \geqslant -4$. La fonction est ainsi décroissante sur $]-\infty\,;-2]$ et sur cet intervalle on a $h(x) \geqslant 4$.

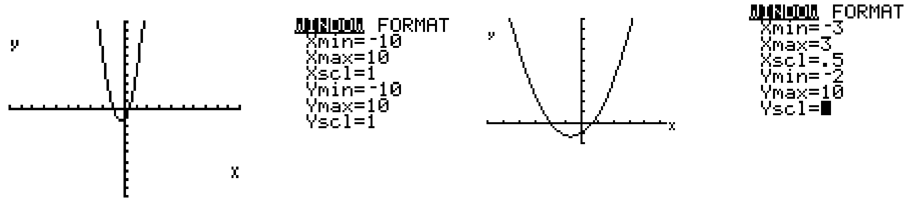
3. On considère $a \geqslant b \geqslant -2$. On a alors $a+2 \geqslant b+2 \geqslant 0$. Comme la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$, on obtient que $(a+2)^2 \geqslant (b+2)^2$ et donc $\left(\frac{1}{4}\right)(a+2)^2 \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)(b+2)^2 \geqslant 0$, soit finalement $\left(\frac{1}{4}\right)(a+2)^2 - 4 \geqslant \left(\frac{1}{4}\right)(b+2)^2 - 4 \geqslant -4$. La fonction est ainsi croissante sur $[-2\,;+\infty[$ et sur cet intervalle on a $h(x) \geqslant 4$.

4. On a ainsi $h(x) \geqslant -4$ pour tout x, et -4 est le minimum de h. $h(-2) = -4$, et il est donc atteint pour $x = -2$.

$g : x \mapsto 3x^2 + 2x - 1$;

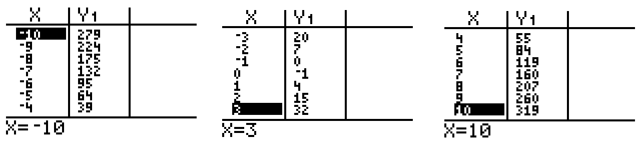
Partie expérimentale

Représentation graphique :

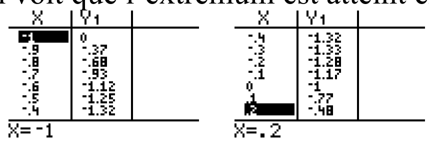


Tables numériques

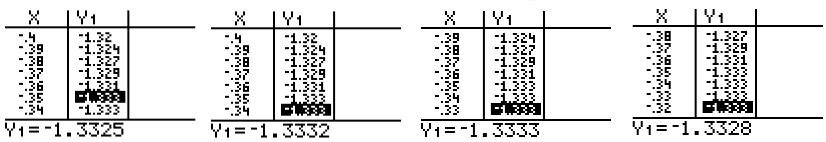
Pas de 1



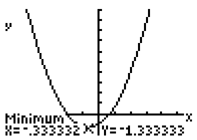
On voit que l’extrémum est atteint entre -1 et 1 ; pas de 0,1 à partir de -1 :



L’extrémum est atteint entre -0,4 et -0,2 ; pas de 0,01 :



Détermination graphique du minimum (calc – minimum)



La fonction est décroissante de $\left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$; elle admet un minimum en $-\frac{1}{3}$ qui vaut $-1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

Elle se met sous la forme $3(x + 1/3)^2 - 4/3$, ce que l'on vérifie :

```
Y1=3*(X+1/3)^2-4
/3
Y2=3*X^2+2*X-1
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
```

X	Y1	Y2
-3	20	20
-2.5	12.75	12.75
-2	7	7
-1.5	2.75	2.75
-1	1E-13	0
-.5	-1.25	-1.25
0	-1	-1

X= -3

On notera que la table fournit une valeur approchée de Y1 en -1.

Preuves :

1. $3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3} = 3\left(x^2+\frac{2}{3\,x}+\frac{1}{9}\right) = 3x^2 + 2x - 1$.

2. On considère $a \leq b \leq -1/3$. On a alors $a + 1/3 \leq b + 1/3 \leq 0$. La fonction $x \mapsto x^2$ étant décroissante sur $\left]-\infty\,;0\right]$, on obtient que $(a + 1/3)^2 \geq (b + 1/3)^2 \geq 0$, soit que $3(a + 1/3)^2 \geq 3(b + 1/3)^2 \geq 0$, et finalement que $3(a + 1/3)^2 - 4/3 \geq 3(b + 1/3)^2 - 4/3 \geq -4/3$, ce qui prouve que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right]$ et que sur cet intervalle $g(x) \geq -4/3$.

3. On considère $a \geq b \geq -1/3$. On a alors $a + 1/3 \geq b + 1/3 \geq 0$. La fonction $x \mapsto x^2$ étant croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$, on obtient que $(a + 1/3)^2 \geq (b + 1/3)^2 \geq 0$, soit que $3(a + 1/3)^2 \geq 3(b + 1/3)^2 \geq 0$, et finalement que $3(a + 1/3)^2 - 4/3 \geq 3(b + 1/3)^2 - 4/3 \geq -4/3$, ce qui prouve que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et que sur cet intervalle $g(x) \geq -4/3$.

4. On a donc $g(x) \geq -4/3$ sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que g admet un minimum qui vaut $-4/3$; il est atteint pour $x = -1/3$, puisque $g(-1/3) = -4/3$.

On obtient ainsi des techniques compatibles avec ce que demande le programme en liant de manière fonctionnelle le travail algébrique aux fonctions, qui préparent les élèves aux techniques qui seront étudiées dans les classes ultérieures du lycée et qui leur donnent la possibilité d'accomplir le type de tâches dans sa totalité, ou du moins d'avoir prise sur l'ensemble de la technique et de sa justification si l'on fait le choix d'une *technique coopérative*.

Ces techniques font également apparaître de manière lisible *une raison d'être de l'étude qualitative* de fonctions : on constitue pour l'essentiel la *base expérimentale* qui va permettre de faire surgir les premiers éléments de la théorie des fonctions, de la même manière que le travail à partir de figures permet de faire surgir des éléments de la théorie géométrique. La position relative des deux techniques, source de difficultés dans la séance en classe évoquée plus haut, trouve alors une solution semblable à celle adoptée en géométrie : on ne doute pas à l'issue de l'expérimentation graphique que le minimum de la fonction d'aire est 7, atteint en 2, de la même façon qu'une expérimentation graphique convainc qu'un triangle de côtés (3, 4, 5) est rectangle ; on a là deux faits, l'un numérique et l'autre géométrique, avérés. Il reste cependant, pour faire œuvre de mathématicien, à vérifier que l'on peut les déduire de la théorie fonctionnelle disponible (TFD) ou de la théorie géométrique disponible (TGD) : si cela n'était pas le cas, il faudrait travailler à augmenter la théorie des ingrédients pertinents (éventuellement lors d'une année d'étude ultérieure, comme cela sera le cas de quelques types de fonctions pour lesquelles on en restera, en seconde, à la conviction expérimentale).

Scinder fortement l'étude qualitative des fonctions de celle des fonctions de référence comme le fait actuellement la norme de la profession constitue donc un obstacle pour faire entendre le travail d'élaboration théorique en cours de constitution, comme en témoigne par exemple la question suivante posée par un élève professeur l'an dernier :

Les élèves de la classe de 2de que j'ai en responsabilité ont énormément de mal à s'exprimer clairement. Surtout sur le thème des fonctions, ils mélangent les notions appartenant au domaine fonctionnel avec celles appartenant au domaine graphique. Je pense pourtant le répéter souvent et bien faire la distinction. Que pourrais-je faire ? (20, 2de, 2007-2008)

Les techniques que nous venons de développer font en outre apparaître que les tâches T51 et T52, rencontrées précédemment dans l'OMR découpée par l'élève professeur, ont une fonction technologique puisqu'elles permettent de justifier et/ou de produire une technique de détermination des variations respectivement des fonctions polynômes du second degré et des fonctions homographiques par un « enchaînement de fonctions ».
Cette « fonctionnalisation » de l'enchaînement de fonctions et du sens de variation des « fonctions de référence » n'est pas anecdotique. C'est cela qui, on l'a vu, permet de fabriquer des techniques relatives aux types de tâches algébriques dont la justification repose sur la théorie des fonctions. On en donnera encore deux exemples lors de la prochaine séance.

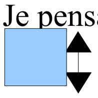
Séminaire de didactique des mathématiques
Résumés des séances

➔ Séance 20 : mardi 31 mars 2009

Programme de la séance. 1. Forum des questions (1) // 2. Encyclopédie du professeur – Éducation mathématiques & citoyenneté // 3. Forum des questions (2) // ~~4. Évaluation et développement – C2i2e // 5. Problématique et fonctionnement du Séminaire~~ // 5. Problématique et fonctionnement du Séminaire

1. Forum des questions (1)

La question des unités

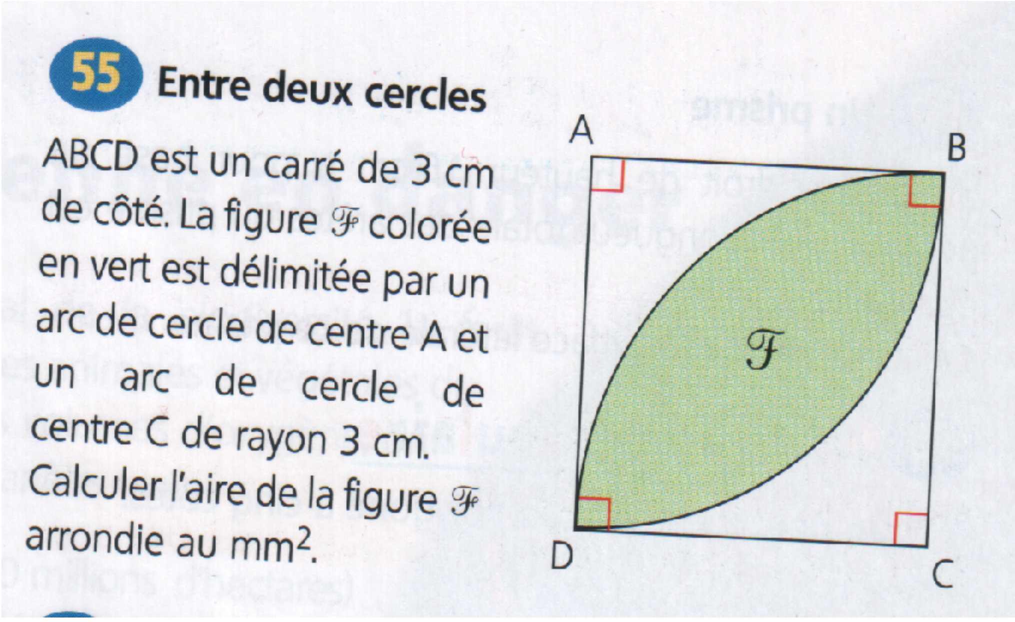
> En cinquième, dans le chapitre "Aires", doit-on – et si oui, comment peut-on – introduire le fait que l'arrondi au *mm*²est le 2^e chiffre après la virgule ? Pour eux, le premier chiffre après la virgule(en cm) est le mm... Comment leur expliquer qu'avec les aires, chaque unité prend deux colonnes ?
>
> Je pensais à :
>
>  1 mm $A = 1 \times 1 = 1 \ mm^2$; $A = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01 \ cm^2$. Donc $1 \ mm^2 = 0{,}01 \ cm^2$.
>
> Doit-on entrer dans ce genre de considérations ou juste demander d'arrondir à 1 ou 2 chiffres après la virgule ? (19, 5^e & 4^e)
>
> Les élèves ont du mal à comprendre la différence entre 3h12min et 3,12h. Comment leur expliquer ? (19, 5^e & 4^e)

Nous avons déjà travaillé sur la question des unités : nous avions alors donné une technique dont la production et l'emploi systématique permet de dépasser les difficultés signalées.

1. Supposons par exemple que nous ayons à exprimer en heure la durée 3 h 12 min. On obtient que 3h 12 min = 3 h + 12 $\times$ $\frac{1}{60}$ h = 3 h + $\frac{12}{60}$ h = 3 h + 0,2 h = 3,2 h.

La même technique employée pour écrire 3,12 h sous la forme « heures et minutes » donne : 3,12 h = 3 h + 0,12 h = 3 h + 0,12 $\times$ 60 min = 3 h + 7,2 min.
La mise en œuvre de cette technique permet de mettre en évidence que l'élément technologique essentiel réside dans l'égalité 1 h = 60 min et l'égalité équivalente 1 min = $\frac{1}{60}$ h.

2. Il en va de même avec la situation de la première question. On notera d'abord les égalités fautives : 1 $\times$ 1 = 1 mm², 0,1 $\times$ 0,1 = 0,01 cm² : c'est 1 mm $\times$ 1 mm = 1 mm² ou encore 0,1 cm $\times$ 0,1 cm = 0,01 cm² qu'il aurait fallu écrire. Cela précisé, on considérera l'exercice suivant, issu d'un ouvrage de cinquième (Transmath 5^e page 237), qui est un spécimen du type de tâches évoqué dans la question.



55 Entre deux cercles

ABCD est un carré de 3 cm de côté. La figure $\mathcal{F}$ colorée en vert est délimitée par un arc de cercle de centre A et un arc de cercle de centre C de rayon 3 cm.
Calculer l'aire de la figure $\mathcal{F}$ arrondie au mm2.

L'aire cherchée est égale à l'aire du carré moins l'aire des parties blanches. Ces parties ont la même aire et on a ainsi à calculer l'aire de l'une d'entre elles : on l'obtient en ôtant l'aire du quart de disque de rayon 3 cm à l'aire du carré de côté 3 cm. On obtient ainsi que cette aire, que l'on notera $\mathcal{B}$, est égale à 9 cm² – $\frac{\pi\, 9\, cm^2}{4} = \frac{36-9\pi}{4}$ cm².

Il vient donc que $\mathcal{F}$ = 9cm² – 2$\mathcal{B}$ = 9 cm² – $\frac{36-9\pi}{2}$ cm² = 9 cm² – 18 cm² + 4,5π cm² = (4,5π -9)cm². Une calculatrice collège donne : (4,5π -9)=5,137166941. Comme 1 cm² = 100 mm², 5,137166941 cm²= 5,137166941 × 100 mm² = 513,7166941 mm².
L'aire cherchée vaut alors 514 mm², soit encore 514 × 0,01 cm² = 5,14 cm².

Là encore, les éléments technologiques pertinents sont des égalités entre unités de mesure de la grandeur en jeu, soit 1 cm² = 100 mm² et 1 mm² = 0,01 cm², égalités qui ont dû être produites en classe de 6e. En effet, le programme de cette classe contient, dans le domaine Grandeurs et mesures le sujet « Effectuer pour les aires des changements d'unités de mesure », assorti du commentaire suivant : « Comme pour les longueurs, l'utilisation des équivalences entre diverses unités est préférée à celle systématique d'un tableau de conversion ».

3. On le voit à travers ces deux exemples, il ne s'agit pas d'expliquer ce qu'il se passe par un discours « bien ficelé » mais d'élaborer une organisation mathématique adéquate, avec une technique fiable et correctement justifiée, qu'il faut ensuite mettre en place en laissant suffisamment de *topos* aux élèves lors de sa mise en place. On notera à cet égard que le programme de collège sous-entend, sans véritablement l'expliciter, que la technique du tableau de conversion est moins fiable que la technique précédente, puisqu'elle masque les éléments justificatifs qui permettent d'en assurer le contrôle.

4. Nous poursuivrons ce travail sur les unités en examinant le point que nous avions partiellement laissé de côté lors de la séance 17, à savoir une justification mathématique pour le professeur de l'intégration des unités dans les calculs.

4.1. Nous avions déjà noté que l'ingrédient principal de la justification reposait sur la notion de grandeur. L'arithmétique traditionnelle nommait grandeur « tout ce qui peut être augmenté ou diminué, comme la largeur d'une route, la durée d'un trajet, la vitesse d'un véhicule, le nombre de feuilles d'un livre, etc. » et réservait l'appellation de grandeurs mathématiques à celles pour lesquelles on peut [en outre] définir l'égalité et la somme », comme « les surfaces, les volumes, les angles, les arcs, les forces, les quantités de chaleur, etc. ». Les formulation précédentes sont en fait mathématiquement insuffisantes pour définir la notion de grandeur mais elles avaient le mérite de poser le socle sur lequel le travail d'axiomatisation de la notion d'espèce de grandeurs peut prendre appui (voir les archives du Séminaire (année 2002-2003) pour une annexe sur cette question).

4.2. En termes « savants », la théorie mathématique des grandeurs conduit à regarder une espèce de grandeur $\mathcal{G}$ (aire, volume, masse, etc.) comme une demi droite vectorielle réelle (lorsque le système des nombres positifs disponibles n'est encore que $\mathbb{D}$+ on doit bien entendu parler de demi-module ; lorsque ce système n'est encore que $\mathbb{Q}$+, de demi-droite vectorielle rationnelle). En pratique, une fois choisie une grandeur $u \in \mathcal{G}$ non nulle, toute grandeur $g \in \mathcal{G}$ s'écrira sous la forme $g = xu$. En mobilisant un peu d'algèbre linéaire, $\{u\}$ est une base de $\mathcal{G}$, et x est la coordonnée du vecteur $g \in \mathcal{G}$ dans cette base. En termes de grandeurs, u est la grandeur unité et x est la mesure de la grandeur g par rapport à cette unité.

4.3. Si v est une seconde grandeur non nulle et si $v = ru$, soit encore $u = \frac{1}{r}v$, alors on a :
$g = x\,u = x(\frac{1}{r}\,v) = \left(x\,\frac{1}{r}\right)v = \frac{x}{r}\,v$. C'est exactement ce que nous avons mis en œuvre dans les exemples précédents avec l'espèce $\mathcal{A}$ des aires, u = cm² et v = mm² et $\mathcal{D}$ l'espèce des durées, $u = h$ et v = min.
Cela se généralise aux grandeurs composées : à la notion de demi-droite vectorielle réelle, il faut alors substituer une structure mathématique appelée algèbre de grandeurs. l'essentiel est de retenir que l'on peut ainsi justifier complètement le calcul avec les unités, qu'elles soient simples ou composées. On se reportera aux notes du Séminaire 2002-2003 déjà citées sur cette question.

2. L'encyclopédie du professeur : éducation mathématique & citoyenneté

Voici le plan de la notice dont nous allons débuter l'étude.

1. L'École et les citoyens
2. Mathématiques et citoyenneté : ce que disent les textes officiels
3. De l'instruction à l'éducation
4. Des mathématiques pour le citoyen
5. Un certain rapport aux mathématiques
6. Un certain rapport à l'étude des mathématiques
7. Élémenter les savoirs

Nous étudierons d'abord les 4 premières parties que nous reproduisons ci-dessous.

1. L'École et les citoyens

1.1. L'origine de la notion de **citoyen** se trouve dans l'expérience grecque de la **démocratie**. La Cité grecque rassemble des « semblables » (homoioi) qui sont, abstraitement, des « égaux » (isoi). Dans un ouvrage fondamental, Les origines de la pensée grecque [23], l'helléniste Jean-Pierre Vernant apporte à ce propos le commentaire suivant :

> En dépit de tout ce qui les oppose dans le concret de la vie sociale, les citoyens se conçoivent, sur le plan politique, comme des unités interchangeables à l'intérieur d'un système dont la loi est l'équilibre, la norme l'égalité. Cette image du monde humain trouvera au VIe siècle son expression rigoureuse dans un concept, celui d'*isonomia* : égale participation de tous les citoyens à l'exercice du pouvoir.

1.2. Le passage de l'individu concret au citoyen va de pair avec une révolution cruciale dans l'organisation politique, sans laquelle l'idée de citoyen ne serait pas ce qu'elle est : le citoyen grec obéit, non pas à un homme, mais aux ***lois*** qu'il a concouru à établir. C'est ce qu'explique Dominique Schnapper dans le passage suivant de son livre *Qu'est-ce que la citoyenneté ?* [24] :

> Les Grecs n'ont pas seulement inventé l'idée de citoyen qui ne se confond pas avec l'individu concret ou, en d'autres termes, l'idée d'un domaine politique distinct de la société formée par les liens des hommes concrets, ils ont inventé le principe de l'État de droit. La *polis* était, pour les Grecs, fondamentalement différente des empires des Barbares, parce que les citoyens n'obéissaient pas à un homme, si puissant fût-il, mais aux lois. Condamné à mort, Socrate refusa de s'enfuir pour manifester son respect des lois de la Cité, même quand elles étaient appliquées injustement.

1.3. Le citoyen a des droits, qui sont aussi des devoirs : on appelle ***civisme***, précisément, « l'exercice du respect à l'égard de la République et de ses lois [25] ». Dans *Du contrat social* (1762), Jean-Jacques Rousseau vitupère ainsi sévèrement certaines formes de désengagement des citoyens à l'endroit des affaires publiques :

> Sitôt que le service public cesse d'être la principale affaire des Citoyens, et qu'ils aiment mieux servir de leur bourse que de leur personne, l'État est déjà près de sa ruine. Faut-il marcher au combat ? ils payent des troupes et restent chez eux ; faut-il aller au Conseil ? ils nomment des députés et restent chez eux. À force de paresse et d'argent ils ont enfin des soldats pour asservir la patrie et des représentants pour la vendre.

1.4. Les ***droits du citoyen*** vont au-delà des ***droits de l'homme*** : selon une formule du constitutionnaliste Jean Rivero, « les droits de l'homme sont des libertés, les droits du citoyen sont des pouvoirs [26] ». Le problème des ***conditions de possibilité de l'exercice effectif*** de ces pouvoirs est posé par la Révolution française et reçoit une solution de principe à travers la création de ***l'école de la République***– l'École. Ce que D. Schnapper explicite ainsi [27] :

> … l'éducation est au cœur du projet démocratique. Les citoyens doivent disposer des moyens nécessaires pour exercer *concrètement* leurs droits. C'est ce qui fonde l'idéologie et le rôle de l'École dans la société des citoyens : elle doit donner à tous les capacités nécessaires pour participer réellement à la vie publique.
>
> L'École, qu'elle soit directement organisée par l'État ou contrôlée par lui, est sans doute l'institution de la citoyenneté par excellence. Dans la démocratie grecque de l'Antiquité, l'absence d'école publique limitait la participation politique réelle aux citoyens riches : l'idée que chaque citoyen doit pouvoir exercer concrètement ses droits est liée à la démocratie moderne. C'est à partir de la Révolution que les maîtres d'école, en France, cessèrent d'être appelés des « régents », pour devenir des « instituteurs », parce qu'ils étaient désormais chargés d'instituer la « nation », au sens de l'article 3 de la Déclaration des droits de l'homme et du citoyen, source de la légitimité politique. Plus directement que dans d'autres pays, l'École est, en France, l'école du citoyen.

1.5. Pour user d'une formulation employée par Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (1743-1794), dans son *Éloge de M. Franklin* (1789), il s'agit donc d'« éclairer les hommes pour en faire des citoyens ». L'« institution » du citoyen, de la République et de son École s'opère d'un même mouvement, réglé par les principes « fondateurs de l'esprit libre et éclairé, soucieux du vrai [28] », qui doivent guider le développement de l'***« art social »*** que Condorcet appelle de ses vœux [29].

---

[23] PUF, 1962, p. 36.

[24] Gallimard, 2000, p. 13.

[25] On trouvera sur le site Internet de l'IUFM d'Aix-Marseille une notice éclairante sur la notion du civisme (http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/ecjs/productionsaix/civisme.htm).

[26] *Libertés publiques*, PUF, 1995, t. 2, p. 54.

[27] *Op. cit.*, p. 154. La Déclaration des droits de l'homme et du citoyen évoquée ici est celle du 26 août 1789, dont l'article 3 énonce : « Le principe de toute souveraineté réside essentiellement dans la nation. Nul corps, nul individu ne peut exercer d'autorité qui n'en émane expressément. »

[28] Charles Coutel, *Condorcet. Instituer le citoyen*, Michalon, 1999, p. 16.

1.5.1. Le principe de ***perfectibilité*** [30] conduit à « rompre avec tout providentialisme ou toute prédestination » et doit se traduire, au prix de ***risques calculés***, en ***perfectionnements concrets.*** Dans le premier de ses cinq *Mémoires sur l'instruction publique* (1791), Condorcet note ainsi :

> … le but de l'éducation ne peut plus être de consacrer les opinions établies, mais, au contraire, de les soumettre à l'examen libre des générations successives, toujours de plus en plus éclairées.

1.5.2. Le principe de ***collégialité*** énonce que les hommes doivent rechercher la vérité ***ensemble***, en évitant les deux écueils solidaires de l'***égalitarisme*** (entendu comme la négation de la diversité des individus concrets) et de l'***élitisme*** (qui nie autrement l'égale dignité des hommes), au profit d'une dynamique de perfectionnement, fruit de l'effort collégial d'un ensemble de citoyens.

1.5.3. Le principe de ***rationalité*** guide l'effort d'intelligibilité du monde naturel et social dans la « guerre de la raison contre les préjugés ». Contre l'opportunisme et le dogmatisme de ceux qui assignent le premier rôle soit à la vertu, soit à l'enthousiasme, Condorcet martèle : « il faut tout examiner, tout discuter, tout enseigner même ». Seule une rationalité elle-même perfectible peut, loin de tout « esprit de système », mais dans un « esprit systématique », présider au devenir « des peuples vraiment libres ».

1.5.4. Le principe de ***laïcité*** [31] vise à substituer à quelque « esprit de secte » que ce soit le seul « esprit public ». Cette exigence conduit à l'affirmation de l'indépendance de l'École par rapport à toute sujétion partisane. Dans son *Rapport et projet de décret sur l'organisation générale de l'instruction publique* (présenté à l'Assemblée nationale les 20 et 21 avril 1792), Condorcet conclut :

> L'indépendance de l'instruction publique fait en quelque sorte une partie des droits de l'espèce humaine.

Et il note encore :

> Après avoir affranchi l'instruction de toute espèce d'autorité, gardons-nous de l'assujettir à l'opinion commune : elle doit la dénoncer, la corriger, la former et non la conduire et lui obéir.

« L'École de la République, souligne Charles Coutel [32], est une École du jugement : il s'agit de confronter les faits et les situations à des lois universelles, de situer les objets dans la nature, les énoncés dans les théories et les événements dans les processus historiques. »

1.5.5. Le principe d'***humanité*** est le dernier des cinq principes retenus. Charles Coutel le commente en ces termes [33] :

> L'amour de l'humanité est l'horizon éthique de la citoyenneté condorcétienne. Cet amour ouvre les grands principes précédents vers l'universalité, dont le sentiment de fraternité serait l'aspect affectif. […] Cette amplification humaniste a deux conséquences pour l'institution du citoyen : tout d'abord, dans l'Instruction publique, chaque enfant ne sera pas considéré d'abord comme « futur citoyen » et *a fortiori* comme « petit soldat » mais comme un « petit d'homme », candidat à l'humanité. Ensuite, les droits de l'homme et l'exercice des droits politiques auront l'humanité comme horizon et non la seule patrie (l'identification complète entre la nationalité et la citoyenneté est étrangère à Condorcet).

Le principe d'humanité ordonne une dialectique du même et de l'autre qui, en rompant avec toutes les formes de narcissisme naïf ou cynique, institue la République. L'estime de soi, par exemple, devient alors ***amour de l'humanité en soi-même***.

1.6. La construction de la citoyenneté est un processus toujours inachevé. Pour ne prendre ici qu'un exemple, le droit de vote, prévu dans son principe par la constitution du 24 juin 1793, mais non appliqué, fut établi pour les hommes (y compris les domestiques…) par la proclamation, le 2 mars 1848, du suffrage « universel » (masculin) [34]. Mais l'extension de ce principe aux femmes, adoptée quatre fois par la Chambre des députés entre 1919 et 1936 (par 488 voix contre une en 1936) et chaque fois rejetée par le Sénat, devra

---

[29] « Nous avons regardé l'art social, écrit Condorcet, comme une véritable science fondée […] sur des faits, sur des expériences, sur des raisonnements et sur des calculs […] susceptibles d'un développement infini. » Dans ce qui suit, nous empruntons l'essentiel à l'ouvrage déjà cité de Charles Coutel.

[30] Le terme est alors nouveau : il apparaît dans le *Discours sur l'origine de l'inégalité* de J.-J. Rousseau, publié en 1755.

[31] Le grec *laos*, à l'origine du mot « laïcité », signifie « peuple », « gens », « citoyens ».

[32] *Op. cit.*, pp. 58-59.

[33] *Ibid.*, pp. 28-29.

[34] « Le gouvernement provisoire [de la IIe république] arrête en principe et à l'unanimité que le suffrage sera universel et direct sans la moindre condition de cens. » Notons toutefois que le droit de vote ne sera jamais accordé pleinement aux « indigènes » des colonies de la France : sur cette question complexe et douloureuse, voir Dominique Colas, *Citoyenneté et nationalité* (Gallimard, 2004).

attendre l'ordonnance du 21 avril 1944 prise à Alger par le Comité français de Libération nationale [35]. En 1936, trois femmes deviennent membres du nouveau gouvernement issu des élections législatives (qui avaient donné la victoire au Front Populaire) : elles n'ont pourtant pas le droit de vote ! « Trois hirondelles ne font pas le printemps [36] », commentera la militante féministe Louise Weiss (1893-1983). Les femmes ne voteront pour la première fois qu'aux élections municipales du 29 avril 1945.

2. Mathématiques et citoyenneté : ce que disent les textes officiels

2.1. Que disent les textes gouvernant l'enseignement secondaire des mathématiques en matière de citoyenneté ? Le document d'accompagnement du programme du cycle central du collège précise ceci [37] :

> Le professeur de mathématiques peut participer à la formation du citoyen dans l'exercice même de ses fonctions, sans avoir, pour ce faire, besoin de lancer ses élèves dans des activités qui s'écarteraient par trop de sa discipline d'enseignement.

Mais quelle peut être la contribution propre des mathématiques à la formation du citoyen ? Un premier élément de réponse apparaît essentiel, même si, bien sûr, il n'est pas entièrement spécifique à la classe de mathématiques : il s'agit de la formation de l'élève à la ***« démarche scientifique »***, notamment dans sa dimension ***critique***, ainsi qu'il apparaît dans l'***Introduction générale pour le collège*** relative à l'enseignement des mathématiques :

> Au collège, les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. L'objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. Elles contribuent ainsi à la formation du futur citoyen.

Ce point de vue est souligné encore par ce passage du programme du cycle central du collège :

> La démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves et concourt à celle de citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.

À ce point de vue fait écho le programme de 3e :

> Comme dans les classes antérieures, la démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves, et concourt à celle du citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, et en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.

2.2. Constitutive par excellence d'une citoyenneté active, la capacité clé consiste à ***interroger le monde*** naturel et social, à ***soulever des questions*** à son propos, à ***tenter d'y répondre*** d'une manière bien contrôlée. Ce que le document d'accompagnement du programme du cycle central formule dans les termes suivants :

> Les mathématiques, école de rigueur, sont aussi une discipline qui apprend à se poser des questions. Et répondre ne pourra résulter de pétitions de principe ou d'arguments d'autorité, mais obligera à énoncer ses présupposés, à justifier les traitements entrepris et les résultats atteints. Pour la formation du citoyen, de telles attitudes sont fondamentales.

2.3. La dialectique entre ***questions*** mathématiques ou extramathématiques ***à étudier*** et ***savoirs*** mathématiques construits ou à construire en tant qu'***outils d'étude*** est au cœur de la formation à une telle citoyenneté éclairée (et éclairante). Le programme de 6e précise ainsi que l'enseignement des mathématiques en classe de sixième vise notamment à « développer la capacité à utiliser les outils mathématiques dans différents domaines (vie courante, autres disciplines) » et ajoute :

> Pour cela, la démarche d'apprentissage vise à bâtir les connaissances mathématiques à partir de problèmes rencontrés dans d'autres disciplines ou issus des mathématiques elles-mêmes. En retour, les savoirs mathématiques

---

[35] Cette ordonnance prévoyait, dans son article 1er, la convocation d'une Assemblée nationale constituante « élue par tous les Français et Françaises majeurs », tandis qu'un autre article précisait que les femmes, comme les hommes, étaient électrices et éligibles.

[36] Il s'agissait de la radicale Cécile Brunschvicg, présidente de l'Union française pour le suffrage des femmes, nommée sous-secrétaire d'État à l'Éducation nationale, de la socialiste Suzanne Lacore, nommée sous-secrétaire d'État à la protection de l'enfance, enfin de la lauréate du prix Nobel de chimie 1935, Irène Joliot-Curie, nommée sous-secrétaire d'État à la Recherche scientifique.

[37] La classe de mathématiques est présentée par ce même document comme devant contribuer à d'autres aspects encore de la formation du collégien : « L'enseignement des mathématiques, y lit-on ainsi, peut apporter une contribution à ces différents aspects de la formation que sont l'éducation à la citoyenneté, l'éducation à l'orientation, l'éducation à l'environnement. (Quand, ici, il est question d'environnement, il s'agit aussi bien d'environnement socio-économique que d'environnement culturel ou d'environnement naturel.) »

doivent être utilisables dans des spécialités diverses, ce qui contribue à faire prendre conscience de la cohérence des savoirs et de leur intérêt mutuel et favorise la prise en compte par les élèves à la fois du caractère d'« outil » des mathématiques et de leur développement comme science autonome.

Cette démarche, y lit-on encore, « renforce également la formation intellectuelle de l'élève, développe ses capacités de travail personnel (individuellement et en équipes) et concourt à la formation du citoyen. »

2.4. Le document d'accompagnement du programme de 3^{e} reprend autrement ce point, en insistant sur l'effort de ***synthèse*** qui doit aller de pair avec le travail concret sur telle ou telle question étudiée :

> Au terme d'un exercice, amener l'élève à en dégager l'intérêt – le type de problème qui a été résolu, le résultat qui a été établi –, à situer l'exercice dans la progression du cours, et plus généralement dans l'ensemble des connaissances acquises au collège, est particulièrement formateur : cela permet d'avoir une vision globale des questions abordées en mathématiques et dans certains cas de leurs liens avec d'autres disciplines. Ainsi l'enseignement des mathématiques contribue pour une bonne part à la formation générale des collégiens et à leur formation de futur citoyen.

2.5. Les programmes de mathématiques présentent de manière insistante le domaine de l'organisation et de la gestion de données – soit en gros le domaine de la ***statistique***, tel qu'il se met en place au collège –, comme le lieu par excellence de la formation mathématique à la citoyenneté. Un passage du programme de 3^{e} justifie en partie cette insistance dans les termes suivants :

> L'éducation mathématique rejoint ici l'éducation du citoyen : prendre l'habitude de s'interroger sur la signification des nombres utilisés, sur l'information apportée par un résumé statistique et donc sur la perte d'information, sur les possibilités de généralisation, sur les risques d'erreurs d'interprétation et sur leurs conséquences possibles.

Les programmes des autres classes ne sont pas en reste, comme le montre le florilège d'extraits ci-après, où l'on notera tout particulièrement la référence répétée aux « autres disciplines » :

1. « Les trois parties de cette rubrique s'éclairent et se complètent mutuellement. La contribution des mathématiques à l'éducation du citoyen y apparaît clairement. La partie statistique a pour objectif d'initier à la lecture, à l'interprétation, à la réalisation et à l'utilisation de diagrammes, tableaux et graphiques et d'en faire l'analyse critique. » *(Gestion de données & fonctions en 5^{e})*
2. « Les notions essentielles relatives à cette rubrique ont été introduites ou approfondies en 6^{e} et 5^{e}. […] Le lien avec les autres disciplines et avec l'éducation à la citoyenneté sera maintenu et renforcé. » *(Gestion de données & fonctions en 4^{e})*
3. « Le programme du cycle central du collège a pour objectif de permettre […] en "organisation et gestion de données" l'acquisition de quelques outils statistiques utiles dans d'autres disciplines et dans la vie de tout citoyen. » *(Accompagnement du programme de 5^{e} & 4^{e})*
4. « Par ailleurs, la place des statistiques dans la vie courante et leur utilisation dans de nombreuses disciplines demandent que la formation du futur citoyen se poursuive en ce domaine… » (*Accompagnement du programme de 3^{e}*)

2.6. L'articulation des mathématiques avec la vie des citoyens s'accomplit par la ***modélisation*** de ***situations*** du monde. Le ***matériau de base*** est ici constitué des ***grandeurs*** en lesquelles se déploie la diversité du monde. L'***outil fondamental***, à ce niveau des études mathématiques, est alors celui de la ***proportionnalité***, lié lui-même à la notion de ***pourcentage*** – ce qu'illustre le choix d'extraits ci-après.

1. « C'est dans des situations mettant en jeu des grandeurs que tous les élèves pourront réinvestir les connaissances acquises en mathématiques. Les mathématiques du citoyen sont celles qui interviennent comme outils pour les grandeurs, celles qui permettent de modéliser efficacement des situations faisant intervenir des grandeurs. »
2. « Les élèves ont eu l'occasion de prendre conscience petit à petit, au long du collège, de la nature de l'activité mathématique et des mathématiques, en particulier avec la construction de modèles de certaines situations, notamment celles de la proportionnalité. Ils acquièrent également des techniques élémentaires de traitement et de résolution, qui ont des utilisations très diverses au quotidien, dans les autres disciplines et dans la vie du citoyen. »
3. « La proportionnalité est un concept capital. Elle est indispensable pour l'étude et la compréhension des relations entre grandeurs physiques ; sous l'aspect des pourcentages, elle joue un rôle essentiel dans la vie du citoyen. »
4. « La proportionnalité, rencontrée dès l'école, est, en particulier, un concept non seulement essentiel dans la vie du citoyen, mais encore fondamental pour l'étude et la compréhension des relations entre les grandeurs physiques. »

3. De l'instruction à l'éducation

3.1. Le citoyen se définit par son rapport à la Cité : il détient une part de la souveraineté politique et doit assumer cette part de pouvoir au sein de la *polis* pour s'assumer effectivement en tant que citoyen. Si l'instruction à laquelle il a droit – et qu'il est de son devoir d'acquérir – doit l'aider à déjouer les tyrannies que peuvent faire peser sur lui les savants et les puissants, cette entreprise est d'emblée collective, collégiale, bref, « citoyenne ». Car le citoyen est le contraire de l'***idiot*** : le mot *idiotès* désigne à l'origine, en grec, l'homme privé, qui se prive (ou se trouve privé) de tout ce qui n'est pas simple vie « privée », par opposition à l'homme public impliqué dans la vie de la Cité, qui est aussi l'homme « libre ». Le problème de l'instruction du citoyen se pose alors autrement qu'il ne se pose pour l'idiot de la Cité : constamment, il faut s'inquiéter de savoir si cette instruction lui permettra d'être à la hauteur des affaires de la Cité. Tel est exemplairement le souci de Condorcet face aux formidables défis que pose aux citoyens la Révolution française lorsque, en octobre 1793, alors qu'il doit se cacher (il a été décrété d'accusation le 3 octobre 1793), il rédige son *Esquisse d'un Tableau historique des progrès de l'esprit humain* (qui sera publiée en 1795, après sa mort) :

> Tout nous dit que nous touchons à l'époque d'une des grandes révolutions de l'espèce humaine. […] L'état actuel des lumières nous garantit qu'elle sera heureuse ; mais n'est-ce pas aussi à condition que nous saurons nous servir de toutes nos forces ? Et pour que le bonheur qu'elle promet soit moins chèrement acheté, pour qu'elle s'étende avec plus de rapidité dans un plus grand espace, pour qu'elle soit plus complète dans ses effets, n'avons-nous pas besoin d'étudier dans l'histoire de l'esprit humain quels obstacles nous restent à craindre, quels moyens nous avons de surmonter ces obstacles ?

3.2. D'une manière générale, l'instruction prodiguée doit répandre les lumières qui permettront de « perfectionner l'espèce humaine » : le programme d'études est immense, même quand on le recentre autour des besoins d'instruction « politique » ! Dans le troisième de ses *Mémoires sur l'instruction publique* (1791), Condorcet écrit ainsi :

> Il faut non seulement que chaque homme soit instruit des nouvelles lois qui s'exécutent ou se préparent dans les diverses branches de l'administration, qu'il soit toujours en quelque sorte au courant de la législation sous laquelle il doit vivre ; il faut de plus que si l'on agite de nouvelles questions politiques, si l'on cherche à fonder l'art social sur de nouveaux principes, il soit averti de l'existence de ces questions, des combats d'opinions qui s'élèvent sur ces principes. Comment, en effet, sans cette instruction pourrait-il connaître et les hommes par qui sa patrie est gouvernée et ce qu'elle en doit attendre, savoir quels biens ou quels maux on lui prépare à lui-même ? Comment sans cela une nation ne resterait-elle pas divisée en deux classes, dont l'une, servant à l'autre de guide, soit pour l'égarer, soit pour la conduire, en exigerait une obéissance vraiment passive, puisqu'elle serait aveugle ? Et que deviendrait alors le peuple sinon un amas d'instruments dociles que des mains adroites se disputeraient pour les rejeter, les briser, ou les employer à leur gré ?

Mais il ajoute aussitôt ceci [38] :

> Je n'ai point la prétention de vouloir changer en publicistes les vingt-quatre millions de citoyens actifs qui, réunis sous une loi commune, veulent être libres de la même liberté ; mais, dans cette science comme dans toute autre, quelques heures d'attention suffisent souvent pour comprendre ce qui a coûté au génie des années de méditation. D'ailleurs, on aurait soin, dans cette instruction, de rapporter aux droits de l'homme toutes les dispositions des lois, toutes les opérations administratives, tous les moyens comme tous les principes ; la déclaration des droits serait l'échelle commune à laquelle tout serait comparé, par laquelle tout serait mesuré. Dès lors, on n'aurait plus besoin de ces connaissances étendues, de ces réflexions profondes, souvent nécessaires pour reconnaître l'intérêt commun sous mille intérêts opposés qui le déguisent. Ainsi, en ne parlant aux hommes que de ces droits communs à tous, dans l'exercice desquels toute violation de l'égalité est un crime, on ne leur parlera de leurs intérêts qu'en leur montrant leurs devoirs et toute leçon de politique en sera une de justice.

3.3. Mais le citoyen n'a pas besoin seulement d'instruction « politique » au sens restreint du terme. Le troisième mémoire porte *Sur l'instruction commune pour les hommes*, dont Condorcet précise les grandes divisions en ces termes :

> Réglée comme toute autre sur les besoins les plus généraux, elle aura principalement pour objet : 1) les connaissances politiques ; 2) la morale ; 3) l'économie domestique et rurale ; 4) les parties des sciences et des arts qui peuvent être d'une utilité commune ; 5) enfin, l'éducation physique et morale.

Tant ce découpage que le contenu précis des champs de connaissance qu'il distingue mérite d'être indéfiniment repris, réexaminé, réévalué. Mais la problématique générale du choix des matières à étudier est, elle, sans ambiguïté : elle se fonde sur ce que Condorcet nomme l'***utilité*** des connaissances dont l'on doit

[38] Un publiciste est « celui qui écrit sur le droit public, qui est versé dans cette science » (Littré) ; et, plus largement, celui qui écrit sur les matières politiques. Le mot, sorti d'usage aujourd'hui, était entré dans le Dictionnaire de l'Académie en 1762.

s'instruire. L'abord préconisé est clairement ***fonctionnel*** : il n'y a pas ici de valorisation ***formelle*** de la connaissance, qui ne saurait être regardée comme un bien précieux indépendamment de ses usages. Cela ne signifie pas – au contraire ! – que la connaissance puisse se réduire à la mise en application d'un corps de doctrine indiscuté. À propos de l'« économie rurale », dans une section intitulée significativement « Utilité et difficulté de substituer dans l'économie rurale à une routine aveugle une pratique éclairée par l'observation », Condorcet observe ainsi :

> L'économie rurale n'est, en général, que l'application de ce que l'expérience a fait connaître de plus certain, de plus profitable […]. Cette expérience se réduit presque partout à d'anciens usages que l'on suit, non parce qu'ils sont les meilleurs, mais parce qu'ils conduisent d'une manière presque sûre à tirer de son exploitation le produit sur lequel on a fait ses arrangements antérieurs.

Or, le problème, souligne Condorcet, est complexe. L'inertie des pratiques et des pensées n'explique pas tout : pour innover, encore faut-il s'être assuré de l'utilité des innovations ! Et c'est en ce point que la question d'une diffusion idoine des lumières appropriées se pose avec acuité :

> Un homme peu éclairé, incapable de distinguer une vérité éprouvée par l'expérience, d'une rêverie annoncée avec une audacieuse importance, doit regarder toute innovation comme un véritable jeu de hasard, dans lequel il ne veut risquer ni sa subsistance ni même une partie de sa fortune. Cette prudence n'est donc point de la stupidité ; car la grande probabilité du succès peut seule justifier des tentatives […]. Le défaut d'instruction est donc la véritable cause du peu de progrès de l'agriculture, et on ne se plaindra plus de cette haine trop commune pour les nouveautés, lorsqu'on aura instruit les hommes à les apprécier ; mais ils aimeront à rester à leur place, tant qu'ils ne pourront marcher que dans les ténèbres.

On notera l'insistance mise à identifier comme un déficit d'instruction ce que d'aucuns pourraient regarder trop vite comme une « stupidité » intrinsèque et, quasiment, native ! Dans un texte plus ancien, la *Lettre d'un laboureur de Picardie à M. N.*** Auteur Prohibitif, à Paris* (1775), réponse à un ouvrage de Jacques Necker (1732-1804) publié la même année, *Sur la législation et le commerce des grains*, Condorcet faisait déjà dire sans détour au laboureur picard :

> Vous exagérez la stupidité du peuple : nous sommes ignorants parce qu'on n'a point daigné nous donner les moyens de nous instruire ; parce qu'il est tout simple qu'une jurisprudence, une législation des finances qu'aucun jurisconsulte, aucun financier ne peuvent se vanter d'avoir entendues en entier, n'offrent qu'un brouillard à des hommes qui n'ont ni le temps ni l'habitude de la réflexion : mais nous savons saisir les idées simples qu'on nous présente clairement, & raisonner avec justesse sur ces idées : nous savons souffrir avec patience les outrages que nous ne pouvons repousser ; mais nous ne sommes pas abrutis au point de ne les plus sentir.

3.4. L'instruction voulue par Condorcet, l'instruction utile au citoyen, porte sur les principes – les « technologies » – autant que sur les connaissances particulières que ces principes permettent de produire. Dans son premier mémoire, intitulé *Nature et objet de l'instruction publique*, où il précise notamment que « la constitution de chaque nation ne doit faire partie de l'instruction que comme un fait », Condorcet écrit ainsi :

> Le but de l'instruction n'est pas de faire admirer aux hommes une législation toute faite, mais de les rendre capable de l'apprécier et de la corriger. Il ne s'agit pas de soumettre chaque génération aux opinions comme à la volonté de celle qui précède, mais de les éclairer de plus en plus, afin que chacune devienne de plus en plus digne de se gouverner par sa propre raison.

D'une manière plus générale, l'instruction citoyenne vise à permettre à chacun d'entretenir, à tout objet d'instruction, un rapport critique. « L'instruction politique, note ainsi Condorcet, ne doit pas se borner à la connaissance des lois faites, mais s'étendre à celles des principes et des motifs des lois proposées. »

3.5. Que sont les objets sur lesquels doit porter cette instruction publique ? Faut-il pousser jusqu'à ce qu'on regarde ordinairement comme de simples objets ***d'éducation*** ? Condorcet est, là-dessus, fort réservé. La question est délicate, et polémique. Dans un article du *Moniteur* du 15 août 1793, l'un de ses amis et collègues (il est aussi mathématicien), Gilbert Romme (1750-1795), membre comme lui du Comité d'Instruction publique, écrit [39] :

> On a raison de distinguer l'éducation de l'instruction. L'instruction développe les facultés intellectuelles, l'éducation développe le caractère et les facultés morales […]. L'éducation seule donnerait de bonnes mœurs avec des préjugés ; l'instruction seule favoriserait les talents, mais donnerait de la jactance. Réunissez-les, et vous donnerez aux hommes des mœurs pures et des lumières.

[39] Cité *in* Charles Coutel, *Condorcet. Instituer le citoyen*, Michalon, 1999, p. 68.

L'éducation porterait donc sur le rapport de l'élève à des objets (« discipline », « civilité », etc.) que l'instruction ignorerait de fait, tandis qu'elle-même serait indifférente à nombre d'objets relevant plus proprement de l'instruction (ceux, en gros, dont nous parlent les différentes disciplines de connaissance enseignées à l'École). De fait, le passage, en 1932, à l'initiative d'Édouard Herriot (1872-1957), alors Président du Conseil [40], de la dénomination de ministère « de l'Instruction publique » à celle de ministère « de l'Éducation nationale » marquera tout à la fois la reconnaissance de cet écart entre instruction et éducation et l'élargissement du domaine de « l'éducation scolaire », en écho notamment au développement des mouvements de jeunesse et des associations éducatives visant à promouvoir des aspects toujours plus nombreux – relevant du sport, des loisirs, de la culture populaire, etc. – de la formation.

3.6. La distinction qu'explicitait Romme et que le sens commun continue de valider en grande partie peut cependant être contestée. L'écart de fait renvoie-t-il vraiment à un écart intrinsèque, indépassable ? Répondre positivement reviendrait à confondre le fait et le droit. À contre-fil, on peut soutenir que tout objet d'éducation est, potentiellement, objet d'instruction, parce que tout objet est ou peut être l'objet de savoirs positifs, dont il conviendrait que nous nous instruisions pour former et réformer notre rapport à cet objet. L'éducation marquerait ainsi, en l'occupant parfois indûment, le territoire potentiel d'une instruction qui, dans tout un ensemble de cas, n'aurait pas ***encore*** su conquérir les moyens épistémologiques de sa mission. Allant plus loin, on pourrait dire que toute éducation occupe le lieu d'une instruction déterminée, et l'on pourrait se proposer alors de débusquer, derrière l'éducation prétendue, l'instruction explicite ou, plus souvent, « cachée », et quelquefois hautement critiquable, dont elle procèderait. ***En ce sens***, mais en ce sens seulement, il appartient à l'instruction de se substituer progressivement à l'éducation, sans pour cela entraver le libre choix qu'a chacun de ses façons d'être, de ses manières d'agir, de sa pensée même, selon le principe de la ***laïcité au sens fort*** [41].

3.7. Un autre usage peut être fait du couple instruction-éducation, dont on trouve un écho dans ce passage de la 24e leçon du *Cours de philosophie positive* d'Auguste Comte (1798-1857) [42] :

> Quoiqu'il soit, sans doute, infiniment plus aisé d'apprendre que d'inventer, il faut enfin que le public, pour n'être point livré aux sophistes et aux trafiquants de science, soit profondément convaincu que, comme le simple bon sens l'indique clairement, ce qui a été découvert par le long et pénible travail du génie, la raison commune ne saurait se l'approprier réellement que par une méditation persévérante, précédée d'études convenables. […] Car les hommes ont encore plus besoin de méthode que de doctrine, d'éducation que d'instruction.

« Les hommes ont encore plus besoin d'éducation que d'instruction » : ici, l'instruction tend à être regardée – négativement – comme n'apportant au citoyen qu'un stock de recettes, tours de main ne renvoyant qu'à eux-mêmes car non articulés en une organisation de savoir qui en vivifie et en contrôle le sens. Par contraste, l'éducation, refusant l'imposition de « doctrines » toutes faites et indiscutées, fournit des méthodes pour observer, analyser, évaluer. Nul doute que Condorcet ne s'opposerait pas à l'éducation en ce sens, même s'il reste vrai que les objets « d'éducation » (au sens usuel) qui peuvent être regardés, à un moment historique donné et à un niveau scolaire donné, comme des objets « d'instruction » (au même sens) dépendent tout à la fois et de l'état de développement de la société (qui désigne ce dont elle accepte que ses jeunes générations s'instruisent), et du développement des sciences susceptibles d'outiller cette instruction.

4. Des mathématiques pour le citoyen

4.1. L'attention à la formation du citoyen dans la classe de mathématiques suppose l'attention à trois niveaux de la vie de la classe : celui des ***contenus mathématiques*** étudiés, celui du ***rapport aux mathématiques*** étudiées et utilisées, celui du ***rapport à l'étude*** des mathématiques. La première exigence impose notamment d'être attentif, non pas seulement à « l'infrastructure » mathématique, mais aussi aux sujets d'étude « superstructurels », « de contact » avec le reste du monde qui figurent dans les programmes parce qu'ils sont presque indispensables pour que les mathématiques construites dans la classe donnent aux élèves une prise effective sur les situations du monde dans lesquelles ils seront amenés à intervenir comme citoyens.

4.2. On illustrera la notion de « sujets d'étude "de contact" » par un premier exemple, celui des notions solidaires de ***taux*** (de croissance), d'***indice***, de ***coefficient multiplicateur***, etc. Le programme de 3e comporte ainsi le passage suivant :

[40] Ce qui équivaut au titre de Premier ministre aujourd'hui.

[41] Sur cette notion, voir la notice *Sur la laïcité*, que l'on trouvera sur le site Internet de l'IUFM d'Aix-Marseille, sous la rubrique *L'encyclopédie du professeur* / *Notices*.

[42] Cité *in* Bernadette Bensaude-Vincent, *L'opinion publique et la science*, Sanofi-Synthélabo, 2000, pp. 115-116.

La définition d'une fonction linéaire de coefficient a s'appuie sur l'étude de situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence que le processus de correspondance est « je multiplie par a ».

Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, une mise en évidence similaire peut être faite ; par exemple, augmenter de 5 % c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5 % c'est multiplier par 0,95.

On voit ici exemplairement deux éléments juxtaposés qui ont, dans la culture mathématique actuelle du collège, deux statuts différents : le premier relève de l'infrastructure mathématique que tout professeur se regarde comme tenu de mettre en place ; le second apparaît aujourd'hui comme un élément un peu périphérique, d'interfaçage avec le reste du monde – en particulier avec les enseignements d'autres disciplines –, dont le sort dans le travail mathématique de la classe est en conséquence plus incertain.

4.3. On peut rapprocher ce qui précède d'une situation curriculaire qui se présente en 4^{e}, classe où, dans le secteur d'études des *Fonctions numériques*, le programme comporte un thème d'études intitulé *Calculs faisant intervenir des pourcentages*. Ce thème fait l'objet du commentaire suivant :

En liaison avec d'autres disciplines (géographie), la notion d'indice pourra être présentée comme un cas particulier du coefficient de proportionnalité, donnant lieu à illustrations et calculs mais en aucun cas à des développements théoriques.

S'agissant des compétences exigibles à propos du thème d'études examiné, le programme explicite ceci :

Mettre en œuvre la proportionnalité dans des situations simples utilisant à la fois des pourcentages et des quantités ou des effectifs.

À ce propos, le commentaire suivant est apporté :

Des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines demandent de mettre en œuvre à la fois un coefficient de proportionnalité, sous forme de pourcentage ou d'indice, et des quantités ou des effectifs.

La référence aux indices est donc insistante ! De quoi s'agit-il ? On en présente rapidement le principe.

1. Soit une quantité Q (un prix par exemple) supposée variable dans le temps : on note Q_0 sa valeur au temps t_0 et Q_1 sa valeur au temps t_1. Supposons que $Q_1 > Q_0$; de l'instant t_0 à l'instant t_1 la quantité Q subit une augmentation mesurée par le taux de croissance $\dfrac{Q_1-Q_0}{Q_0}$. Si par exemple $Q_0 = 275$ et $Q_1 = 340$ (en « oubliant » les unités, le rapport à calculer étant sans dimension), on a $\dfrac{Q_1-Q_0}{Q_0} = \dfrac{340-275}{275} = \dfrac{65}{275}$. L'usage social dominant consiste à écrire ce rapport avec un ***dénominateur égal à cent***, c'est-à-dire sous la forme d'un ***pourcentage*** (ce qui permet de comparer aisément deux taux quelconques) : $\dfrac{Q_1-Q_0}{Q_0} = \dfrac{65}{275} = \dfrac{\frac{6500}{275}}{100} = \dfrac{6500}{275}\ \% \approx 23{,}6\ \%$. (L'écriture x % désigne simplement la fraction $x/100 = \dfrac{x}{100}$.)

2. En multipliant les quantités considérées par le coefficient de proportionnalité $a = \dfrac{100}{275}$ on passe de $Q_0 = 275$ et $Q_1 = 340$ à $aQ_0 = \dfrac{100}{275} \times 275$ et $aQ_1 = \dfrac{100}{275} \times 340$, c'est-à-dire à $aQ_0 = 100$ et $aQ_1 = \dfrac{100}{275} \times (275 + 65) = 100 + \dfrac{6500}{275} = 123{,}6$. Le nombre aQ_1 est noté $I_{t1/t0}$ et est appelé « indice de Q à la date t_1 sur la base 100 à la date t_0 ». On a d'une manière générale : $I_{t1/t0} = 100 \times \dfrac{Q_1}{Q_0}$. Si par exemple un objet vaut 120 € en décembre 2002 et voit son prix grimper à 150 € en décembre 2003, on a $I_{2003/2002} = 100 \times \dfrac{150}{120} = 125$. Le prix de l'objet a donc augmenté de 25 %. On dit que « l'indice du prix de l'objet, base 100 en décembre 2002, passe à 125 en décembre 2003 ».

3. Les indices possèdent des propriétés qui en font l'intérêt (mais dont, toutefois, l'étude est exclue en 4^{e}). Notons ainsi qu'on a $I_{t0/t1} = 100 \times \dfrac{Q_0}{Q_1} = \dfrac{10\,000}{100\times\left(\dfrac{Q_1}{Q_0}\right)} = 10\,000/I_{t1/t0}$ et encore que $I_{t2/t0} = (I_{t2/t1} \times I_{t1/t0})/100$. En dépit du facteur « correctif » (10 000 dans un cas, 1/100 dans l'autre), ces formules sont d'un usage aisé, puisque ce facteur peut être intégré au calcul ***après coup***, par un choix de la position de la virgule qui ramène le résultat brut du calcul à un ordre de grandeur idoine. Si par exemple $I_{t1/t0} = 127$ et $I_{t2/t1} = 109$, on calcule $127 \times 109 = 13843$ et il vient « donc » $I_{t2/t0} = 138{,}43$, en sorte que le taux de croissance de Q entre les dates t_0 et t_2 est de 38,43 %. Semblablement, si $I_{t1/t0} =$

105 et $I_{t2/t1}$ = 89, on calcule 105 × 89 = 9345 et il vient donc $I_{t2/t0}$ = 93,45 = 100 – 6,55, en sorte que, entre les dates t_0 et t_2, Q a diminué de 6,55 % ; etc.

À suivre...

3. Forum des questions (2)

Pourcentages en 4^e^

Quelle technique peut-on établir pour le type de tâches en quatrième : « Pourcentage relatif à la réunion de deux groupes dont les effectifs et les pourcentages d'un caractère sont connus » ? (4^e^, 19)

Le programme n'est en effet pas très disert sur ce sujet. Ce type de tâches fait référence à des situations comme la situation suivante.

> Une entreprise comprend 125 employés, dont 50 femmes. On sait que 30 % des femmes sont employées à temps partiel alors que seulement 12 % des hommes le sont. Quel est le pourcentage d'employés à temps partiel dans cette entreprise ?

On peut d'abord calculer le nombre d'employés à temps partiel :
On a 30% × 50 femmes, soit 15 femmes ; 12% × (125 – 50) hommes soit 12 × 0,75 hommes = 9 hommes.
On a donc 15 employées à temps partiel + 9 employés à temps partiel = 24 employés à temps partiel.

On peut alors calculer le pourcentage des employés à temps partiels dans l'entreprise : il est égal à 24/125 = 0,192 = 19,2%.

La technique mise en œuvre pour « calculer le pourcentage d'un caractère relatif à la réunion de deux groupes dont les effectifs et les pourcentages du caractère sont connus » peut alors se formaliser de la façon suivante :

Calculer l'effectif du caractère pour chacun des groupes [pour cela on écrira pi% × ni] ;
Additionner les deux effectifs ainsi obtenus pour obtenir l'effectif du caractère relativement à la réunion des deux groupes.
Diviser par l'effectif total des deux groupes pour obtenir le pourcentage cherché.

Une recherche dans les ouvrages de 4^e^ fait apparaître que ce type de tâches est traité dans certain d'entre eux. Voici ce que l'on trouve dans l'ouvrage de la collection Dimathème (éditions Didier; 2007).

SPÉCIAL PROF
Objectif : calculer un pourcentage relatif à deux groupes d'effectifs différents.

3 Réunion de pourcentages

Lors d'un référendum national, les deux départements de la région Haute-Normandie se sont exprimés de la manière suivante :

	Seine-Maritime	**Eure**
OUI	51,3 %	48,1 %
NON	48,7 %	51,9 %

1. Deux journalistes commentent l'événement. Que peut-on en penser ?

2. 271 000 électeurs se sont exprimés dans l'Eure. Combien d'électeurs ont voté « oui » dans ce département ?

3. 597 000 électeurs se sont exprimés en Seine-Maritime. Combien d'électeurs ont voté « oui » dans ce département ?

4. Calculer le nombre total de votants, puis le pourcentage de votants ayant voté « oui » en Haute-Normandie.

5. Que peut-on conseiller au journaliste ?

Calculer un pourcentage d'une réunion de deux groupes

Énoncé

1. Pierre est berger et garde un troupeau de 150 moutons. 60 % de ses moutons sont noirs.
Un autre berger, Louis, surveille un troupeau de 200 moutons dont 10 % sont noirs.
a. Combien de moutons noirs Pierre garde-t-il ?
b. Combien de moutons noirs Louis garde-t-il ?

2. Lors de la transhumance, Pierre et Louis ont réuni leurs troupeaux pour voyager ensemble.
a. Calculer le nombre de moutons noirs dans le grand troupeau ainsi obtenu.
b. Quel est alors le pourcentage de moutons noirs (arrondir à 1 %) ?
c. Le résultat est-il égal à la moyenne de 60 % et de 10 % ?

Solution

1. a. On calcule 60 % de 150 moutons : $\frac{60}{100} \times 150 = 90$. Pierre garde donc 90 moutons noirs.

b. On calcule 10 % de 200 moutons : $\frac{10}{100} \times 200 = 20$. Louis garde donc 20 moutons noirs.

2. a. $90 + 20 = 110$. Le grand troupeau contient 110 moutons noirs.
b. On a le tableau suivant :

Moutons noirs	110	x
Total	350	100

Il s'agit d'une situation de proportionnalité donc les produits en croix sont égaux, on a : $350 \times x = 110 \times 100$

d'où $x = \frac{110 \times 100}{350} \approx 31$.

Les moutons noirs représentent environ 31 % du grand troupeau.

150 + 200 = 350
donc il y a 350 moutons dans le grand troupeau.
D'une autre manière :
$\frac{110}{350} \approx 0,31 = \frac{31}{100}$ donc 31 %.

c. $31 \neq \frac{60+10}{2}$ donc on ne peut pas obtenir ce résultat en effectuant la moyenne de ces 2 pourcentages.

13 Une ville de 5 500 habitants est traversée par un fleuve. Parmi les 4 500 habitants de la rive gauche, 40 % sont des jeunes de moins de 15 ans. Sur la rive droite, il n'y a que 15 % de jeunes de moins de 15 ans.
1. Calculer le nombre de jeunes de moins de 15 ans habitant la rive gauche.
2. a. Donner le nombre d'habitants de la rive droite.
b. Calculer le nombre de jeunes de moins de 15 ans habitant la rive droite.
3. Quel est le pourcentage de jeunes de moins de 15 ans dans cette ville (arrondir à 1 %) ?

14 Pour faire son cocktail, Lou a besoin de 10 cL de jus d'orange et de 15 cL de jus d'abricot. Le jus d'orange est composé de 90 % d'eau et celui d'abricot de 80 %. Calculer le pourcentage d'eau dans son cocktail.

15 Anna est chercheuse dans un laboratoire. Dans la salle où elle travaille, il y a deux cages : dans la cage A, il y a 140 souris dont 20 % de mâles et dans la cage B, il y a 240 souris dont 60 % sont mâles.
En quittant la salle, Anna laisse les cages ouvertes et toutes les souris s'échappent.
Quel est le pourcentage de femelles parmi les souris libérées dans la salle (arrondir à 1 %) ?

16 Lors des 45 minutes de la première mi-temps d'un match de foot, l'équipe bleue a possédé le ballon pendant 55 % du temps. Malheureusement, pendant les dix premières minutes de la seconde mi-temps, la possession de balle n'a été que de 35 %.
Calculer le pourcentage de possession de balle de l'équipe bleue pour les 55 premières minutes de ce match (arrondir à 1 %).

La situation proposée en activité, débarrassée de ses questions intermédiaires et correctement mise en scène, peut constitue le point de départ d'une AER. La technique proposée initialement souffre d'un alourdissement considérable du calcul du pourcentage, qui est d'autant moins justifié que le travail en classe de 5^{e} sur la notion de fréquence a habitué les élèves au calcul des pourcentages tel que nous l'avons mis en œuvre précédemment. Voici encore ce que l'on trouve dans l'ouvrage de la collection Prisme (édition Belin, 2007).

Savoir-faire 3 Comment calculer un pourcentage relatif à la réunion de deux groupes

Énoncé **Sam possède 45 livres dont 40 % sont des romans et sa sœur Léa, 75 livres dont 60 % sont des romans. Ils ont rangé tous leurs livres dans la même bibliothèque. Quel est le pourcentage de romans dans cette bibliothèque ?**

Solution

• Sam possède 45 livres et Léa 75 livres.
$45 + 75 = 120$.
Il y a donc 120 livres dans la bibliothèque.

On calcule le nombre total de livres dans la bibliothèque.

• 40 % des 45 livres de Sam sont des romans,
et : $\frac{40}{100} \times 45 = 18$.
Donc Sam possède 18 romans.

On calcule le nombre de romans que Sam possède : calculer 40 % d'une quantité x revient à calculer $\frac{40}{100} \times x$.

• 60 % des 75 livres de Léa sont des romans,
et : $\frac{60}{100} \times 75 = 45$.
Donc Léa possède 45 romans.

On calcule le nombre de romans que Léa possède : calculer 60 % d'une quantité x revient à calculer $\frac{60}{100} \times x$.

• $18 + 45 = 63$,
donc la bibliothèque contient 63 romans.

On calcule le nombre total de romans dans la bibliothèque.

• La bibliothèque contient donc 120 livres dont 63 sont des romans.

Nombre total de livres	120	100
Nombre total de romans	63	x

$$120 \times x = 63 \times 100$$
$$x = \frac{63 \times 100}{120}$$
$$x = 52{,}5.$$

On calcule le pourcentage de romans dans la bibliothèque. Pour cela, on calcule la quatrième proportionnelle en utilisant les produits en croix égaux.

52,5 % des livres de la bibliothèque de Sam et Léa sont des romans.

On conclut.

On trouve là encore une description « en situation » de la technique, avec le même problème que dans l'extrait précédent : le calcul de pourcentages est effectué par le biais d'une quatrième proportionnelle, ce qui alourdit inutilement la technique.

Il faut prendre l'habitude d'enquêter et de se servir des résultats de l'enquête menée pour fabriquer les organisations mathématiques figurant au programme.

Types de tâches et sous-types de tâches

Dans le séminaire de cette année, une contradiction semble apparaître concernant les types de tâches et sous-types de tâches. Un sous-type de tâches est un type de tâches qui apparaît dans la technique de résolution du type de tâches principal. La dénomination de sous-types de tâches dépend-il de la technique de résolution ? (2^{de}, 19)
Pourrait-on revenir sur la différenciation en type de tâches et sous-type de tâches ? Dans le séminaire, il y a une petite contradiction entre les pages 195 et 241 (selon mes souvenirs en 2008-2009). Lequel est le plus « général » ? Exemple : - Déterminer la nature d'un triangle ; - Prouver qu'un triangle est rectangle. Lequel est le sous-type de tâches ? (2^{de}, 19)
Une technologie vue antérieurement dans l'année peut-elle faire partie d'une OM ? (2^{de}, 19)

1. Comme pour à peu près tous les concepts mis en place dans le Séminaire, la notion de sous-type de tâches est une notion relative. Ainsi que le suggère la première question, la dénomination peut dépendre de la technique de résolution puisqu'un sous-type de tâches de T est un type de tâches qui apparaît dans la technique de résolution du type de tâches T.

2. Il est une catégorie particulière de sous-type de tâches, celui où un sous-type est un sous-ensemble du type de tâches T. Nous avions cité ainsi que, pour le type de tâches T « résoudre une équation du second degré », on peut voir apparaître comme sous-type de tâches « résoudre une équation du type $(x-a)^2=b$ » ou encore « résoudre une équation du type $(x-a)(x-b)=0$ ».
En effet, en classe de 3^e par exemple, une technique relative au type de tâches T indiqué peut s'exprimer ainsi :
Si l'équation est de la forme $(x-a)^2=b$, et que b est positif ou nul, écrire que $x-a=\sqrt{b}$ ou $x-a=-\sqrt{b}$ et résoudre les équations du premier degré obtenues. Si b est négatif, il n'y a pas de solution.
Si l'équation est de la forme $(x-a)(x-b)=0$, écrire que $x-a=0$ ou $x-b=0$ et résoudre les équations ainsi obtenues.
Sinon, on ne sait pas la résoudre.
En classe de 1^{re} S, on peut souvent observer que c'est la technique suivante qui est mise en œuvre par les élèves :
Si l'équation est de la forme $ax^2+bx+c=0$, écrire le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$; s'il est négatif, il n'y a pas de solution ; s'il est positif, on a deux solutions $x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x'=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ qui sont égales quand $\Delta = 0$.
Sinon, développer et/ou réduire l'expression de façon à s'y ramener.

Les deux sous-types de tâches précédemment identifiés ne sont plus présents.

3. Il arrive assez fréquemment qu'une OM vue antérieurement fournisse des éléments technologiques relativement à une OM en cours d'élaboration. Ainsi par exemple, en classe de seconde, si l'on a séparé comme c'est à peu près la norme actuellement l'étude des fonctions en deux « chapitres », le second chapitre traitant des fonctions de référence, des éléments technologiques mis en place dans le premier chapitre et notamment la définition de la croissance et de la décroissance d'une fonction vont venir permettre d'établir les variations des fonctions de référence, et ainsi s'intégrer dans la technologie de l'OML mise en place. De même, si l'on a un chapitre « Résolution d'équations et d'inéquations », nous avons vu dans les séances précédentes que l'essentiel de l'environnement technologico-théorique est issu du travail effectué sur les fonctions.

Retard dans le programme...

En cas de retard dans le programme, quelles sont les méthodes à adopter pour avancer plus vite sans sacrifier des points importants ? (6^e & 3^e, 19) J'ai beaucoup de collègues qui font le chapitre « fonctions cosinus et sinus » (en fin d'année) en heure d'aide avec seulement les « bons » élèves. Est-ce une bonne solution quand on a du retard dans le programme ? (2^{de}, 19)

Nous avons déjà traité de cette question lors des séances 13 & 14 du séminaire. On renvoie donc à la lecture des notes de la séance 13. On développera quelque peu les matériaux proposés pour donner des éléments de réponse à la deuxième question.

Examinons ce qu'implique la technique didactique proposée pour les fonctions sinus et cosinus.

D'une part, on sacrifie l'heure d'aide individualisée, soit le dispositif qui est dévolu à l'aide des élèves les plus fragiles, pour la mettre au service non de toute la classe (nous avions envisagé ce dispositif pour « rattraper du retard » en disant qu'il devait être mis en œuvre de façon tout à fait exceptionnelle) mais d'une partie seulement des élèves, les plus « avancés ».

D'autre part, on prive une bonne partie de la classe de la connaissance des fonctions sinus et cosinus puisque ces fonctions ne sont pas au programme des classes de 1^{re} et de terminale autre que S et STI. Or si ces fonctions figurent au programme de seconde, qui est un programme de mathématiques « pour tous », c'est que l'on a considéré qu'un citoyen ayant fréquenté le lycée ne pouvait pas ignorer les fonctions sinus et cosinus pour des raisons dont nous avions mis en évidence au moins un spécimen, l'optimisation de grandeurs. On ne respecte pas ainsi la mission

On notera sans développer davantage ce point que le projet de programme de seconde reprend à son compte cet évitement des fonctions sinus et cosinus, et les citoyens seraient en droit de demander à ses auteurs d'expliciter en quoi ces fonctions ne doivent pas faire partie de « l'équipement de base » en mathématiques fourni par la scolarité obligatoire.

***Topos* des élèves**

Lors des AER, je ne donne pas assez de topos aux élèves, comment y remédier ? Pouvez-vous me donner des méthodes pour progresser sur cette difficulté (par exemple les faire travailler en binômes) ? (RC, 2^{de}, 19)

1. On notera d'abord que la question dénote d'un abord positif des gestes du métier : un problème est repéré dans les praxéologies et on a l'idée de trouver du secours dans la formation dispensée. C'est le premier pas pour progresser et on souhaiterait que, à cette époque de l'année, l'ensemble de la promotion en soit arrivée au moins à ce point. Cela posé, la question dénote d'un élément d'analyse inadéquate de la difficulté rencontrée : le secours recherché ne viendra pas de dispositifs aussi génériques que le travail en binômes.

2. Le *topos* des élèves, on l'a dit, est la place que les élèves vont pouvoir occuper en autonomie dans le travail de la classe. Cette place doit être « dessinée », préparée par le professeur, au sein des types de tâches d'étude, coopératifs, qui sont accomplis. Du point de vue des AER, nous avons donné plusieurs éléments visant à développer le topos des élèves.

Le premier d'entre eux est la mise au point d'un problème qui constitue une raison d'être de l'OM à étudier et dont l'abord pourra être réalisé compte tenu des connaissances préalables des élèves.

Il s'agit ensuite de prévoir la manière de dévoluer le problème aux élèves; soit de faire que la classe le reconnaisse comme un problème auquel elle va s'attacher à apporter une réponse. Une technique classique que l'on voit mettre en œuvre dans les classes consiste à cet égard à laisser les élèves prendre connaissance du problème avant d'examiner collectivement ce qu'il s'agit de faire et d'accomplir le premier pas dans la voie de la solution.

Dans cette perspective, il s'agit d'arriver à anticiper les voies d'attaques possibles du problème par les élèves, ainsi que les premières questions cruciales que l'on pourra poser suivant les voies qui émergent. La réduction du *topos* la plus fréquente dans cette étape du travail réside dans le fait que le professeur, surpris par l'apparition d'une voie qu'il n'avait pas choisie, coupe court au travail et met les élèves sur les rails qu'il avait prévu. Une technique permettant de lutter contre cette tendance fortement directive consiste à suspendre le jugement : on pourra par exemple noter les voies proposées au tableau, puis examiner avec la classe leur validité avant de s'engager dans la voie qui semble la plus prometteuse si l'on a plusieurs voies « possiblement valides », les autres voies étant laissées pour une exploration ultérieure, ou encore laisser les élèves examiner en moment en autonomie la validité des voies proposées avant de s'engager dans l'examen collectif, etc.

3. Ce qui fait que cette étape, comme les suivantes, pourra être réalisée sans que le professeur n'empiète sur le *topos* des élèves est la disponibilité d'un milieu adéquat, tant sur le plan matériel (ordinateur, calculatrice, instrument de mesure, etc.) que sur le plan mathématique (certaines organisations mathématiques par exemple), ainsi que la disponibilité d'un réseau de questions cruciales pertinentes et suffisamment serré permettant de convoquer ce milieu. Nous y avons travaillé dans les séances précédentes à propos de l'AER sur la statistique.

4. Nous terminerons cette synthèse rapide par l'observation suivante : les débutants sont portés à croire que laisser du *topos* aux élèves consiste à leur laisser du temps de travail en autonomie dans la séance. Si c'est une condition nécessaire pour qu'existe du *topos*, elle est loin, voire très loin, de garantir que les élèves puisse valablement occuper ce temps de travail pour avancer significativement si le professeur n'a pas très soigneusement préparé le milieu et les questions cruciales permettant de diriger l'étude.

4. Évaluation et développement : C2i2e

Reporté à la prochaine séance.

5. Problématique et fonctionnement du Séminaire

Programmation des séances : les deux prochaines séances de TD auront bien lieu le mardi 7 avril et le mardi 19 mai.

On rappelle que le corpus B à rendre le 7 avril.

La séance du 14 avril 2009 aura une rubrique Recherches dans les archives.

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant aux **techniques de correction des devoirs** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Je vois naître dans ma classe de l'agitation, mais seulement à un moment précis, en correction d'exercices. Ma méthode, pour l'instant, c'est de les faire passer au tableau, c'est peut-être trop « long ». Quels dispositifs me proposeriez-vous pour capter leur attention un peu plus... ? Je trouve ça dommage car je trouve que cela permet une bonne implication. (11)
2. En troisième, j'ai du mal à tenir la classe lorsque l'on fait des séances entières de correction d'exercices cherchés à la maison. J'ai un sentiment d'impuissance pesant... (17)
3. Concernant les devoirs surveillés et le bilan de fin de trimestre, peut-on utiliser les photocopies pour la correction avec certaines explications faites au tableau ou doit-on impérativement tout corriger au tableau ? (11)
4. Moi, j'ai du mal à faire une correction de devoir surveillé en classe (avec la classe) car ceux qui ont plus de 16 ne se sente pas obligés de suivre (sauf s'ils sont interrogés) et ceux qui ont moins de 5 ne s'y intéressent pas du tout, ils se disent que c'est du passé. J'ai du mal à diriger tout le monde en même temps... Alors, comment faire une correction adaptée, qui apporterait quelque-chose à tout le monde ? (9)

• Cette recherche est confiée au binôme formé de Nelly Bofelli et Samuel Der Monsessian

b) Une deuxième recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* sur l'**enseignement des vecteurs** en classe de 2^de^ ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Je n'arrive pas à concevoir une organisation didactique sur le chapitre « vecteurs du plan » en seconde, car c'est une reprise de l'étude, les nouvelles notions étant la colinéarité , l'alignement et la caractérisation du milieu. Ces différentes notions sont assez « intuitives » donc comment organiser une AER intéressante avec des moments de l'étude qui soient constructifs pour la classe et que cette AER ne soit pas « un exercice avant la synthèse »! (16)
2. Concernant la multiplication d'un vecteur par un réel, le programme stipule : « un repère étant fixé, exprimer la colinéarité de deux vecteurs ou l'alignement de trois points ». Le programme d'accompagnement qu'une fois la définition - indépendante du repère - de la multiplication d'un vecteur par un réel donnée, on n'utilisera le calcul vectoriel que pour justifier le calcul de coordonnées... Ma question : pour déterminer si, des points dont les coordonnées dans un repère sont données, sont alignés, il faut faire un gros travail sur la construction de la somme de vecteurs ; est-ce grave si pour faire émerger la multiplication d'un vecteur par un réel et les propriétés algébriques je prends plus de temps que sur le travail des vecteurs avec les coordonnées ? (18)
3. Je prépare mon cours sur les vecteurs. Il est précisé dans le programme que la colinéarité des vecteurs et l'alignement de trois points sont étudiés « un repère étant fixé ». Mon PCP tient à ce que je fasse du calcul vectoriel sans faire intervenir les coordonnées. Quels sont les avantages et les inconvénients à séparer calcul vectoriel et géométrie analytique ? (9)
4. Mes élèves rencontrent de grosses difficultés avec la notion de vecteur. Ils perçoivent les vecteurs comme des objets fixes avec une origine fixe. J'ai essayé de parler de déplacement avec les translations mais sans réel succès. Comment remédier à ce problème ? (13)

5. Le programme de seconde concernant les vecteurs insiste sur le repérage sur un réseau carré ou rectangulaire, sur les plans ou les cartes. Quels sont les types de tâches visés ? Si possible, un exemple d'activité. (18)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Matthieu Bruno, Renaud Cortinovis et Sylvain Samat.

Séminaire de didactique des mathématiques
Résumés des séances

➔ Séance 21 : mardi 7 avril 2009

Programme de la séance. 1. Évaluation et développement – C2i2e // 2. Forum des questions // 3. Notice Éducation et citoyenneté

1. Évaluation et développement : C2i2e

Nous poursuivons ici le travail débuté il y a deux séances à propos du C2i2e. Nous avions demandé à chacun des participants au Séminaire de mettre par écrit une description succincte d'un travail qu'il a réalisé ou qu'il projette de réaliser relativement aux deux compétences suivantes :

B.2.1. Identifier les situations d'apprentissage propices à l'utilisation des TICE.
B.2.2. Concevoir des situations d'apprentissages et d'évaluation mettant en œuvre des logiciels généraux ou spécifiques à la discipline, au domaine enseigné, au niveau de la classe.

Parmi les descriptions qui ont été rendues, il est frappant que, dans l'ensemble, il soit fait référence à des séances qui paraissent pour l'essentiel isolées et qui matérialisent peu la fonctionnalité des séances proposées dans l'OD et/ou l'OM enjeu de l'étude.

La plupart du temps, ce sont les moments exploratoires et technologico-théoriques qui sont illustrés, comme il en va dans les trois travaux suivants.

B 2 1.

- Conjecturer des propriétés concernant le parallélogramme (défini comme un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles).
- Conjecturer que la somme des angles dans un triangle vaut 180° : dans le chapitre sur le triangle (construction et triangles particuliers).

B 2.2 : . A l'aide de Geogebra, les élèves devaient tracer un parallélogramme MNOP (pour cela il devait se servir de la méthode de construction découlant directement de la définition). Puis ils devaient observer ce qu'ils constataient à propos des côtés, des angles et des diagonales du parallélogramme (pour cela ils devaient afficher les mesures des côtés, les mesures des angles, tracer les diagonales, tracer leur point d'intersection, mesurer les "demies diagonales" puis conjecturer les résultats).

. A l'aide de Géogébra, les élèves devaient tracer un triangle quelconque et calculer la somme des angles (pour cela ils devaient afficher la mesure des 3 angles puis calculer la somme). Ensuite ils avaient pour consigne de recommencer avec 2 autres triangles (certains élèves ont tout effacé et refait le travail, les plus rapides ont simplement déplacé l'un des sommets de leur triangle).

Remarque : Géogébra est un bon logiciel pour les conjectures, grâce à l'affichage des mesures, ou aux réponses aux questions "lien entre 2 objets".

travail envisagé relativement aux compétences B2.1. B.2.2

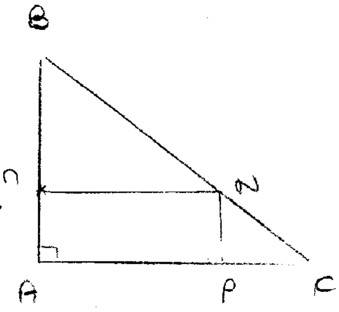
Par rapport au programme de Géométrie de la classe de 5ème, une utilisation du logiciel Geogebra en vue de valider empiriquement la propriété sur le centre du cercle circonscrit d'un triangle. L'utilisation des ressources de Geogebra permet en effet une expérimentation beaucoup plus riche qu'une expérience "manuelle" du fait que les dimensions des triangles sont facilement modifiables.

Je proposerais donc une activité du type :

- tracer un triangle quelconque ABC
- construire les médiatrices des 3 côtés
- appeller O le point d'intersection. (vérifier qu'il s'agît bien d'un point)
- construire le cercle passant par les 3 sommets ABC
- son centre coincide-t-il avec O ?
- et si on change les sommets du triangle ?
- imprimer 3 ou 4 figures avec des triangles différents.

J'ai, lors d'une séance informatique, proposé un problème d'optimisation (le problème du paysan).

On considère un triangle ABC rectangle en A.
Soit M ∈ [AB]. et P le point de [AC]
Soit N le point de (BC) tel que AMNP soit un rectangle.
On cherche où placer le point M pour que AMNP soit d'aire la plus grande possible.



Voici la liste des questions que j'ai données aux élèves :
A l'aide du logiciel Geogebra :

1) Reproduire la figure
2) Déplacer le point M sur [AB] et observer l'aire du rectangle AMNP.
3) Répondre au problème.

Un énoncé de DM permettant de résoudre ce problème a ensuite été distribué

Commentaires développés oralement

Com1 – Il est nécessaire que chacun des moments technologiques évoqués soit situé dans une AER dont le support soit constitué d'un problème pour lequel les propriétés évoquées surgissent comme ingrédient permettant d'aboutir à une solution.

Com2 – Comme dans le travail d'une AER qui n'utilise pas les TICE, les questions cruciales doivent apparaître dans le travail de la classe et ne pas être fournies a priori.

Certaines descriptions sont relatives à un moment de travail d'une OM.

Lors de l'étude des triangles isométriques et des configurations du plan, j'ai soumis aux élèves un corpus de problèmes à réaliser en binômes après répartition. Chaque problème décrivait une situation géométrique différente du type : ABCD est un quadrilatère quelconque,

I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [AD].

Montrer que IJKL est un parallélogramme.

Face au problème qui leur était attribué, chaque binôme devait l'expérimenter (sur Geogebra) puis en rédiger une démonstration.

Chaque problème a finalement été exposé par le binôme qui en a réalisé l'étude et la synthèse réalisée par chaque binôme a été distribuée à la classe.

- J'ai fait une séance de soutien à la salle informatique du CDI avec 6 élèves en difficultés avec la notion Inégalité triangulaire et triangle constructible. Ils ont alors travaillé sur Mathenpoche ces notions, chacun avançant à son rythme. Ceci qui leur a permis de rattraper le retard qu'ils avaient par rapport aux autres.

Commentaires développés oralement

Comment doit-on préparer un TP d'informatique ? Le support écrit doit-il détailler un minimum la démarche expérimentale (commande,...) afin que les élèves progressent de manière autonome, pendant que le professeur se déplace de poste en poste pour guider si besoin les différents groupes ? Comment guider collectivement les élèves et éviter uniquement d'accompagner individuellement les différents groupes à chaque poste de travail ?

Penser les choses en termes de TP d'informatique revient à penser les séances informatiques comme des isolats : il faut au contraire les penser comme jouant un rôle fonctionnel dans l'OD fabriquée. On préparera donc une telle séance comme on prépare un moment exploratoire ou un moment technologico-théorique ou encore un moment de travail de l'OM enjeu de l'étude, en préparant des questions cruciales et un milieu adéquats.

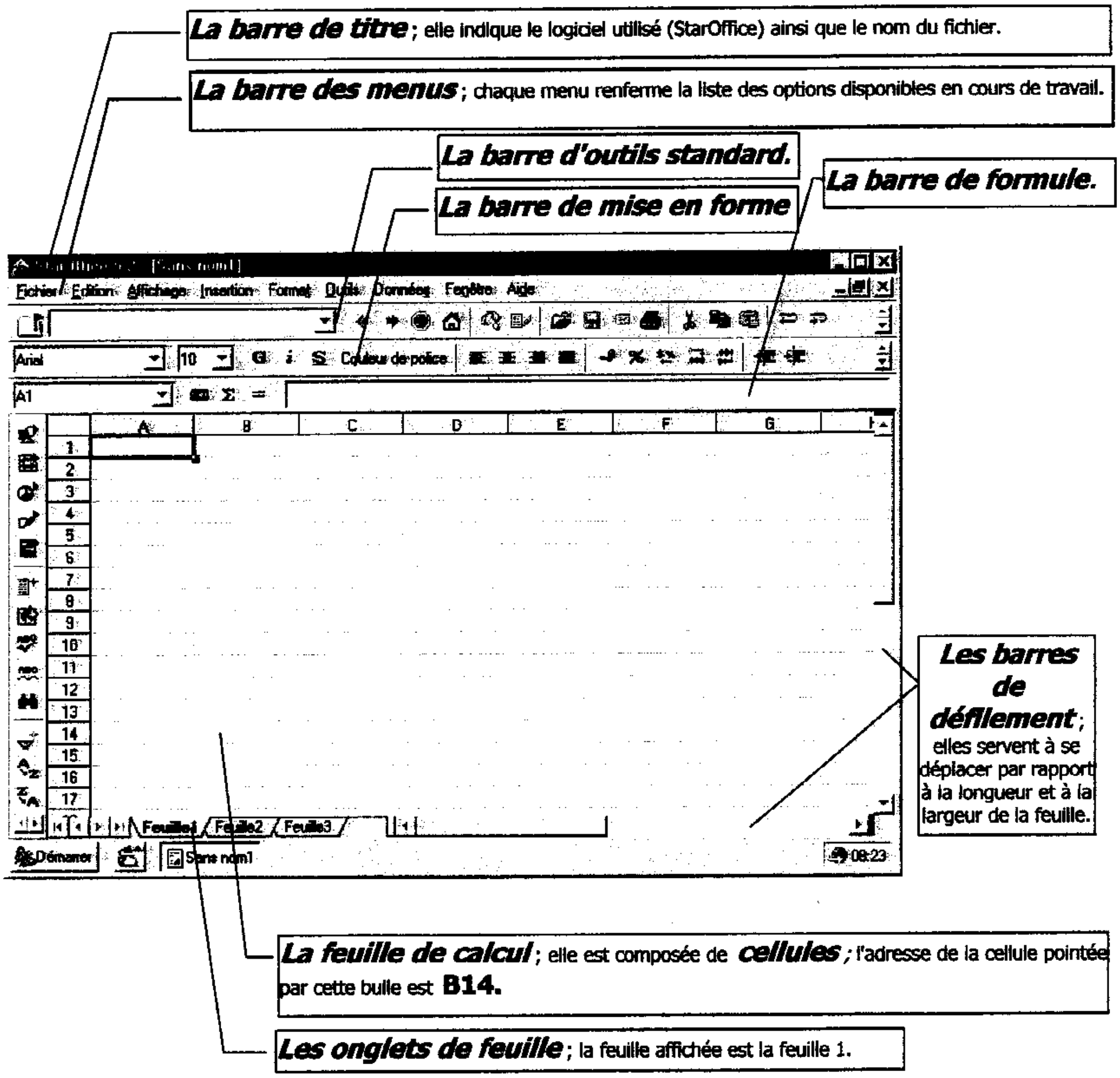
L'écueil dénoncé en fin de question (accompagner individuellement les groupes à chaque poste de travail) est observable dans certaines classes en dehors de tout travail avec un ordinateur. Il n'en reste pas moins en effet que, notamment dans la configuration encore usuelle des salles informatiques (ordinateurs en U le long des murs, les élèves étant face aux murs), il est moins facile que dans une configuration de classe classique de diriger l'étude, d'autant que l'on peut se faire facilement distraire de l'enjeu mathématique de la séance par des « problèmes techniques ». Pour lutter contre cet attracteur ou plutôt ce distracteur, il convient d'avoir le mieux possible préparé le milieu et prévu de faire des bilans d'étapes réguliers pour recentrer la classe autour des questions cruciales qui rythment l'avancée du problème. On rappelle à cet égard que, notamment dans le cas d'une AER, il ne s'agit pas que chaque élève réussisse à faire le travail demandé mais que la classe y arrive, chaque élève ayant réussi à investir le travail demandé et abouti à des résultats partiels : on n'attendra donc pas en général que chaque élève ait réussi à faire le travail avant de faire le bilan et relancé l'étude : il suffit que les élèves se soient approprié la question mathématique posée et ait débuté l'exploration, certains ayant trouvé des résultats susceptibles de faire avancer le travail collectif.

Dans la préparation du milieu, il faut prendre soin d'avoir des traces écrites relatives à l'utilisation de l'ordinateur qui soient adéquates. Si l'on se souvient de l'observation de classe sur les programmes de calculs en 4^{e} que nous avions travaillée, nous avions noté que le travail avec le tableur s'était « mal passé », beaucoup d'élèves étant loin d'être au point sur l'accomplissement du type de tâches « exécuter un programme de calcul » avec une technique incluant le tableur. Nous avions dit qu'il aurait été nécessaire de laisser une trace écrite de l'utilisation du tableur effectué dans la première séance à laquelle les élèves auraient pu se référer. La consultation du corpus B permet de mettre en évidence que la professeure avait donné un document, que certains élèves au moins avaient sur leur table. Le voici.

LE TABLEUR STAROFFICE

Un tableur sert à faire des calculs, des plus simples aux plus compliqués, avec une mise à jour instantanée lors de modifications de valeurs. Ces calculs peuvent manipuler des nombres seuls ou à travers des formules et ils peuvent aboutir à la construction de graphiques.

PRÉSENTATION DE L'ÉCRAN DE TRAVAIL



LES FORMULES DE CALCUL

Une formule commence toujours par le signe « = » et **permet de calculer le contenu d'une cellule à partir d'une autre**.

Exemple : taper 1 dans la cellule A1, 2 dans la cellule A2 . En saisissant, avec le bouton gauche de la souris, le petit carré en bas à droite de la cellule A2, étendre cette formule vers le bas : ainsi, automatiquement, A3 contient 3, A4 contient 4 etc...
Puis taper la formule =A1 + 10 dans la cellule B1 et de la même façon que précédemment, étendre cette formule vers le bas : ainsi, automatiquement, B2 contient =A2 + 1 , B3 contient =A3 + 1, B4 contient =A4 + 1 etc..., c'est à dire B1 contient 10 + 1 = 11, B2 contient 10 + 2 = 12, B3 contient 10 + 3 = 13, B4 contient 10 + 4 = 14 etc...

On le voit, il n'est pas adapté au but poursuivi : il présente une « visite du tableur » sans que l'on voit comment s'en servir pour exécuter un programme de calcul.

Pour poursuivre le travail sur ce point, on examinera une vidéo disponible en ligne à l'adresse http://www.educnet.education.fr/canal-educnet/?direct=126 qui utilise une situation semblable.

Visionnage de la vidéo et commentaires

Le professeur part de la situation où un programme de calcul est donné en mot (je multiplie par 2, je retranche 3, je multiplie le résultat obtenu par 3 puis je retranche le nombre de départ au résultat ainsi obtenu)[43], exécuté, et il s'agit de retrouver le nombre dont on est parti, ce que le magicien arrive à faire d'emblée. Le professeur découpe le travail en plusieurs étapes : Exécuter le programme de calcul pour plusieurs valeurs en utilisant le tableur, d'abord en décomposant les étapes du calcul puis en le faisant en une étape ; Déterminer une formule plus réduite qui donne le même résultat, et enfin programmer l'ordinateur pour qu'il donne le nombre pensé.

Si la situation est dans l'ensemble bien calibrée et conforme au programme du collège, l'autonomie des élèves est limitée par le découpage en questions effectué par le professeur, et on ne voit pas bien, sauf à la toute fin, en quoi les différentes étapes sont motivées par la question de départ, du moins dans le montage vidéo effectué ; l'utilisation du tableur est motivée par le fait qu'il permet de faire « plusieurs calculs différents », sans que l'on sache dans quelle mesure cette expérimentation est nécessitée par le travail à accomplir.

Il en aurait été autrement si le questionnement avait procédé par motivations successives, par exemple en suivant une problématisation de ce type : on cherche à élucider le tour du magicien ; on va essayer de le trouver en examinant un certain nombre de résultats obtenus [introduction du tableur comme facilitant l'expérimentation de ce point de vue]. En supposant qu'on n'y arrive pas, l'essai de production d'une formule plus simple est une voie de progrès[44], formule(s) qu'on élabore et dont on teste la validité à l'aide du tableur. On voit alors d'ailleurs que la problématisation donne un critère de choix parmi les formules obtenues. Il reste ensuite à conclure en « inversant le programme de calcul équivalent » comme le proposent les élèves à la fin de la séance.

On ajoutera en outre que le commentaire parle de résolution d'équations, alors que visiblement on en est au début de l'étude du calcul littéral, et qu'il s'agit d'abord d'étudier le développement et la réduction d'expressions littérales, motivée par l'établissement de l'équivalence de programmes de calcul, elle-même motivée par la situation du magicien.

Au-delà des limites de l'organisation de l'étude explicitées ci-dessus, qui limite de fait le *topos* des élèves, on voit le professeur faire expliciter collectivement comment mettre en place la formule avec le tableur, ce qui met *ipso facto* dans le milieu le type de tâches « exécuter un programme de calcul » avec une technique utilisant le tableur. Cela n'empêche pas bien sûr quelques ratés, mais les élèves voient où est situé le problème et le corrigent relativement vite.

---

[43] $(x*2-3)*3-x$

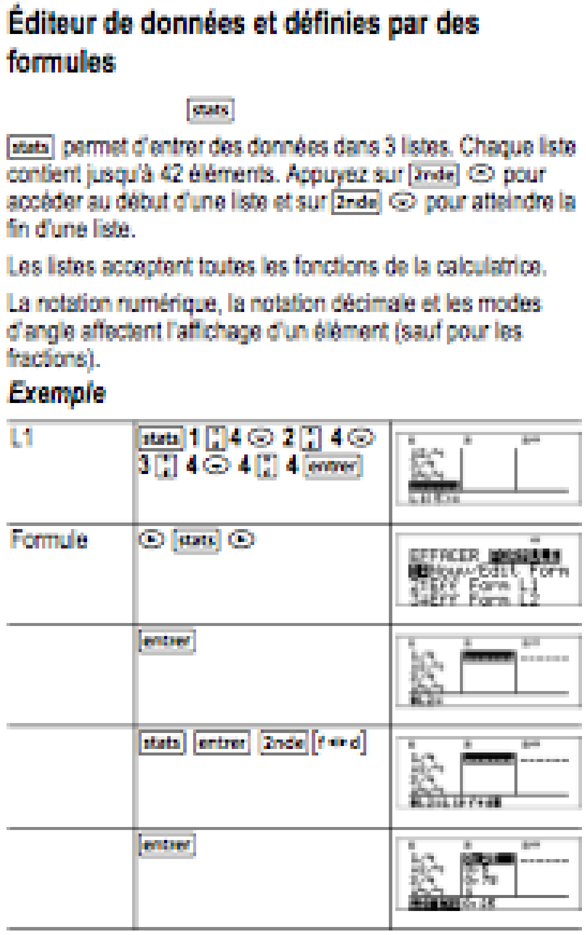
[44] On notera qu'en cas de blocage, l'introduction d'un programme de calcul qui se simplifie facilement, parce qu'il est équivalent à $2x$ par exemple, permettrait d'aboutir.

Le professeur fait également des bilans d'étapes réguliers pour recentrer la classe autour de la question en cours d'étude, même si on a déjà noté que le travail effectué est limité par le manque de problématisation.

Un autre point, essentiel, que nous voulons mettre en évidence ici, c'est l'absence en règle générale d'un usage des TICE dans les techniques mathématiques mises en place. Ainsi ne restera-t-il vraisemblablement rien de cette technique de vérification de l'équivalence des programmes de calcul dans les techniques que les élèves auront à mettre en œuvre, et cela pour deux raisons essentielles : on voit cette technique très dépendante du tableur dont, sauf exception, les élèves ne disposent pas dans l'ordinaire de leur travail et des devoirs notés ; ce type de travail laisse très peu (voire pas du tout) de traces écrites fonctionnelles dans les cahiers des élèves.

On pourrait pourtant penser installer une technique qui intègre une partie de contrôle des calculs effectués en transposant le travail effectué sur un tableur à la calculatrice. Cela est possible avec une partie des calculatrices collèges (la TI collège plus et la casio collège 2D+ notamment) en utilisant les listes. Voyons cela [on utilisera ici une TI collège plus].

Supposons que l'on ait à réduire l'expression A = $(3x-4)(-x+2)$.
On fait le travail et on obtient B = $-3x^2+10x-8$. On entre ensuite à la calculatrice TI collège des valeurs dans la liste L1 du menu stats (5 valeurs entrent à l'écran). On entre ensuite dans la liste L2 une formule (stats – Formule puis écriture de la formule en obtenant L1 par le menu stats) qui est l'expression de départ en remplaçant x par
L1 : L2=$(3\,L1-4)(-L1+2)$, puis dans L3 la formule obtenue en remplaçant x dans l'expression terminale : $-3\,L1^2+10\,L1-8$. En entrant dans la liste L1 les valeurs 1, 3, 5, 2, on obtient en L2 -1, -5, -33, 0 et la même liste dans L3, ce qui justifie que les deux expressions sont équivalentes.


Éditeur de données et définies par des formules

[stats]

[stats] permet d'entrer des données dans 3 listes. Chaque liste contient jusqu'à 42 éléments. Appuyez sur [2nde] pour accéder au début d'une liste et sur [2nde] pour atteindre la fin d'une liste.

Les listes acceptent toutes les fonctions de la calculatrice.

La notation numérique, la notation décimale et les modes d'angle affectent l'affichage d'un élément (sauf pour les fractions).

Exemple

L1	[stats] 1 [÷] 4 2 [÷] 4 3 [÷] 4 4 [÷] 4 [entrer]	
Formule	[stats]	
	[entrer]	
	[stats] [entrer] [2nde] [f◄►d]	
	[entrer]	

Pour que cela soit véritablement intégré dans les techniques mathématiques, il sera nécessaire bien entendu que cette étape soit systématiquement réalisée mais aussi que les traces écrites, y compris lors des devoirs notés, mentionnent la vérification en faisant apparaître la liste de valeurs test et les résultats obtenus, comme nous l'avons fait ci-dessus. On notera que la même technique appliquée à chacune des modifications de l'expression algébrique, en modifiant la formule contenue dans L3, permet en cas d'erreur d'identifier l'endroit où elle se situe, et donc de la corriger.
On peut alors imaginer un élève se trompant et se corrigeant, ou encore un élève se trompant, et marquant sur sa copie qu'il s'est trompé mais qu'il n'arrive pas à corriger son erreur.

Dans le chapitre des équations, je vais donner aux élèves des moyens pour vérifier leurs calculs. Faut-il exiger que cette vérification soit écrite sur leurs devoirs ? (4e, 19)

L'étude précédente permet de donner des matériaux de réponse à cette question. On ajoutera que si l'écriture de la vérification, ou du moins une trace écrite de celle-ci, n'est pas exigée, elle ne sera pas effectuée.

2. Forum des questions

Propriété réciproque

Après avoir écrit la propriété : « si un quadrilatère est un parallélogramme alors il a ses côtés opposés égaux », les élèves ont voulu construire un parallélogramme à l'aide de cette propriété, *i.e.* en construisant un quadrilatère avec des côtés opposés égaux, alors que cette méthode de construction n'apparaît qu'après avoir vu la propriété réciproque : « si un quadrilatère a ses côtés opposés égaux, alors c'est un parallélogramme ». Comment aider les élèves à faire la nuance entre la propriété et sa réciproque ? (5e, 19)

1. On notera d'abord qu'il est assez normal qu'en classe de 5e les élèves aient encore des difficultés à distinguer une proposition de sa réciproque : ils sont au début de l'étude de la déduction en géométrie et l'essentiel des propositions qu'ils étudient ont leur réciproque qui est vraie. Il faut donc porter attention aux réciproques tout au long de l'année. On pourra lorsque l'on travaille la notion de réciproque pour la première fois proposer un énoncé ou deux énoncés dont la réciproque est fausse, comme par exemple l'énoncé suivant : « si un quadrilatère est un rectangle, alors il a un angle droit » ; un quadrilatère avec un angle droit n'est pas toujours un rectangle comme le prouve un trapèze rectangle. (Voir *infra*, PER)

2. La situation décrite n'est pas assez détaillée dans la question pour que l'on puisse juger de l'effet de l'OD sur le travail des élèves, mais si le travail de synthèse n'est pas effectué à partir des types de tâches & des techniques que les éléments technologiques viennent justifier, cela constitue une condition qui favorise l'incertitude liée à la fonctionnalisation des propriétés et peut ajouter à la confusion entre propriété et propriété réciproque.

3. Nous avons déjà mentionné dans les séances précédentes un PER « la réciproque est-elle vraie ? ». La mise en œuvre d'un tel PER devrait être une aide pour « faire la nuance entre une

propriété et sa réciproque ». En effet, elle appelle d'une part la formulation systématique de la réciproque d'une propriété ce qui familiarise les élèves avec la notion même de réciproque d'une propriété, ainsi que l'étude de sa validité ; d'autre part la recherche de la fonctionnalisation de la propriété réciproque – une fois sa véracité vérifiée et déduite – ce qui habitue également à examiner la question de la production de techniques à partir de propriétés.

C'est principalement ce double mouvement, réalisé en actes sur la durée, qui permettra de donner du sens à la notion de réciproque et à la distinguer de la propriété directe. On ajoutera que dans le moment de travail de l'organisation mathématique, le fait de faire étudier une configuration où propriété directe et réciproque interviennent permettra également de faire travailler la distinction, en faisant travailler les deux ensembles de types de tâches/techniques que la propriété directe d'une part, et la propriété réciproque d'autre part, permettent de justifier. Ce travail pourra amener à compléter la synthèse si nécessaire.

Comparaison de nombres en écriture fractionnaire

Pour comparer deux nombres en écriture fractionnaire, il faut réduire au même dénominateur. Par exemple, comparer $\frac{5}{16}$ et $\frac{7}{24}$. Pour les réduire au même dénominateur, est-il préférable de rechercher le plus petit multiple commun de 16 et 24 par « tâtonnement » c'est-à-dire on essaie 16 $\times 2$, 16 $\times$ 3, etc. puis 24 $\times$ 2, 24 $\times$ 3, etc. ou bien décomposer 16 et 24 en produit de facteurs : 16 = 2×8 et 24 = 3×8. Donc $\frac{5}{16}=\frac{5}{2\times 8}$ et $\frac{7}{24}=\frac{7}{3\times 8}$. Par conséquent, $\frac{5}{16}=5\times\frac{3}{2\times 3\times 8}=\frac{15}{48}$ et $\frac{7}{24}=7\times\frac{2}{3\times 8\times 2}=\frac{14}{48}$? (CC, 4e, 18)

• Que dit le programme sur ce sujet ? Ceci en 5e :

**Comparaison*	*- *Comparer deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes et dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre.*	**En classe de Sixième, la simplification a été abordée et est donc utilisée en classe de Cinquième. C'est l'occasion d'envisager la notion de fraction irréductible, mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet.* *Différents cas peuvent être envisagés :* *- dénominateurs égaux* *- numérateurs égaux* *- dénominateurs et numérateurs différents dans des exemples simples (la généralisation est faite en classe de Quatrième).* *Différentes procédures sont mises en œuvre dans ce dernier cas :* *- comparaison à un même entier (exemple : comparer* $\frac{3}{5}$ *et* $\frac{5}{4}$ *à 1) ;* *- mise au même dénominateur (dans des cas accessibles par le calcul mental);* *- calcul des quotients approchés.* *La systématisation de la réduction au même dénominateur est traitée en classe de Quatrième.*

Et en 4e, cela :

Comparaison de deux nombres relatifs	- Comparer deux nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire, en particulier connaître et utiliser : *- l'équivalence entre* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *et ad = bc (b et d étant non nuls) ;*	*La première équivalence est notamment utile pour justifier la propriété dite « d'égalité des produits en croix », relative aux suites de nombres proportionnelles.*

	- l'équivalence entre a ≥ b et a – b ≥ 0 ; *- l'équivalence entre a > b et a – b > 0.* - Utiliser le fait que des nombres relatifs de l'une des deux formes suivantes sont rangés dans le même ordre que *a* et *b* : *a* + *c* et *b* + *c* ; *a* – *c* et *b* – *c* *- Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ac et bc sont dans le même ordre que a et b si c est strictement positif.* *- Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ac et bc sont dans l'ordre inverse de a et b si c est strictement négatif.* *- Écrire des encadrements résultant de la troncature ou de l'arrondi à un rang donné d'un nombre positif en écriture décimale ou provenant de l'affichage d'un résultat sur une calculatrice (quotient ...).*	*Le fait que x est strictement positif (respectivement x strictement négatif) se traduit par x > 0 (respectivement x < 0) est mis en évidence.* *Le fait que « comparer deux nombres est équivalent à chercher le signe de leur différence », intéressant notamment dans le calcul littéral, est dégagé.* *Ces propriétés sont l'occasion de réaliser des démonstrations dans le registre littéral.* Les tests par substitution de valeurs numériques à des lettres sont utilisés pour mettre en évidence cette propriété *Elle peut être démontrée à partir de l'étude des signes de* *a – b et de ac – bc.*

On voit qu'il prévoit ***une pluralité de techniques*** à faire émerger et à mettre en œuvre en 5^e, qui peuvent donc être réutilisée en 4^e. Il ne ***faut*** donc pas réduire au même dénominateur, mais on ***peut*** le faire. Ici, pour les deux nombres envisagés, les dénominateurs étant des multiples « simples » de 8, la « réduction au même dénominateur » peut s'avérer une technique à mettre en œuvre mais en utilisant ce que l'on sait sur les multiples (donc ni par tâtonnement, ni par décomposition en facteurs) : 16 = 8 × 2 et 24 = 8 × 3 ; donc le dénominateur commun est 24 × 2 = 48 = 16 × 3. On obtient donc $\frac{5}{16}=\frac{15}{48}$ et $\frac{7}{24}=\frac{14}{48}$ et donc le résultat cherché.

On aura noté la référence du programme (ci-dessus) au calcul mental à propos de la « réduction au même dénominateur » : on est là typiquement dans un tel cas. On souligne ici qu'il s'agit de s'efforcer d'identifier les « bonnes occasions » de faire du calcul mental « fonctionnel », dans le cadre d'un projet mathématique plus vaste ; et ce n'est qu'à titre de complément qu'on aménagera des phases de travail de pur calcul mental.

On donne ci-dessous deux autres techniques possibles, la première étant suggérée par le programme de la classe de 5^e, tandis que la deuxième est poussée en avant par le programme de 4^e :

$\frac{7}{24}=_c 0{,}29166666$ et $\frac{5}{16}=_c 0{,}3125$. on a donc 7/24<0,3<5/16 et donc la conclusion.

$\frac{5}{16}-\frac{7}{24}=\frac{24\times5-7\times16}{24\times16}$ Comme $24\times5-16\times7=8>0$, $\frac{5}{16}>\frac{7}{24}$.

Raison d'être de la médiane d'un triangle

Quelle est la raison d'être de la médiane d'un triangle en classe de 5^e ? (5^e, 19)

Voici ce que l'on peut lire dans le programme de 5^e :

Médianes et hauteurs d'un triangle	*- Connaître et utiliser la définition d'une médiane et d'une hauteur d'un triangle.*	*Ces notions sont à relier au travail sur l'aire d'un triangle (cf. § 4.3.). Des activités de construction ou l'usage d'un logiciel de géométrie permettent de mettre en évidence les propriétés de concours des médianes et des hauteurs d'un triangle. La démonstration de ces propriétés n'est pas envisageable en classe de Cinquième, mais possible en classe de Quatrième.*

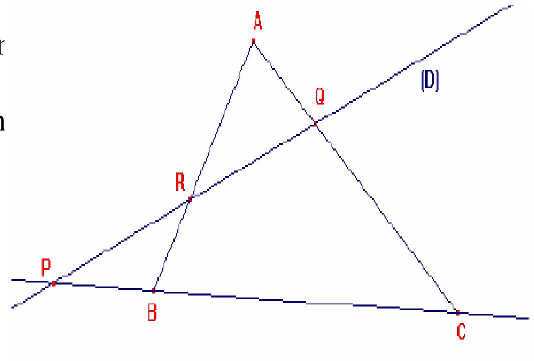
4.3. Aires Parallélogramme, triangle, disque.	*- Calculer l'aire d'un parallélogramme.* *- Calculer l'aire d'un triangle connaissant un côté et la hauteur associée.* *- Calculer l'aire d'un disque de rayon donné.* - Calculer l'aire d'une surface plane ou celle d'un solide, par décomposition en surfaces dont les aires sont facilement calculables.	*La formule de l'aire du parallélogramme est déduite de celle de l'aire du rectangle.* *La formule de l'aire du triangle est déduite de celles de l'aire du parallélogramme, du triangle rectangle ou du rectangle. Le fait que chaque médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire est démontré.* Une démarche expérimentale permet de vérifier la formule de l'aire du disque. Les élèves peuvent calculer l'aire latérale d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution à partir du périmètre de leur base et de leur hauteur.

Une raison d'être est donc donnée dans le programme de 5^e : le calcul d'aire.
Cette raison d'être fait référence à une technique classique permettant de montrer des égalités de longueurs ou de rapports de longueurs, la « démonstration par les aires ».
La « propriété de la médiane » est ainsi un cas particulier du « théorème des proportions », qui dit que si C' est un point du segment BC, le rapport des longueurs BC'/CC' est égal au rapport des aires des triangles ABC' et ACC', dont on peut faire reposer la démonstration sur la formule donnant l'aire d'un triangle : les deux triangles en jeu ayant la même hauteur issue de A, le rapport de leur aire sera égal au rapport de leur base.

Ce théorème permet par exemple de démontrer très facilement le théorème de Ménélaüs :

Rer

(Th

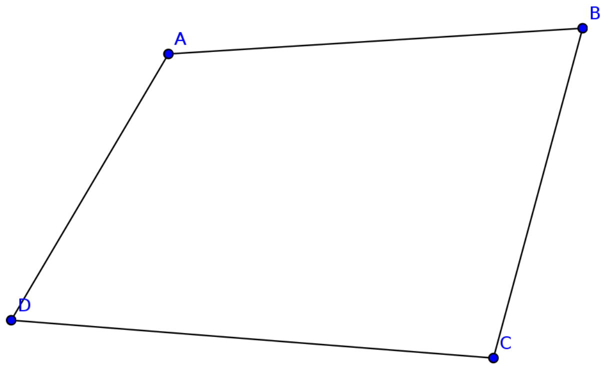


Soit un triangle ABC et (D) une droite coupant la droite (BC) en P, la droite (CA) en Q et la droite (AB) en R (P, Q, R différents des sommets A, B, C).

Alors $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1.$

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\text{Aire(RPB)}}{\text{Aire(RPC)}}, \quad \frac{QC}{QA} = \frac{\text{Aire(PRC)}}{\text{Aire(PRA)}}, \quad \frac{RA}{RB} = \frac{\text{Aire(PRA)}}{\text{Aire(PRB)}}.$$

Pour la classe de 5^e, on peut penser à proposer une situation de détermination d'aire dans une configuration, par exemple découper un quadrilatère en 4 triangles de même aire, que l'on peut situer dans une situation de partage équitable :
Un grand-père donne un terrain à ses 4 petits-enfants : ils doivent donc se le partager (voir ci-dessous le plan du terrain). Ils choisissent de le partager en 4 parcelles triangulaires de même aire. Comment peuvent-ils s'y prendre ?



NB : pour la classe de 5^{e}, on prendra un quadrilatère formé de deux triangles ayant une même hauteur relative à leur base commune.

Modélisation

Prendre les $\frac{5}{6}$ des $\frac{3}{4}$ de 100 euros

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times 100.$$

Comment expliquer la « traduction » : de $\rightarrow \times$? (évidemment cela concerne le collège, donc pas de problème avec la phrase « *f* de *x* » ?) (5^{e}, 18)

Comment (expliquer) amener l'idée aux élèves que prendre par exemple $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ cela revient à multiplier ces quantités ? (5^{e}, 17)

Expliquer, on l'a déjà dit, ça n'est pas faire un discours, c'est engager les élèves dans une AER qui fasse émerger l'élément technologique et au moins une pratique enjeu de l'étude.

Ici, on considère une grandeur *g* d'une espèce de grandeur donnée, les masses par exemple. On cherche à déterminer la mesure des quatre cinquièmes de cette grandeur. Considérons par exemple la situation suivante.

Une recette d'un gâteau au chocolat demande que l'on prenne quatre des 5 barres d'une tablette de 200 grammes de chocolat. Pierre n'a pas de tablette de chocolat, mais du chocolat sous forme de petites pastilles. Comment peut-il déterminer la quantité de chocolat à mettre dans le gâteau ?

En fait, Pierre fait une recette prévue pour 4 oeufs et il n'en a que 3. Outre le chocolat, il était prévu 100 grammes de sucre, 170 grammes de farine et 11 grammes de levure. Quelle quantité de chaque ingrédient doit-il utiliser ?

À suivre...

Orientation

Pour l'orientation des élèves, faut-il prendre en compte principalement leur moyenne ou le comportement en classe est-il tout aussi important ? (5^{e} et 4^{e}, 19) A partir de quel niveau d'un élève doit-on s'opposer ou au contraire soutenir son passage dans une classe supérieure (principalement : 1re scientifique et 1re ES). (2de, 17) Tous les élèves de la classe que j'ai en responsabilité ont choisi l'option IGC. A l'issue du conseil de classe du deuxième trimestre, tous les élèves s'orientent vers une 1re STG mais certains m'ont posé des questions sur les différences d'exigence en mathématiques entre la 1re STG et la 1re ES. Comment leur répondre de façon précise ? (2de, 19)

On a là un problème de la profession, vif, à propos duquel il est nécessaire de s'instruire. On examinera d'abord quelques ingrédients statistiques donnés par le site Eduscol. Nous reproduisons ci-dessous les pages http://eduscol.education.fr/D0123/bilan2008-seconde.htm, commentées oralement.

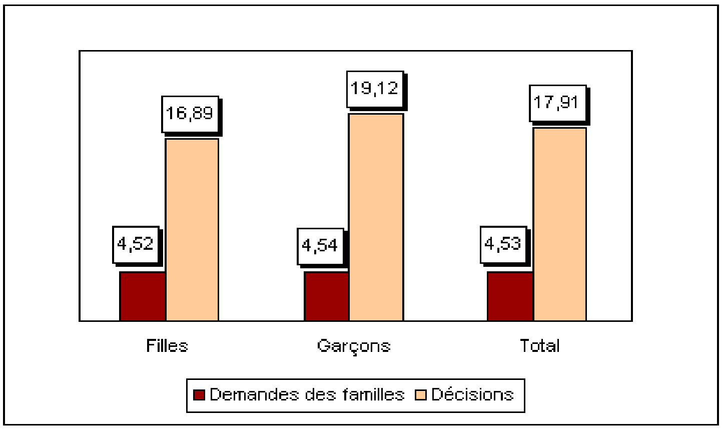
Demandes et décisions d'orientation à l'issue de la seconde générale et technologique

Chiffres de juin 2008 - avant procédure d'appel

Redoublement

L'écart au sein des demandes des familles de filles et de garçons est homogène. Il n'y a pas d'effet sexué à ce niveau, mais c'est à ce palier d'orientation que sont constatés les plus grands écarts et donc désaccords entre les demandes des familles et les décisions rendues à l'issue des conseils de classe : les décisions des conseils de classe oscillent entre 3,7 fois (filles) et 4,2 fois (garçons) le nombre des demandes de familles. C'est à ce palier que le taux de redoublement est le plus élevé : il est quatre fois plus important que celui de sixième par exemple.

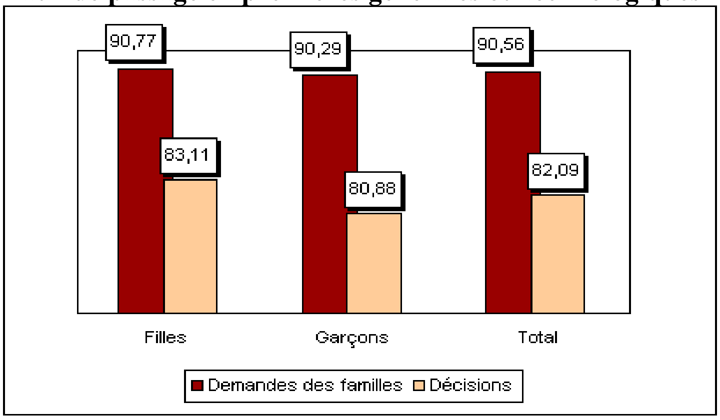
Taux de redoublement de la classe de seconde générale et technologique



Total premières (toutes séries confondues)

82% des élèves de seconde générale et technologique accèdent à une classe de première. Pas de disparité constatée au niveau des demandes des filles et des garçons ainsi qu'au niveau des demandes et des décisions prononcées en regard. Les écarts filles -garçons ou demandes-décisions s'équilibrent dans la généralité mais apparaissent au sein des différentes spécialités.

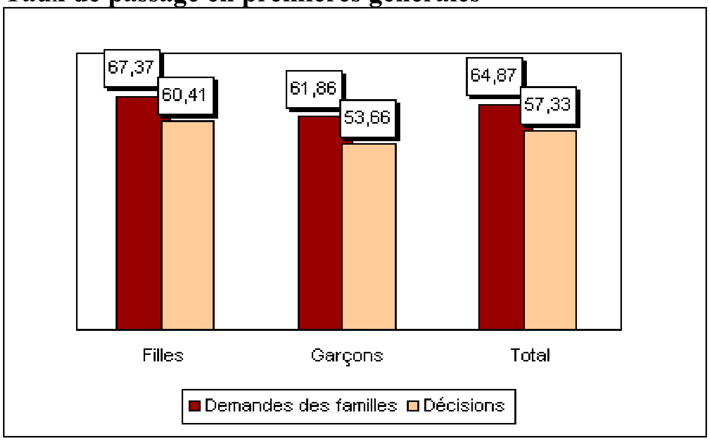
Taux de passage en premières générales ou technologiques



Total premières générales

57,3% des élèves de seconde générale et technologique obtiennent un passage en première générale alors qu'ils étaient près de 65% à demander cette voie. La voie générale fait apparaître des disparités entre filles et garçons, notamment au niveau des demandes des familles : l'écart entre les demandes des familles de filles et de garçons est de 5,5% en faveur des filles.

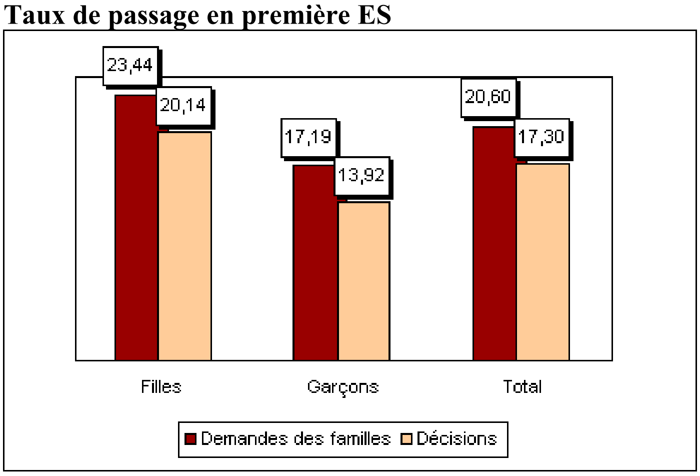
Taux de passage en premières générales



Première économique et sociale (ES)

La série « ES » apparait comme la plus consensuelle des séries générales au niveau de l'orientation filles-garçons. Les écarts tant au niveau des demandes des familles de filles et de garçons(-6,25%) comme au niveau des décisions des conseils de classes sont les plus faibles (3,3%).

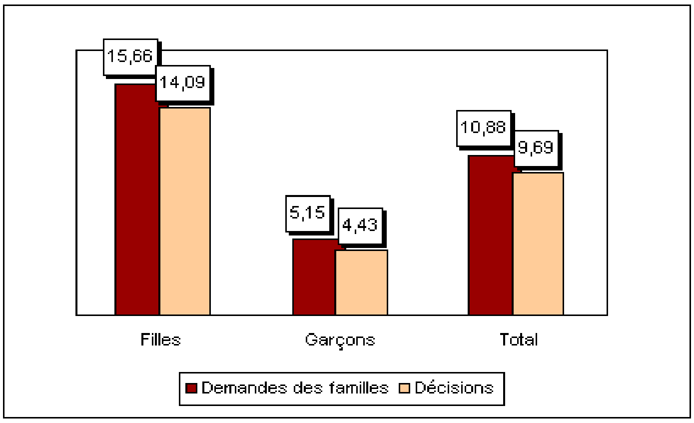
Taux de passage en première ES



Première littéraire (L)

Cette série concerne 17% des orientations vers la voie générale. Essentiellement plébiscitée par les filles, ces dernières sont trois fois plus nombreuses à demander et à obtenir un passage en première série « L ».

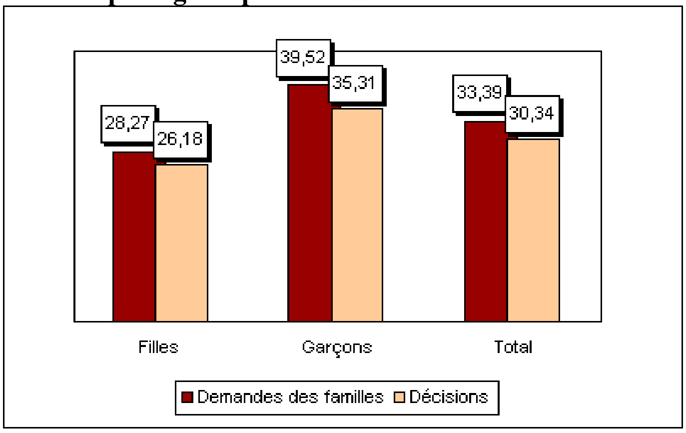
Taux de passage en première L



Première scientifique (S)

30,3% des élèves de seconde générale et technologique obtiennent un passage en première série « S », ce qui représente prés de 54% des élèves de premières générales et 37% des premières toutes séries confondues. Généralement plus élevées que celles des garçons, les demandes des familles de filles, pour ce qui est de cette série, affichent un écart négatif de 11,5%. Les décisions des conseils de classe entérinent les demandes des familles et répercutent l'écart filles -garçons.

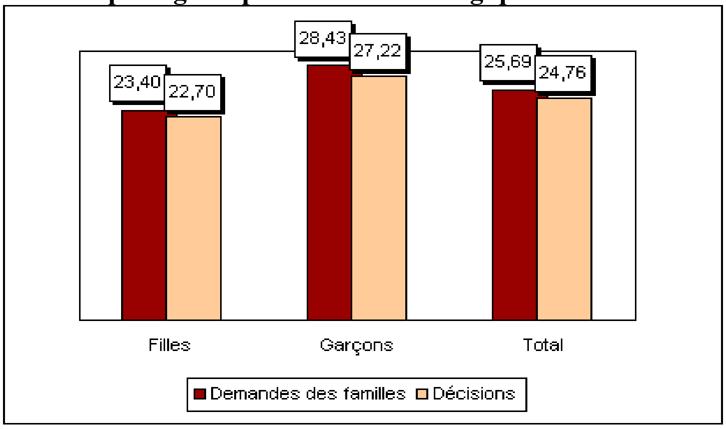
Taux de passage en première S



Total premières technologiques

Près de 24,8% (décisions d'orientation) des élèves issus de la classe de seconde générale et technologique se dirigent vers une première technologique. Les garçons sont plus nombreux à demander cette voie (+5%) mais obtiennent moins satisfaction que les filles pour leur voeux : l'écart demandes/décisions des filles est de 0,7% et de 1,21% pour les garçons.

Taux de passage en premières technologiques

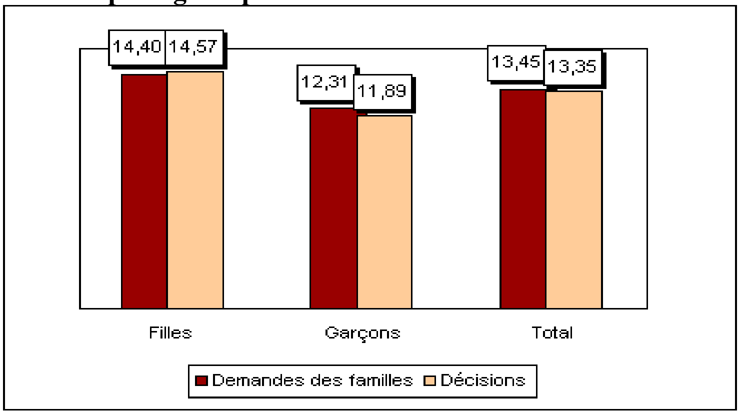


Première sciences et technologies de gestion (STG)

Il s'agit de la première technologique la plus demandée par les familles avec près de 13,5% des demandes. L'écart entre les décisions d'orientation et les demandes des familles est faible et a la particularité pour les filles d'être positif (plus de décisions que de demandes). La première « STG » est aussi la seule première technologique (avec, mais dans une moindre mesure la série « STL ») à obtenir une homogénéité au niveau des demandes des familles filles - garçons. il faut toutefois relativiser ces chiffres qui ne rendent pas toujours compte de la réalité : certains élèves demandeurs d'une série générale sont ainsi concernés par une décision d'orientation vers une première

STG quand des élèves souhaitant intégrer la série STG peuvent aboutir à une décision de redoublement. Cette série représente 54% des élèves de la voie technologique et 16% toutes séries confondues.

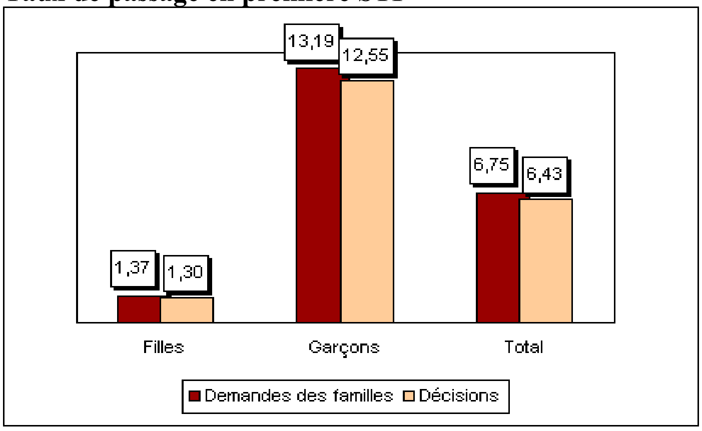
Taux de passage en première STG



Première sciences et technologies industrielles (STI)

Cette série apparaît comme la plus discriminante au niveau des filles : elles ne sont que 1,3% à demander et obtenir cette voie, ce qui représente un taux de 5% des élèves de premières technologiques. Les demandes des garçons représentent 9,6 fois celles des filles.

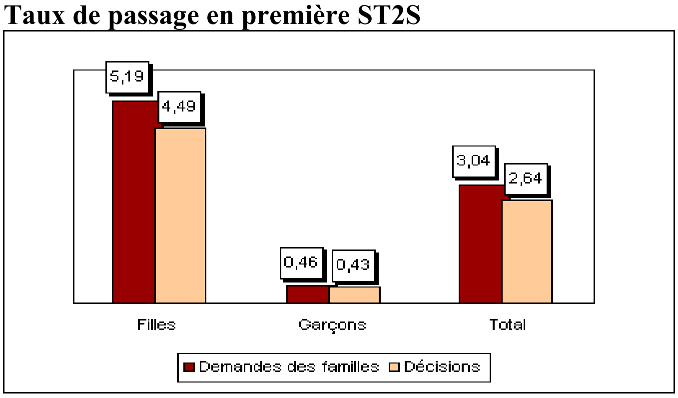
Taux de passage en première STI



Première sciences et techniques sanitaires et sociales (ST2S)

A l'instar de la série « STI », les conseils de classe entérinent les demandes des familles et les écarts demandes/décisions sont très faibles. Il est a noter une grande disparité entre les demandes des filles et des garçons (11 fois moins nombreuses).

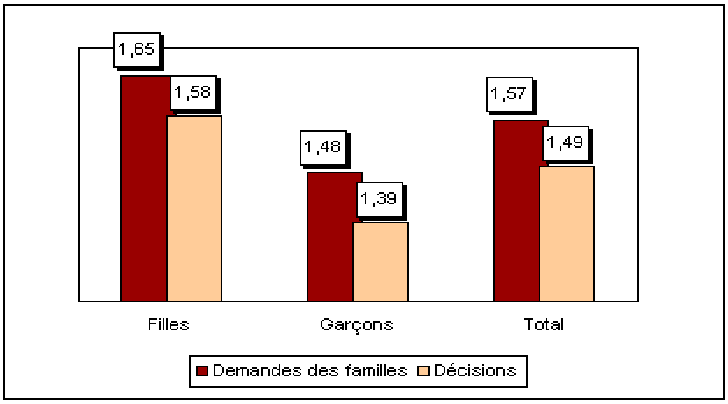
Taux de passage en première ST2S



Première sciences et technologies de laboratoire (STL)

Cette voie comprend 1,5% des élèves issus de seconde générale et technologique (décisions d'orientation). Elle affiche un consensus tant au niveau des demandes de filles et de garçons qu' au niveau des demandes des familles et des décisions d'orientation : aucun écart significatif n'apparaît.

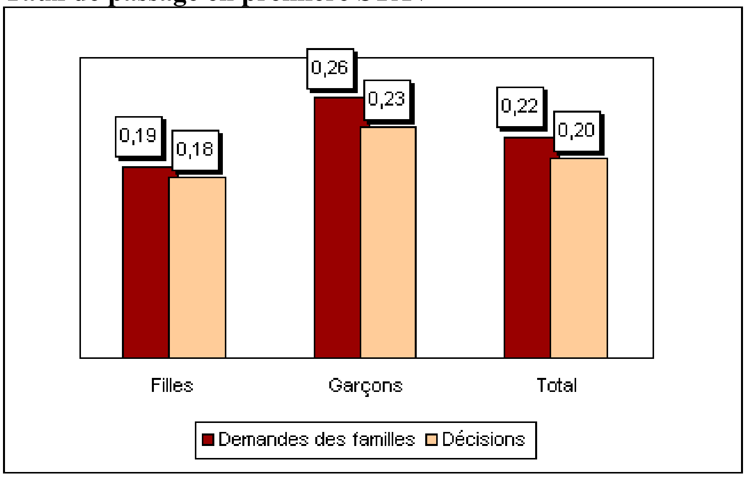
Taux de passage en première STL



Premières sciences et technologies de l'agronomie et du vivant (STAV)

Cette série comprend 0,8% des élèves qui obtiennent un passage en première technologique. Pas de disparités filles -garçons au niveau des chiffres.

Taux de passage en première STAV

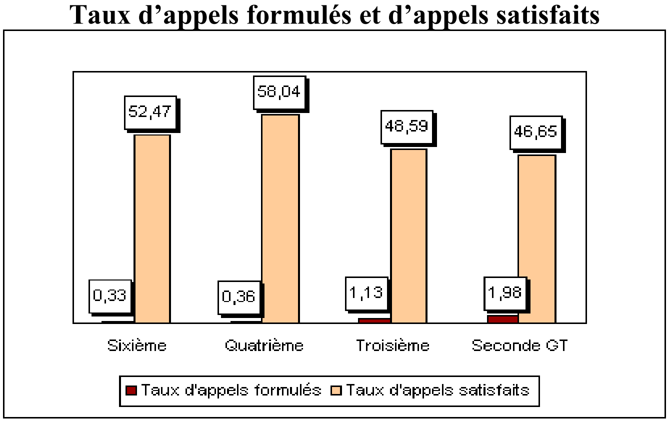


Voici maintenant ce que donne les procédures d'appel, d'après le même site :

Appels des décisions d'orientation prises par les chefs d'établissementsà l'issue des conseils de classe

Chiffres de juin 2008

Taux d'appels formulés et d'appels satisfaits



Les taux d'appels formulés par les familles sont calculés sur l'ensemble des élèves du niveau. Ils représentent les recours à la procédure d'appel par les parents d'élèves suite aux décisions d'orientation prononcées par les chefs d'établissements à l'issue des conseils de classe et transmis aux commissions d'appels.

Les taux d'appels satisfaits par les commissions d'appels sont calculés sur le total des appels formulés.

Le pourcentage d'appels formulés augmente avec le niveau de la classe. Ainsi, il y a six fois plus d'appels des décisions en classe de seconde générale et technologique qu'en sixième.

Les taux d'appels satisfaits quant à eux sont proches entre la sixième et la quatrième (52,5% et 58%) . Il n'en est pas de même pour les classes de troisième et de seconde générale et technologique où les taux de satisfaction chutent pour ne satisfaire respectivement que 48,6% et 46,6 % des familles.

Pour compléter ce premier tableau chiffré de l'orientation en France, voici les indicateurs donnés pour la classe de 4e :

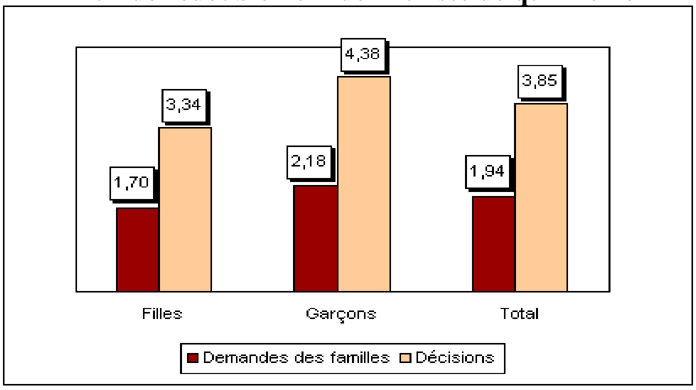
Demandes et décisions d'orientation à l'issue de la quatrième

Chiffres de juin 2008 - avant procédure d'appel

Redoublement

Le redoublement concerne 3,85% des élèves de quatrième. Au niveau des demandes des familles, les garçons sollicitent plus largement le redoublement (+0,48%) que les filles. Le taux de décisions de redoublement (4,38%) prises à l'encontre des garçons est le double de celui des demandes (2,18%).

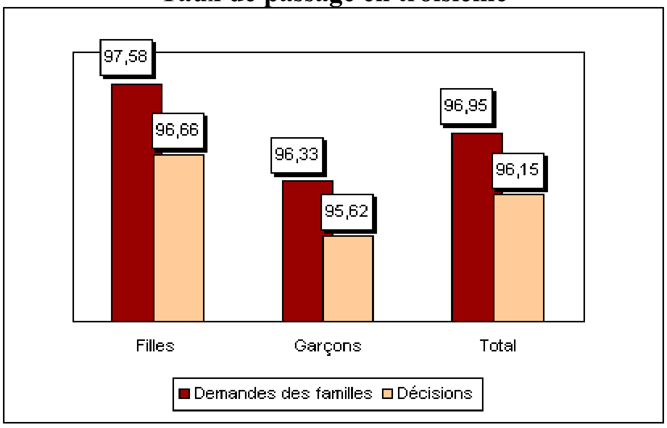
Taux de redoublement de la classe de quatrième



Passage en 3ème (*sic*)

96% des élèves de quatrième obtiennent le passage en classe de troisième (toutes troisièmes) après décision du conseil de classe.

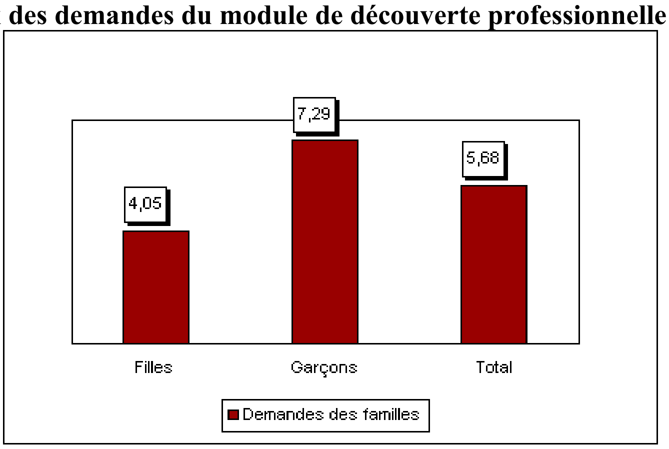
Taux de passage en troisième



Découverte professionnelle, module de 6 heures

Les élèves de quatrième sont 5,68% à demander une orientation vers le module de découverte professionnelle 6 heures. Cette modalité de poursuite de scolarité rencontre plus de succès auprès des garçons (7,29 % de demandes) que des filles (4,05%).

Taux des demandes du module de découverte professionnelle (6h)



Nous poursuivrons notre enquête par la considération d'un rapport à propos d'un aspect important de la question de l'orientation, le redoublement.

On suivra ici le rapport Paul-Troncin. Le Haut Conseil de l'évaluation de l'École a demandé à l'IREDU (Institut de Recherche sur l'économie de l'Éducation) un rapport sur « Les apports de la recherche sur l'impact du redoublement comme moyen de traiter les difficultés scolaires au cours de la scolarité obligatoire ». Ce rapport a été publié en décembre 2004.
On y trouve divers résultats sur le lien entre redoublement et situation sociale des familles, redoublement et situation géographique et coût du redoublement :

Pourcentages d'élèves entrés en 6e en 1989 ayant redoublé au moins une fois du cours préparatoire à la terminale

	Au moins un redoublement	Un seul redoublement	Au moins deux redoublements
Ensemble	66,6	40,2	26,4
Garçons	71,-	42,5	29,1
Filles	61,5	37,8	23,6
Milieu social			
Agriculteur	58,8	38,5	20,3
Artisan, commerçant	67,6	42,9	24,7
Cadre	48,8	33,4	15,4
Enseignant	41,1	33,4	7,7
Profession intermédiaire	61,7	39,4	22,3
Employé	71,3	43,2	28,1
Employé de service	81,3	46,5	34,7
Ouvrier qualifié	74,6	42,8	31,8
Ouvrier non qualifié	77,6	42,7	34,9
Inactif	80,6	41,4	39,3

Source : Caille (2004), p.81.

Proportion d'élèves en retard en 6e par Académie (2001)

	Ensemble	Garçons	Filles	Garçons–Filles
PARIS	22,2	25,7	18,5	7,2
NANCY-METZ	23,8	27,4	19,9	7,4
STRASBOURG	23,4	26,6	20,1	6,5
RENNES	25,0	29,4	20,1	9,3
GRENOBLE	24,6	28,3	20,5	7,8
ORLEANS-TOURS	24,9	28,7	20,9	7,8
NANTES	25,6	30,0	20,9	9,0
LYON 0	24,9	28,6	21,	7,7
TOULOUSE	24,8	28,2	21,2	7,0
VERSAILLES	25,7	29,6	21,6	8,0
BESANCON	26,1	30,2	21,8	8,4
CLERMONT-FERRAND	26,5	30,9	21,8	9,0
BORDEAUX	25,9	29,5	21,9	7,6
NICE	25,8	29,0	22,2	6,8
POITIERS	26,7	30,7	22,3	8,5
LIMOGES	27,2	31,8	22,4	9,4
CORSE	27,7	32,4	22,5	9,9
LILLE	26,5	30,2	22,6	7,6
AMIENS	26,9	30,8	22,6	8,2
ROUEN	27,8	31,9	23,3	8,6
REIMS	28,2	32,0	24,1	8,0
CRETEIL	28,4	32,3	24,1	8,2
DIJON	28,2	31,9	24,3	7,6
MONTPELLIER	28,7	32,6	24,4	8,2
CAEN	29,4	34,0	24,5	9,6
AIX-MARSEILLE	29,3	33,2	24,9	8,3
METROPOLE	26,2	30,1	22,0	8,0

Source: DEP

Éléments de calcul du coût du redoublement (2002)

	Primaire	Collège
Dépense par élève (€)	4490	7110
Effectifs	3755532	3146518
Dépense totale (millions €)	16862,3	22371,7
Proportion de redoublants	4%	7%
Coût du redoublement (millions €)	674,5	1566,0

Source : DEP
Ce qui donne un total d'environ 2,24 milliards d'euros par an.

Mais le cœur du rapport est fait de deux chapitres, l'un consacré à *l'efficacité pédagogique* du redoublement et l'autre à *l'attitude des enseignants et des familles* vis-à-vis du redoublement. Il ressort de ces deux chapitres que :

1. les diverses études montrent que, si l'objectif du redoublement est de rattraper son retard sur les autres, cet objectif n'est pratiquement jamais atteint (surtout dans le cas des redoublements du primaire où se concentrent la quasi totalité des recherches menées) ;

2. les enseignants comme les familles, bien que de façon différente, sont attachés à ce dispositif. Voici par exemple ce que notent les auteurs :

> Lorsque l'on se pose la question du redoublement en France, les réponses sont finalement assez claires. Le redoublement ne répond pas aux objectifs qu'il est censé atteindre, ses décisions sont injustes et il est coûteux. Cependant, la plupart des acteurs, enseignants et parents restent persuadés de son utilité. Alors comment aseptiser, en profondeur et dans les meilleurs délais, ce que Ferrier (Ferrier, Jean, *Améliorer l'efficacité de l'école primaire*. Paris : Hachette Éducation, 1999, 255 p., Rapport à Ségolène Royal, ministre déléguée, chargée de l'Enseignement scolaire) considère comme « *une des plaies de notre système éducatif français.* » ? Il ne s'agit sans doute pas de se contenter de promulguer des règlements interdisant ou tout du moins restreignant sa pratique. Nous avons vu que même si elle s'est amenuisée, elle reste vivace, notamment dans une classe comme le cours préparatoire où elle ne devrait pratiquement plus avoir lieu d'être. Les changements d'organisation, voire l'accroissement des moyens, ne sont rien face au comportement de l'acteur essentiel à l'école qu'est l'enseignant.

Leur conclusion demeure cependant prudente :

> Le système éducatif doit profiter d'une réflexion sur le redoublement pour promouvoir des changements importants de ses modalités de fonctionnement. Ceux que nous avons proposés sont en cohérence avec les objectifs et certaines des propositions du rapport Thélot (Thélot, Claude, *Pour la réussite de tous les élèves*, Rapport de la Commission du débat national sur l'avenir de l'école, La Documentation Française, 2004) (pratiques pédagogiques et temps d'apprentissage adaptés aux besoins des élèves, développement de la collégialité des pratiques éducatives, aides aux élèves en dehors des cours). Même si en matière d'évolution des politiques éducatives, il faut malheureusement rester modeste quant à la portée finale des transformations. Comme le rappellent les résultats de Goux et Morin (Goux, Dominique, Morin, Éric La persistance du lien entre pauvreté et échec scolaire, *France, portrait social 2000/2001*, 87-98, 2001) qui permettent de tester la mesure dans laquelle l'inégalité des chances est plus (ou moins) forte au sein des différentes générations en fonction du degré auquel ces générations ont connu la mise en place des cycles à partir de 1991. En réalité, on ne constate aucune baisse de l'inégalité des chances des élèves en fonction du revenu des parents. « *Les générations nées après 1980, ayant connu la réforme, redoublent beaucoup moins que leurs aînées, mais cette baisse est autant perceptible chez les familles riches que chez les familles défavorisées… la réduction de l'inégalité des chances entre enfants passe sans doute d'abord par une amélioration des conditions de vie matérielles de ces enfants, avant d'être une question d'organisation du système scolaire et de l'effort pédagogique* ».

Pour situer cette question du redoublement, qui est vive aujourd'hui, il faut la replacer dans l'évolution du système éducatif. La question du redoublement est en effet reliée à la *séquentialisation* de la formation scolaire. Yves Chevallard écrit à ce sujet :

> La séquentialisation de la formation consiste à définir une *suite de positions*, p_1, p_2, etc., que la personne x en formation viendra, en principe, occuper successivement, la formation donnée à x dans la position p_i devant lui permettre de venir occuper valablement la position suivante, p_{i+1}. Dans le cas de l'École, ces positions sont celles d'élève dans la suite des différentes *classes* : ainsi l'élève d'une classe de quatrième se forme-t-il afin de pouvoir occuper ensuite – l'année d'après, en principe – la position d'élève dans une classe de troisième. De même l'élève d'une classe de seconde est-il censé se former pour devenir élève dans l'une des classes « suivantes » – Première ES, S ou L, etc. En fait, les séquences de formation dessinent une *arborescence* telle que, en chaque point p_i, il existe une ou plusieurs « positions suivantes », p_{i+1}, p_{i+1}', p_{i+1}'', etc. Ainsi est-il possible, en s'orientant dans l'arbre des positions scolaires d'élève, de sélectionner telle ou telle séquence de formation scolaire – telle ou telle suite de classes. En dépit de cette diversification, les parcours scolaires actuels sont pour l'essentiel rigidement tracés, en ce sens notamment qu'ils proposent des séquences à la fois *non lacunaires* et *non réversibles*. La non-lacunarité des séquences de formation scolaire signifie que, pour venir occuper la position d'élève dans une classe donnée, il convient d'avoir occupé d'abord la position d'élève dans

l'une des classes antécédentes : on ne peut ainsi, sauf exception, devenir élève de Terminale S sans avoir été antérieurement élève de Première S. La pratique consistant à « sauter une classe » est aujourd'hui à peu près complètement bannie : les classes sont à *accès contrôlé* ou, pour le dire à l'aide d'une métaphore informatique, à accès « séquentiel » – et non à accès « direct » ou « aléatoire ». La non-réversibilité signifie simplement

que, s'il est encore possible de *stationner* dans une classe donnée – la durée de ce stationnement étant cependant limitée –, il n'est pas possible de *revenir en arrière* dans l'arbre des positions d'élèves.

Ce qu'il faut bien comprendre, c'est qu'il n'en a pas toujours été ainsi. Dans ce même texte, Yves Chevallard poursuit :

> Cette organisation séquentielle, qui nous est aujourd'hui si familière, ne prendra pourtant la forme rigide que nous lui connaissons que très tardivement, comme le montre la description suivante de la situation prévalant encore dans la première moitié du XIXe siècle (Prost 1968, p. 51) :
>
> La classe ne réunit [...] pas un groupe homogène. Elle ne se définit pas comme une tranche d'âge, car, comme au XVIIIe siècle, les élèves de la même classe peuvent avoir 4 ou 5 ans de différence. Ce n'est pas davantage un groupe d'une taille moyenne : les lycées parisiens ont plus de 60 élèves dans certaines classes, tandis que celles des collèges communaux sont le plus souvent squelettiques : en 1865 on peut, 4 fois sur 10, compter sur une seule main les élèves d'une classe de collège communal, et 7 fois sur 10 sur les deux mains.
> La classe de 25 à 30 élèves est une exception ; elle ne deviendra un idéal qu'aux environs de 1870. La croissance des effectifs amène alors Victor Duruy [nommé ministre de l'Instruction publique en 1863] à de nombreux dédoublements, tandis qu'en 1873 Mgr Dupanloup demande qu'en règle générale la classe ait entre 25 et 40 élèves. Une nouvelle conception de la classe se fait jour, mais on cherche en vain dans Littré l'emploi du mot au sens de « groupe scolaire constituant l'unité élémentaire d'enseignement ».

De plus, le parcours de la suite des classes n'est pas aussi rigide qu'il l'est aujourd'hui. En 1924, par exemple, l'accès aux classes de 6e et 5e est géré par un arrêté (10 mai 1924) que Yves Chevallard commente ainsi :

> L'article premier mentionne bien le principe de l'accès séquentiel, à partir de la « classe précédente » ; mais la possession du certificat d'études primaires permet *aussi* d'entrer en Sixième ou en Cinquième. En outre, l'élève ne relevant d'aucun de ces cas peut *tout de même* être admis en ces classes, mais alors à titre provisoire, pour un stage probatoire d'un mois ou deux – pratique souple qui a, semble-t-il, à peu près disparu aujourd'hui à ce niveau.

Il était même possible de revenir en arrière… :

> […], jusqu'à la fin du XIXe siècle, on pouvait « stationner » dans une classe plusieurs années, comme on le fait encore, mais de façon assez strictement limitée, dans les préparations au CAPES ou à l'agrégation. Et on pouvait même *revenir en arrière* quand la « classe suivante » n'existait pas ! Ainsi en allait-il avec la « vétérance de rhétorique », pratique que rappelle le texte ci-après (Albertini 1994, p. 38) :
>
> La vétérance de rhétorique, pratique traditionnelle (elle remontait à l'Ancien Régime), consistait à retourner en classe de rhétorique (notre Première) après le baccalauréat pour en tirer le maximum de profit. Favorisée par la longue faiblesse des facultés des lettres, concentrée dans quelques grands lycées parisiens, la vétérance de rhétorique, primitivement orientée vers le concours général, déboucha de plus en plus sur le concours de l'École [normale supérieure]. Cela dit, jusqu'en 1903, les « vétérans » purent prendre part au concours général, où ils bénéficiaient d'un classement séparé. À partir de 1890, on prit l'habitude de séparer les « vétérans » des « nouveaux », créant par là même les classes de khâgne. Ainsi s'explique l'appellation de « rhétorique supérieure » donnée aux premières khâgnes et celle, en usage

> depuis 1902, de « première supérieure ». La khâgne, où les bacheliers précoces pouvaient rester très longtemps (avant la réforme de 1904, le nombre de candidature n'étant pas limité, certains passaient le concours six ou sept fois), suscita l'ironie féroce de l'helléniste Victor Bérard [...] devant la commission Ribot de 1899 : « Pourquoi n'avoir pas de rhétoriques de plus en plus supérieures qui prépareront de bons petits internes
> à l'Académie française ? »
>
> La vétérance de rhétorique illustre la plasticité ancienne de l'usage social des séquences officielles de formation. Pour trouver un équivalent à une telle pratique, il faudrait par exemple imaginer que, après sa licence, un étudiant désireux de se présenter au CAPES de mathématiques, mais se jugeant insuffisamment solide sur certaines parties, déjà étudiées, du programme de ce concours, puisse sans obstacle institutionnel ni psychologique aller pour un temps s'asseoir à nouveau sur les mêmes bancs que les étudiants de DEUG : on aurait alors une « vétérance de DEUG ». (Une telle pratique supposerait sans doute une culture didactique assez différente de celle qui prévaut aujourd'hui à l'Université : la « vétérance », en effet, n'a de sens que si l'on admet que la formation qui peut s'acquérir dans un dispositif de formation donné ne dépend pas uniquement de ce dispositif, mais dépend en grande partie *de l'usage didactique qu'en fait l'étudiant*.) Mais les pratiques originelles, marquées par un certain degré de « bouclage » du temps de la formation, vont progressivement être « débouclées » et séquentialisées. C'est ainsi que, comme on l'a vu, la classe de rhétorique où se côtoyaient deux populations – les « vétérans » et les « nouveaux » –, va dans un premier temps être simplement dédoublée, dans le cadre d'une gestion pragmatique de la formation à l'intérieur des établissements, les vétérans venant former ce qu'on appelle alors spontanément, mais sans que la chose soit encore officialisée, une rhétorique *supérieure*. Dans un deuxième temps, les nouvelles classes ainsi constituées vont occuper leur lieu naturel dans le cursus des études littéraires : ce sont désormais des classes qui se situent *après* les classes « terminales » conduisant au baccalauréat – la linéarité formelle des études est ainsi retrouvée. Mais ce sont aussi des classes « terminales » par rapport au concours de l'École normale supérieure : aussi y stationne-t-on longtemps, jusqu'à des six et sept ans ! Ces classes de rhétorique supérieure « bouclent sur elles-mêmes » un (trop) grand nombre de fois : une telle situation est évidemment instable. L'évolution stabilisatrice se produit, en 1904, dans le sillage de la grande réforme de 1902 (qui concernait le Secondaire *stricto sensu*).

On voit à quel point le parcours s'est rigidifié depuis lors et jusqu'à aujourd'hui. Dans ces conditions, le redoublement, qui n'était alors qu'une façon, parmi tant d'autres, de parcourir le système éducatif, devient un « problème » et est souvent vécu comme une injustice ou une punition.

À suivre...

3. Notice Éducation mathématique et citoyenneté

Faute de temps, la poursuite de l'étude de cette notice est reportée à la semaine prochaine.

Cette séance de Séminaire est suivie d'une séance de travaux dirigés sur l'utilisation des TICE qui concerne les élèves professeurs dont les noms suivent :

Sylvain Astier ; Daniela Caraffa-Bernard ; Alain Gleyze ; Marianne Kiledjian ; Nicolas Laurent ; Anne Martinet ; Élodie Vadé ; Julien Fontana ; Rodolphe Arnaud ;Mounir El Farri ; Nelly Bofelli ; Vincent Dambreville ; Céline Goujon ; Nicolas Mizoule ; Antoine Noël ; Sihame El Khaine ; Francine Bert ; Benjamin Faure ; Vincent Boilard ; Sylvain Samat ; Christophe Dobrovolny ; David Felix.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Travaux dirigés de didactique des mathématiques
Utiliser les TICE

N. B. La séance de travail dirigé dont rendent compte les notes ci-après n'a concerné qu'une moitié des participants au Séminaire environ. Elle ne sera pas reprise in praesentia *avec les participants composant l'autre moitié : par principe, et dans le cadre de leur formation au travail en équipe, ces derniers devront étudier le contenu du TDDM 5 à partir des notes qui suivent et avec l'aide, laissée à la convenance de chacun, de participants ayant dûment suivi cette séance.*

➔ Séance 5 : mardi 7 avril 2009 (17 h 20 – 18 h 50)

Programme de la séance. Calcul et fonctions en seconde

On considère une classe de seconde dans laquelle les élèves ont étudiés un certain nombre de fonctions du second degré et de fonctions homographiques.
Au cours de leur travail, ils ont remarqué que, d'une part, la courbe représentative des fonctions dont l'expression algébrique « comportait un x^2 » avait la même forme ; d'autre part, la courbe représentative des fonctions dont l'expression algébrique « comportait des x au dénominateur » avait la même forme. Le professeur a fait formuler deux questions relatives à la validité de ces assertions et annoncé qu'elles seraient étudiées plus tard. L'étude des fonctions du second degré a été réalisée (voir en annexe 1 un extrait des traces écrites de la réalisation de cette étude) et il s'agit maintenant d'étudier la question relative aux fonctions « comportant un x au dénominateur ».

Voici la question qui avait été formulée et qu'il s'agit d'étudier :

$\mathcal{Q}$: On a remarqué que la courbe représentative de trois fonctions dont l'expression algébrique comportait des x au dénominateur avait la même forme. Est-ce vrai pour toutes les fonctions dont l'expression algébrique comporte des x au dénominateur ? Pourquoi ?

Pour débuter l'étude, le professeur P décide de donner un corpus de fonctions à étudier en devoir à la maison, chaque élève étant chargé de 2 fonctions et une fonction étant étudiée par 4 élèves.

La consigne prévue par le professeur est la suivante :

> En utilisant votre calculatrice, étudier les variations de chacune des deux fonctions et représenter graphiquement chacune des deux fonctions dans le même repère.

Voici les 5 premiers couples de fonctions déterminés par P.

$$f_2(x)=\frac{2x+3}{x-4}$$
$$f_1(x)=\frac{15-x}{x-4}$$

$$f_3(x)=\frac{3x}{x^2+1}$$

$$f_4(x) = \frac{3x}{x+1}$$

$$f_5(x) = \frac{2x}{3x-1}$$
$$f_6(x) = \frac{6x-1}{3x-1}$$

$$f_7(x) = -\frac{2}{3x}$$
$$f_8(x) = \frac{3x-2}{3x}$$

$$f_9(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$$
$$f_{10}(x) = \frac{3}{x}$$

La classe comporte 28 élèves. Compléter le corpus de fonctions en expliquant les raisons du choix effectué, analyser et évaluer la consigne donnée par P.

Le professeur fait un rapport de correction du devoir à la maison. À l'issue de ce rapport, il donne un document comprenant les représentations graphiques obtenues par les élèves pour initier l'étude de la question.

Proposer un guide d'AER qui permette d'apporter des éléments de réponse à la question $\mathcal{Q}$ en partant de ce document.

Pour fonctionnaliser le travail effectué; P choisit de faire étudier aux élèves la situation suivante :

Un biologiste étudie une population de bactéries dont il a modélisé l'évolution par la loi suivante : $p(t) = \frac{3t+2}{t+1}$ où t désigne le temps en minutes écoulé depuis le début de l'étude et $p(t)$ le nombre de bactéries en milliers au temps t. Il a à déterminer au bout de combien de temps la population comprend 2500 bactéries, 2700 bactéries, 2800 bactéries et 2900 bactéries.
Comment peut-il faire pour effectuer la résolution rapidement de tête ?

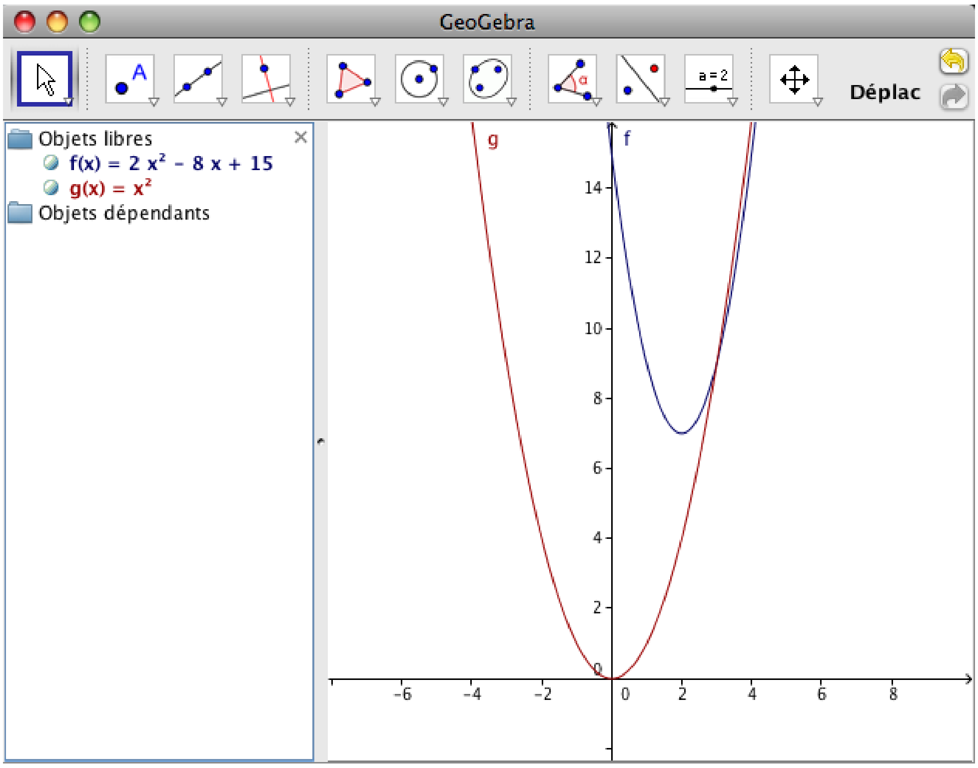
Proposer une technique possible justifiée par le résultat précédent et fabriquer un guide d'AER permettant de la faire émerger.

Annexe 1

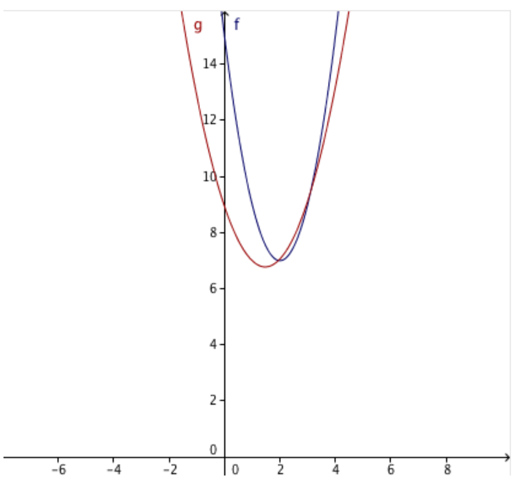
La représentation graphique des fonctions dont l'expression algébrique est de la forme ax^2+bx+c ont-elles toutes « la même forme » ?

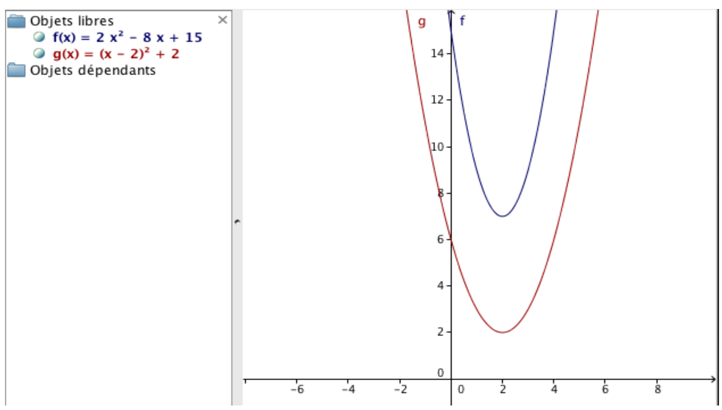
Bilan de la première partie de l'étude : Une étude expérimentale nous a permis de conclure que si la représentation graphique des fonctions dont l'expression algébrique est de la forme ax^2+bx+c avait la « même forme », c'était celle de la courbe représentative de la fonction qui à x associe $g(x)=x^2$. On cherche à vérifier si c'est vrai. Chaque groupe d'élèves est chargé d'une fonction. Pour notre groupe c'est la fonction qui à x associe $f(x)=2x^2-8x+15$.

GeoGebra permet de déplacer la représentation graphique d'une fonction.

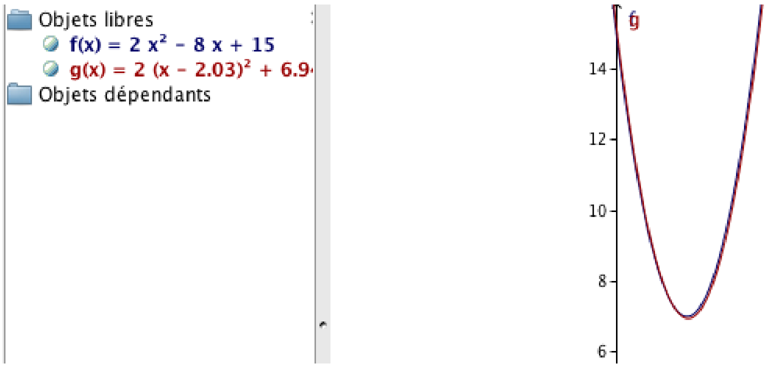


Par une simple translation, on ne peut pas superposer les deux courbes.

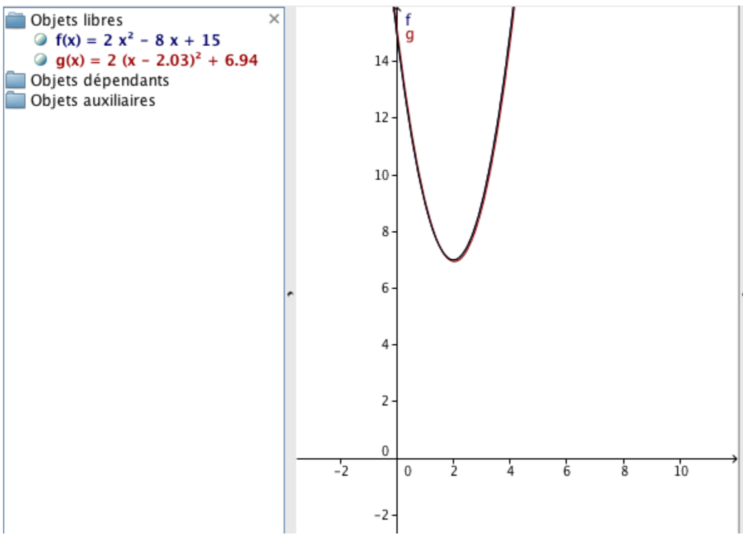




On a pensé à essayer en partant de la fonction qui à x associe $2x^2$.
On arrive alors à superposer les deux courbes.

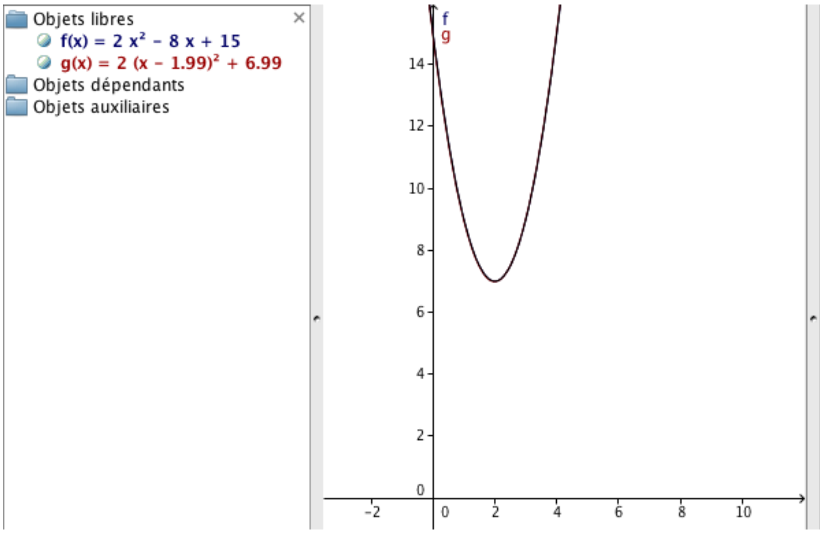


On utilise alors le tableur intégré au logiciel pour vérifier ce qu'il en est.



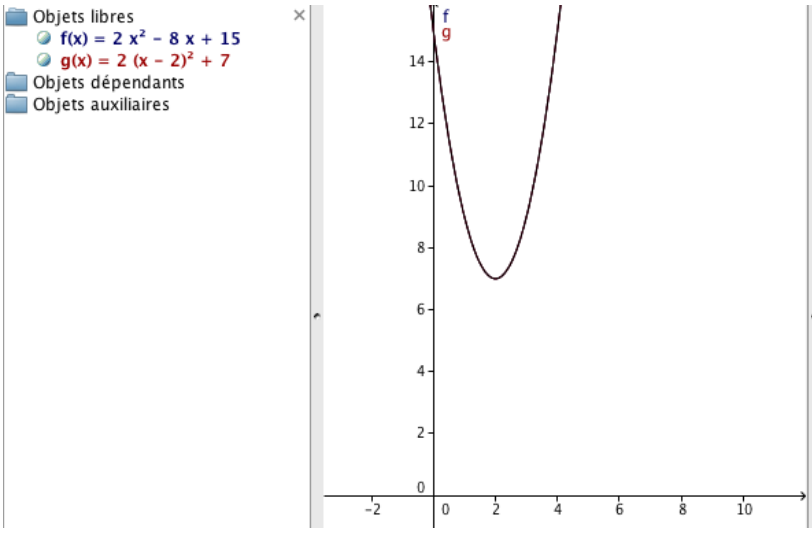
	A	B	C
1	Valeurs x	2 x² - 8 x + 15	2 (x - 2.03)² + 6.94
2	-2	39	39.5
3	-1.5	31.5	31.93
4	-1	25	25.36
5	-0.5	19.5	19.79
6	0	15	15.22
7	0.5	11.5	11.65
8	1	9	9.08
9	1.5	7.5	7.52
10	2	7	6.95
11	2.5	7.5	7.38
12	3	9	8.81
13	3.5	11.5	11.24
14	4	15	14.67
15	4.5	19.5	19.1
16	5	25	24.53
17	5.5	31.5	30.96
18	6	39	38.39
19			
20			

On essaie d'ajuster :



	A	B	C
1	Valeurs x	2 x² - 8 x + 15	2 (x - 1.99)² + 6.99
2	-2	39	38.83
3	-1.5	31.5	31.35
4	-1	25	24.87
5	-0.5	19.5	19.39
6	0	15	14.91
7	0.5	11.5	11.43
8	1	9	8.95
9	1.5	7.5	7.47
10	2	7	6.99
11	2.5	7.5	7.51
12	3	9	9.03
13	3.5	11.5	11.55
14	4	15	15.07
15	4.5	19.5	19.58
16	5	25	25.1
17	5.5	31.5	31.62
18	6	39	39.14

On pense à essayer $g(x)=2(x-2)^2+7$:



	A	B	C
1	Valeurs x	2 x² - 8 x + 15	2 (x - 2)² + 7
2	-2	39	39
3	-1.5	31.5	31.5
4	-1	25	25
5	-0.5	19.5	19.5
6	0	15	15
7	0.5	11.5	11.5
8	1	9	9
9	1.5	7.5	7.5
10	2	7	7
11	2.5	7.5	7.5
12	3	9	9
13	3.5	11.5	11.5
14	4	15	15
15	4.5	19.5	19.5
16	5	25	25
17	5.5	31.5	31.5
18	6	39	39

On le déduit avec le calcul algébrique : $2(x-2)^2+7=2(x^2-4x+4)+7=2x^2-8x+15$.

Bilan de l'étude expérimentale :
Une fonction dont l'expression algébrique est de la forme $a(x-m)^2+p$ a la même représentation graphique à une translation près que la fonction qui à x associe ax^2.
En développant une expression de la forme $a(x-m)^2+p$ on obtient une expression de la forme ax^2+bx+c.
Pour toutes les fonctions qu'on a étudié, on a vu que les expressions ax^2+bx+c se mettait sous la forme $a(x-m)^2+p$.

Séminaire de didactique des mathématiques
Résumés des séances

➔ Séance 22 : mardi 14 avril 2009

Programme de la séance. 1. Forum des questions // 2. Notice Éducation et citoyenneté // 3. Recherches dans les archives

1. Forum des questions

Le jury des enseignements

De quelle façon est utilisé le corpus B lors de l'oral d'enseignement ? (4^e, 20)

Le corpus B est le support principal de l'entretien avec le jury d'enseignement.
On rappelle l'*objectif* de l'entretien : l'appréciation de la maîtrise par le candidat des connaissances transmises dans la formation 2008-2009, ces connaissances étant « cadrées » par une liste de questions d'entretien (sur laquelle nous allons revenir). Le support de l'entretien est *au service* de la réalisation de cet objectif : sa présentation doit donc être concise, tout en faisant parcourir l'ensemble des rubriques usuelles, y compris celles relatives à l'organisation mathématique, à l'organisation didactique et à la gestion du travail *sur l'ensemble de la séquence* retenue par le candidat dans son corpus B.

Il appartient au candidat de faire un *choix* de présentation, qui lui permette de mettre en avant ce qui, *de son point de vue*, apparaît le mériter le plus – *par exemple* le fait que, en telle séance de la séquence, l'organisation de l'étude intégrait la conception et la réalisation d'une expérimentation conduite par les élèves réunis en binômes avec telles ou telles ressources de milieu (ordinateurs, Internet, calculatrice, épures, théories déductives, etc.).

Cela noté, les membres de la commission d'examen ne sont nullement tenus de faire porter leurs questions *uniquement* sur les points ainsi mis en relief. Mais ils devront dans tous les cas :
1) demeurer dans le cadre fixé par la liste susmentionnée ;
2) se référer au support d'entretien, le corpus B augmenté du corpus A, dont ils n'auront pu prendre connaissance par avance et qu'ils ne pourront donc que parcourir de façon volontairement non systématique.

Ce qu'on attend finalement du candidat c'est que, et dans la présentation du support d'entretien et dans les réponses aux questions qui lui seront proposées ensuite, il montre de façon raisonnablement convaincante sa connaissance des contenus de la formation. On aura noté que le support d'entretien doit cette année contenir le « mémoire interdisciplinaire » éventuellement réalisé par ailleurs par le candidat : des questions pourront en ce cas porter sur cette composante du matériel présenté.

Voici la liste des questions d'entretien 2007-2008.

Questions d'entretien

① ***Structure et contenu de la séquence observée***

❶ Que sont les systèmes didactiques auxiliaires (SDA) et les dispositifs didactiques internes au système didactique principal (SDP) mobilisés lors de la réalisation de la séquence ? Comment la séquence exploite-t-elle l'espace didactique offert par le SDP et ses SDA ?

❷ Quelle est la place du thème mathématique parmi les secteurs et domaines d'études en lesquels se structure le programme de mathématiques de la classe ? Que sont les principaux sujets d'étude participant de ce thème ? Comment ce thème est-il situé dans la programmation annuelle adoptée ?

② ***L'organisation mathématique***

❶ Que sont les types de tâches travaillés dans la séquence ? Y sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ?

❷ Quelles sont les raisons d'être des types de tâches travaillés ? Sont-elles explicitées ? Comment ?

❸ Quelle pertinence ont les types de tâches travaillés en tant qu'outils d'études pour l'année en cours ? Pour les années à venir ? Pour d'autres disciplines ?

❹ Que sont les techniques associées aux types de tâches travaillés ? Sont-elles faciles à utiliser ? Quelle est leur portée ? Sont-elles fiables ? Qu'en est-il de leur intelligibilité ? Quel est leur avenir ? Quelles évolutions devront-elles subir pour perdurer ?

❺ Comment les techniques travaillées sont-elles justifiées ? Y a-t-il des énoncés technologiques ou théoriques qui soient considérés comme " évidents " ou " bien connus " ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes canoniques en mathématiques ? Ont-elles valeur d'explication pour les élèves ? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement exploités ?

③ ***L'organisation didactique***

❶ Comment se réalisent dans les temps et les lieux alloués, et selon quelles modalités (place du manuel, travail en classe et hors classe, etc.), les différents moments de l'étude – première rencontre avec les types de problèmes associés au thème, travail exploratoire visant à l'émergence d'une technique, travail d'élaboration technologique et théorique, travail de la technique et, plus largement, de l'organisation mathématique, institutionnalisation, évaluation ? Comment ces moments didactiques sont-ils articulés ? Jusqu'à quel point leurs modalités de réalisation apparaissent-elles installées dans la culture de la classe ?

❷ Qu'en est-il de la chronogenèse ? Quelle avancée de l'étude la séquence a-t-elle permis ?
– Comment cette avancée de l'étude se manifeste-t-elle dans l'organisation mathématique (par la création de nouveaux types de tâches, de nouvelles techniques, de nouveaux éléments technologiques, par une réorganisation partielle du déjà construit, etc.) ?
– S'est-elle faite au détriment de certains des moments de l'étude ? Lesquels ?
– Comment la mémoire didactique de la classe est-elle assurée ?

❸ Qu'en est-il de la topogénèse ?
– Quel est le *topos* de l'élève dans l'organisation de l'étude ? Les élèves l'occupent-ils franchement, ou seulement d'une manière indécise ou aléatoire ?
– Quel est le *topos* du professeur dans la séquence ? Lui permet-il d'assurer adéquatement ses différents rôles (directeur d'étude, aide à l'étude, enseignant, etc.) ?
– Comment le *topos* du professeur s'articule-t-il avec le *topos* de l'élève ?

❹ Qu'en est-il de la mésogénèse ?
– De quelles ressources didactiques et notamment de quelles ressources mathématiques, de quels moyens déductifs et de quels moyens expérimentaux (calculatrices, logiciels, etc.) les élèves disposent-ils pour accomplir le travail d'étude et de recherche qui leur est demandé ?
– Ces ressources leur permettent-elles de résoudre en quasi-autonomie didactique les problèmes qu'ils ont à affronter ?

④ ***La gestion de la séquence et de la séance***

❶ La gestion du temps didactique permet-elle d'impulser une dynamique de l'étude adéquate ? La gestion de l'espace didactique conduit-elle à une exploitation satisfaisante des divers systèmes didactiques mobilisables et des dispositifs didactiques qu'ils proposent, notamment en ce qui concerne la mémoire didactique de la classe et de chacun des élèves ?

❷ La gestion par le professeur de son propre *topos* et du *topos* de l'élève, et en particulier des ressources que celui-ci peut mobiliser, lui permet-elle une prise de décision effective et une action efficace devant les difficultés rencontrées au cours de la séquence ?

⑤ ***Les " passages imposés "***

❶ Quel " jeu " la séquence montre-t-elle entre travail individuel ou en équipe et travail de la classe en tant que collectif d'étude et de recherche ?

❷ Quelles formes d'aide ou de différenciation réalistes propose la séquence (ou pourrait-on proposer à partir de cette séquence) pour gérer la diversité des élèves ?

❸Quel est le dispositif d'évaluation utilisé ? Quels sont les critères d'évaluation ? Quels sont leurs rôles ?

❹ Quelle serait la contribution possible de la séquence à l'éducation à la citoyenneté ?

Ces questions ont été examinées collectivement lors de la séance. Elles constitueront les questions d'entretiens 2008-2009.

TER

Pour le TER est-il possible de proposer une grande AER, mais de n'en détailler qu'une partie et expliquer de façon générale comment se déroulerait le reste ?(Sinon ce serait très long de tout développer.) (5e, 20)

Dans le développement du mémoire, si on propose une AER, faut-il également proposer la synthèse que l'on en ferait ? (5e & 4e, 20)

Les deux questions dépendent évidemment des sujets choisis. Nous donnerons ici quelques indications permettant d'orienter le travail.

Travail réalisé oralement

Système d'équations et fabrication de techniques

J'ai introduit le type de tâches « résoudre un système de deux équations à deux inconnues » par le biais de problèmes d'intersection de droites. Une fois que la technique de résolution a émergé et a été institutionnalisée, faut-il prendre de la distance vis-à-vis du point de vue « intersection de droites » ou au contraire doit-on y revenir pour donner du sens ? (2de, 20)

La question traduit une vision encore trop circonscrite de la fabrication de techniques, qui ne prend pas assez en compte le point de vue fonctionnel.

On peut supposer d'après ce qui est dit que la technique qui a émergé et qui « prendrait de la distance avec les intersections de droites » est celle-ci :

On met les deux équations sous la forme $y = ax + b$ et $y = a'x+b'$; si les deux équations sont les mêmes, on a une infinité de solutions ; sinon, on obtient donc un système équivalent par $y = ax+b$ et $ax+b = a'x+b'$. La résolution de cette deuxième équation permet d'obtenir x ou de mettre en évidence qu'il n'y a pas de solution ; dans le cas où il y a une solution, on peut alors calculer y en remplaçant x par sa valeur dans l'équation $y = ax + b$. Dans le cas d'une solution unique, on vérifie, en remplaçant x et y par leurs valeurs dans le système de départ.

Un point de vue fonctionnel pousse à ***intégrer*** le point de vue des intersections de droites dans la technique en mettant en place une technique en deux étapes, ***une étape expérimentale, une étape déductive***. Cela pourrait donner la technique suivante :

> On met les deux équations sous la forme $y = ax + b$ et $y = a'x+b'$; on trace les deux droites à la calculatrice graphique. On obtient deux droites concourantes, confondues ou strictement parallèles.
> Si les droites sont concourantes, on a une unique solution, le point d'intersection des deux droites, dont on obtient une valeur approchée des coordonnées par la fonction « intersection ». On le déduit en obtenant un système équivalent par $y = ax+b$ et $ax+b = a'x+b'$. La résolution de cette deuxième équation permet d'obtenir la valeur de x, x_0 ; on obtient alors un système équivalent avec x_0 et $y = ax+b$ et on peut calculer y en remplaçant x par sa valeur x_0 dans l'équation $y = ax + b$.
>
> Si les droites sont strictement parallèles, on n'a pas de solution ce qu'on déduit en obtenant un système équivalent par $y = ax+b$ et $ax+b = ax+b'$ et en montrant que la deuxième équation se met sous la forme $b - b' = 0$ avec $b - b'$ non nul.
>
> Si les droites sont confondues, on a une infinité de solution, les points qui vérifient l'équation de la droite, ce qu'on déduit en montrant que les deux équations obtenues sont identiques.

De fait, la technique utilisée par la classe mobilisait la notion de déterminant du système :
Pour résoudre le système $\begin{cases} cx+dy=e \\ c'x+d'y=e' \end{cases}$, on calcule le déterminant du système : $D=cd'-dc'$.
Si D = 0, le système a une infinité de solutions ou pas de solution ; si D est non nul, il y a une solution unique que l'on détermine ;
La notion de déterminant n'ayant pas émergée du travail de la classe mais ayant été introduite car elle figurait dans le manuel utilisé.

On notera que la technique développée précédemment permet de faire surgir et de donner une raison d'être à la notion de déterminant, tout en permettant d'en contrôler l'emploi. En effet, en supposant que *d* et *d'* sont non nuls, le système précédent se met sous la forme $\begin{cases} y=-\dfrac{c}{d}x+\dfrac{e}{d} \\ y=-\dfrac{c'}{d'}x+\dfrac{e'}{d'} \end{cases}$, et les droites sont donc parallèles si et seulement si $\dfrac{c}{d}=\dfrac{c'}{d'}$ soit encore si $cd'-c'd=0$.

Nous reprendrons maintenant la question de l'orientation, dont nous avons débuté l'exploration la semaine dernière.

Orientation

Pour l'orientation des élèves, faut-il prendre en compte principalement leur moyenne ou le comportement en classe est-il tout aussi important ? (5^{e} et 4^{e}, 19) A partir de quel niveau d'un élève doit-on s'opposer ou au contraire soutenir son passage dans une classe supérieure (principalement : 1re scientifique et 1re ES). (2de, 17) Tous les élèves de la classe que j'ai en responsabilité ont choisi l'option IGC. A l'issue du conseil de classe du deuxième trimestre, tous les élèves s'orientent vers une 1re STG mais certains m'ont

posé des questions sur les différences d'exigence en mathématiques entre la 1re STG et la 1re ES. Comment leur répondre de façon précise ? (2de, 19)

I. Nous examinerons ici des extraits des notes du Séminaire 2006-2007 sur cette question.

Extrait 1

b) Avant d'apporter des éléments de réponse aux questions ci-dessus, on se mettra un peu à distance de l'obligation faite aux professeurs de participer à l'orientation des élèves en prenant connaissance de plusieurs passages d'un ouvrage consacré à l'école en général par un observateur extérieur mais familier du monde scolaire et, dans l'ensemble, plutôt bienveillant à son endroit, Hervé Hamon. À l'origine professeur de philosophie devenu journaliste et écrivain, Hervé Hamon a été membre du Haut Conseil de l'évaluation de l'école et a tenu pendant des années une chronique dans le *Monde de l'éducation*. Auteur d'un premier ouvrage remarqué, *Tant qu'il y aura des profs* (1984), il a publié vingt ans après *Tant qu'il y aura des élèves* (Seuil, Paris, 2004), livre désormais disponible en poche, où il revisite le système éducatif français et dans lequel il s'arrête longuement sur la question de l'orientation.

• Le premier extrait que l'on parcourra (*op. cit.*, pp. 98-99) souligne ce qui apparaît à l'auteur comme une « anomalie » française.

> Le chapitre le plus sensible de ce dossier tourmenté, c'est, fatalement, l'orientation des élèves. Si le label des diplômes est aussi crucial, si le cursus des années de formation annonce à ce point la configuration d'une vie, alors, logiquement, le moment de l'orientation est une étape très lourde de conséquences scolaires et extrascolaires. C'est celui où l'école agit directement, explicitement, sur la condition présente et future de l'élève, où l'on ne saurait se borner à dire qu'elle est passive, involontairement tributaire de son environnement, traversée par des forces qui lui sont étrangères.
>
> Le choix français, en la matière, est une fois encore assez singulier : il confère à cette école, et aux enseignants, la charge quasi exclusive d'une décision qui, en elle-même, n'est pas incluse dans le contrat du maître, lequel revient à instruire et à éduquer. Les chercheurs insistent volontiers sur cette anomalie, soulignant que « l'orientation n'est pas un mécanisme scolaire en soi : elle n'est que la projection dans l'espace scolaire d'enjeux extérieurs à l'école [1. Marie Duru-Bellat, Jean-Pierre Jarousse et Georges Solaux, « S'orienter et élaborer un projet au sein d'un système hiérarchisé : une injonction paradoxale ? », in *L'Orientation scolaire et professionnelle*, 1997] » Il n'empêche : la France qui s'identifie passionnément à son système éducatif, qui aurait pu déléguer à des instances autres, professionnelles ou étatiques, le soin d'exploiter l'information transmise par les enseignants, reste farouchement adepte du « tout à l'école ». Celle-ci, note un spécialiste averti, Bernard Charlot, « fonde de plus en plus sa légitimité sur son propre fonctionnement, justifiant ce qu'elle propose à un niveau par ce qu'elle impose au niveau supérieur. Dès lors, le sens de l'école devient l'école elle-même, plus d'école encore, passer dans la classe supérieure, le bon cycle, la bonne section, la bonne option [2. Bernard Charlot, *L'École en mutation,* Paris, Payot, 1987]. » En termes vulgaires, l'école contrôle simultanément le terrain, les règles du jeu, la partie, les joueurs, les spectateurs et l'arbitre.

• Traditionnellement, l'orientation scolaire opère par soustraction par rapport à un modèle idéal, et non par composition de qualités (ou de potentialités) reconnues à l'élève (ou conjecturées en lui) : elle est une orientation « négative » (*ibid.*, pp. 100-101).

> Indépendante, l'école l'est peut-être (et peut-être à l'excès). Juste et performante quand elle prononce des orientations, elle ne l'est certainement pas. Hors les murs, le fait n'est avoué que du bout des lèvres. En interne, c'est le secret de Polichinelle. Combien de professeurs, parmi mes interviewés, ont exprimé, là-dessus, plus qu'un trouble ? Combien disent leur doute et leur scrupule à l'issue des conseils de classe ? Une ample majorité – tant que les parents ne sont pas là pour les entendre.

Pourquoi ? Parce que le « roc » n'est pas si ferme, ou que s'il l'est, ce n'est pas, en maintes circonstances, au bénéfice de l'élève. Le « tout à l'école » devrait offrir une garantie d'équité. Mais nous sommes loin du compte. Car l'orientation, depuis toujours, est obstinément « négative ». Orienter un élève, le plus souvent, n'est pas détecter ses aptitudes mais ses inaptitudes. L'école, écrit Robert Ballion [1. *L'Évolution de la fonction d'orientation*, rapport à la Commission des communautés européennes, octobre 1987], observateur pénétrant, « sanctionne l'adéquation des performances de l'élève aux exigences de l'institution, ou plutôt l'inadéquation de ses performances, dans la mesure où, en règle générale, l'orientation est négative : l'élève orienté étant l'élève qui n'est pas jugé apte à suivre un cursus donné ».

Comme il existe, au Conservatoire des poids et mesures, un mètre étalon fixant une fois pour toutes le gabarit de tous les mètres, on peut imaginer qu'il existe, dans l'imaginaire collectif de la planète scolaire, un élève étalon : celui qui sera reçu premier à l'école des Mines et à celle des Ponts et Chaussées, ou bien à Polytechnique et à l'ENA réunies. Cet élève étalon, toujours dans l'imaginaire collectif, n'est pas l'exception. Il fixe la norme. Et tout élève en chair et en os se présentant à la porte de son collège ou de son lycée est cet élève-là *moins* quelque chose. Il ne sera pas défini par ses qualités, il sera défini par ses carences. L'orienter ne consistera pas à inventer avec lui la trajectoire la plus appropriée, mais à l'écarter, vu ses manques, de la trajectoire parfaite, celle que trace l'élève étalon.

• L'orientation pratiquée à l'école n'est pas seulement vécue par les professeurs comme une réalité plus ou moins douloureuse ou malheureuse. Des observateurs dont la mission n'est nullement de « charger » l'école, les corps d'inspection, les rejoignent sur un constat qui, semble-t-il, n'épargne personne (*ibid.*, pp. 107-108).

… les phrases les plus sévères émanent d'une institution à laquelle on prête volontiers un langage feutré : l'Inspection générale. Dans un document de synthèse –non public – destiné au ministre, au cabinet, aux directeurs de la Centrale et aux recteurs, et rassemblant les observations des inspecteurs de terrain, en particulier départementaux, le jugement porté sur le dispositif d'information et d'orientation oublie totalement d'arrondir les angles [1. *Les Académies sous le regard des inspections générales, bilan des dix premières évaluations de l'enseignement en académie,* cosigné par l'Inspection générale de l'Éducation nationale (IGEN) et l'Inspection générale de l'administration de l'Éducation nationale et de la Recherche (IGAENR) – quatre rédacteurs par corps –, non publié, juin 2003] : « Tous les rapports d'évaluation soulignent la mauvaise qualité de l'orientation et de tout ce qui touche à la construction du projet personnel de l'élève. Ils relèvent le manque d'investissement des professeurs principaux, des chefs d'établissement, parfois des conseillers d'orientation psychologues (COP) eux-mêmes. Quant à son contenu, l'orientation reste dominée par les parcours traditionnels et offre peu d'alternatives aux élèves. »

À l'appui, le document cite les comptes rendus académiques. « Le rapport Créteil note que les enseignants sont "relativement indifférents à leur responsabilité en ce domaine comme aux conséquences de leurs décisions". Le rapport Nice conclut : "L'orientation fonctionne bien là où elle est la moins nécessaire : dans les établissements où les élèves obtiennent de bons résultats et où leurs familles savent trouver les informations. En revanche, dans les secteurs défavorisés économiquement, le travail à faire reste important pour que des jeunes ne se retrouvent pas abandonnés à eux-mêmes..." Les observations conduites dans l'académie d'Orléans-Tours ont montré que les COP et les professeurs principaux s'en remettent, en matière d'éducation à l'orientation, aux outils de l'ONISEP [1. Office national d'information sur l'enseignement et les professions, créé en 1970], bien davantage qu'à leur propre connaissance du contexte économique et professionnel, local et national, qu'ils estiment eux-mêmes limitée. Le même constat vaut pour les chefs d'établissement… »

Extrait 2

➔ Dans ce qui suit on regardera cependant cette situation comme un fait : le professeur, dont le rôle cardinal est d'instruction et d'éducation, doit à certains moments assumer d'autres fonctions. De ce point de vue, on gardera présent à l'esprit les deux articles ci-après du code de l'éducation.

Article L331-7

(Loi nº 2005-380 du 23 avril 2005 art. 30 Journal Officiel du 24 avril 2005)

L'élève élabore son projet d'orientation scolaire et professionnelle avec l'aide de l'établissement et de la communauté éducative, notamment des enseignants et des conseillers d'orientation-psychologues, qui lui en facilitent la réalisation tant en cours de scolarité qu'à l'issue de celle-ci.

À cette fin, les élèves disposent de l'ensemble des informations de nature à permettre l'élaboration d'un projet d'orientation scolaire et professionnelle.

Ils bénéficient notamment d'une information sur les professions et les formations qui y préparent sous contrat de travail de type particulier et sous statut scolaire.

Cette information est destinée à faciliter le choix d'un avenir professionnel, de la voie et de la méthode d'éducation qui y conduisent.

Cette information est organisée sous la responsabilité des chefs d'établissement, dans le cadre des projets d'établissement ou de projets communs à plusieurs établissements. Elle est conjointement réalisée par les conseillers d'orientation-psychologues, les personnels enseignants, les conseillers de l'enseignement technologique et les représentants des organisations professionnelles et des chambres de commerce et d'industrie, de métiers et d'agriculture, en liaison avec les collectivités territoriales. Elle s'accompagne de la remise d'une documentation.

Article L912-1

(Loi nº 2005-380 du 23 avril 2005 art. 47 Journal Officiel du 24 avril 2005)

Les enseignants sont responsables de l'ensemble des activités scolaires des élèves. Ils travaillent au sein d'équipes pédagogiques ; celles-ci sont constituées des enseignants ayant en charge les mêmes classes ou groupes d'élèves ou exerçant dans le même champ disciplinaire et des personnels spécialisés, notamment les psychologues scolaires dans les écoles. Les personnels d'éducation y sont associés.

Les enseignants apportent une aide au travail personnel des élèves et en assurent le suivi. Ils procèdent à leur évaluation. Ils les conseillent dans le choix de leur projet d'orientation en collaboration avec les personnels d'éducation et d'orientation. Ils participent aux actions de formation continue des adultes et aux formations par apprentissage.

Ils contribuent à la continuité de l'enseignement sous l'autorité du chef d'établissement en assurant des enseignements complémentaires.

Leur formation les prépare à l'ensemble de ces missions.

➔ La capacité à émettre un pronostic juste sur la base des résultats observés au cours de l'année dans une matière est évidemment limitée, surtout dans les cas tangents : autre point bien connu et souligné dans le rapport des inspections générales mentionné plus haut. Dans ce qui suit, on tentera pourtant d'introduire certains repères pour guider cet impossible travail.

Extrait 3

En même temps qu'un travail d'informations recoupées sur la structure des poursuites d'études et des secteurs professionnels, il convient sans doute, en premier lieu, de travailler à se déprendre d'une certaine vision « sélectionniste », dont l'expression la plus brutale tient dans un slogan d'exclusion : « Ils n'ont rien à faire là ! » – ou, plus doux, « Ils n'ont pas leur place en 2de » (ou : en 4^{e}, à l'université, etc.).

➔ Pour approfondir ce point, on examinera les notes ci-après, reprises du Séminaire 2005-2006.

1) Même si le professeur n'a pas de pouvoir thaumaturge, on l'a souligné, il ne saurait renoncer à rechercher des effets systématiques d'éducation mathématique et institutionnelle même chez ces élèves qui semblent parfois se désigner eux-mêmes comme « inéducables ». Si l'on peut comprendre le découragement et l'érosion de la volonté devant la rétivité ou l'opposition affichées par certains, on ne peut en revanche accepter le *principe* selon lequel

l'École renoncerait à agir sur les cas les plus difficiles. Il y a là, en effet, une méprise qu'il convient encore et encore de dénoncer : dans la *scolarité obligatoire*, on ne cherche pas en priorité à sélectionner les plus capables (ce qui, en certains contextes de formation, est une problématique légitime), mais, en conformité avec le « pacte national d'instruction » que scellent les programmes des classes successives, *à augmenter autant que faire se peut l'instruction et l'éducation de chaque futur citoyen*. À cet égard, ni l'élève ni le professeur ne sont libres de décider d'un commun accord ! Dans le principe, le professeur doit chercher à instruire l'élève, tandis que l'élève ne peut refuser cette *instruction obligatoire* – quand bien même il serait tenté de le faire. Tel est le principe qui devrait prévaloir. Si quelques élèves semblent véritablement inaccessibles au dispositif de soutien mis en place, il appartient à l'établissement d'envisager d'autres dispositifs jugés plus appropriés. Quant au professeur, il ne doit pas se lasser d'assumer son rôle auprès de chacun de ses élèves.

2) Le non-investissement dans la formation scolaire qui est la tentation de trop élèves doit être évaluée avec eux à son juste prix : ne pas s'instruire, refuser de s'éduquer (aux multiples sens du mot), c'est à *coup presque sûr* se faire du tort à soi-même (ce que tel élève peut ne pas entendre), mais aussi, dès aujourd'hui, faire du tort à ses futurs enfants – s'ils viennent un jour à la vie –, mais aussi à tout ceux qui vous entoureront dans dix, vingt, trente ans et plus, et plus largement à la société tout entière. *A contrario*, l'effort d'aujourd'hui, d'un côté, la bienveillance et la sollicitude à l'endroit de cet effort, de l'autre, sont un gage très sûr d'une amélioration de la vie future de l'élève, de ses descendants, de ses proches et de la société où il vivra. Même s'il n'est pas entendu, ce discours devra être tenu et médité.

➔ Le même passage des notes de la séance 9 de l'année 2005-2006 reproduisait la conclusion d'une étude récente, due à Éric Maurin et Sandra McNally, intitulé *« Vive la Révolution ! » Les bénéfices de long terme de mai 68*. (Le texte intégral de cette étude figure, sous le titre condensé *Vive Mai 68*, dans les *Documents* / *2nd degré* sur le site de l'IUFM.)

Mai 68 a eu des conséquences importantes pour les étudiants qui n'étaient au moment des événements plus très loin d'être éliminés du système éducatif et de devoir renoncer à poursuivre des études supérieures. De fait, les modifications des procédures d'examens et la volonté de les alléger ont conduit à des taux de réussite au bac et aux examens universitaires très supérieurs à ceux observés habituellement à l'époque. Pour beaucoup d'étudiants (notamment les meilleurs), cela n'a fait aucune différence. Tout au plus, cela a-t-il modifié le timing de leur progression à l'intérieur du système universitaire. Pour un groupe non négligeable, en revanche, les événements ont permis de différer le moment de l'élimination scolaire et significativement augmenté leur niveau final de qualification. Ce groupe appartient aux cohortes de naissance qui se trouvaient, au moment des événements de 68, aux étapes les plus sélectives du système universitaire, ce qui correspond en particulier aux cohortes de 48 et 49.

L'analyse du destin des étudiants de 1968 révèle que le surcroît de formation dont a bénéficié ce petit groupe s'est traduit par la suite par des salaires significativement plus élevés et des accès plus nombreux aux fonctions d'encadrement. Pour ceux de ces étudiants devenus pères, les effets se sont même transmis à la génération suivante puisqu'il est montré que leurs enfants ont moins redoublé à l'école (et qu'ils ont été plus souvent en mesure de sauter des classes). Rapporté au surcroît de formation, le surcroît de réussite professionnelle et familiale observé pour les étudiants bénéficiaires de la désorganisation des examens permet d'évaluer l'effet proprement causal de la formation supérieure sur les destins familiaux, à peu près exactement comme le permettrait un protocole vraiment expérimental. Il s'avère que cet impact est important, plus important que ce que laissent imaginer les évaluations non-expérimentales habituellement utilisées.

Le relâchement des examens en Mai 1968 est homologue à une expérience de laboratoire permettant d'évaluer les effets d'une formation universitaire pour les personnes qui, en temps ordinaire, seraient restées aux portes de l'université. Le fait que cet impact soit aussi particulièrement élevé et persistant à travers les générations est un argument de poids pour ceux qui aujourd'hui militent pour une expansion nouvelle de notre enseignement supérieur.

➔ Il convient aussi d'être averti d'une tendance récente, vers un « néo-sélectionnisme » qui a récemment conquis des positions dans les rangs de ceux-là mêmes qui, traditionnellement, refusaient tout malthusianisme éducatif. À ce propos, dans un article informé, le philosophe Frédéric Neyrat écrit ceci (« Le retour du sélectionnisme », *Les Temps Modernes*, mars-juin 2006, pp. 364-392).

Les accents antisélectifs... du nouveau sélectionnisme

Classiquement, ses partisans justifiaient la sélection, qu'elle soit à l'entrée de l'université ou en cours de cursus, en termes méritocratiques. Pour les conservateurs, comme pour les militants de l'École libératrice, la sélection scolaire était rationnelle, puisque sanctionnant les seuls dons scolaires. Le nouveau sélectionnisme n'exalte plus le don, il ne semble pas remettre en cause, comme c'était le cas dans le passé, l'égalitarisme. À front apparemment renversé, il dénonce la sélection qui s'opère à l'université, via l'échec en premier cycle. C'est l'idée que le système ouvert, puisque ne sélectionnant pas à l'entrée, serait en réalité très sélectif. Il s'y pratiquerait une sélection sauvage […], à laquelle seraient soumis les étudiants les plus démunis socialement, « échoués » […] à l'université, « malgré nous » […] des études longues. Et d'insister sur le coût psychologique de cet échec : c'est la thématique du marché de dupes. Et d'affirmer parfois, en usant d'une métaphore productive, qu'aucune entreprise ne pourrait accepter un tel taux de rebuts, de pièces mal usinées. Une analogie bien mal venue, en tant qu'elle dénie l'humanité de ces étudiants, sur le sort desquels les sélectionnistes font pourtant mine désormais de s'épancher. À l'inverse, le système sélectif serait venu à bout de l'échec, la grande majorité des étudiants de ces filières sortant finalement diplômés. D'où cette double conclusion : c'est l'Université qui produit l'échec, c'est l'absence de sélection qui l'explique…

……………………………………………………………………………………………………

On le voit, les sélectionnistes imputent l'échec (sélection sourde, insidieuse) à l'absence de sélection à l'entrée, en omettant d'évoquer toutes les raisons qui peuvent l'expliquer. Il faut pourtant revenir sur cet échec pour constater d'abord qu'il n'a pas l'ampleur et le sens que l'on veut bien dire : en particulier, il n'est pas, la plupart du temps, relégation définitive. Si le taux de réussite au DEUG, en deux ans, peut paraître effectivement réduit, qui s'établit en 2001 à 45,5 % […], peut-on parler d'échec dans ce que le terme a de définitif, alors qu'avec une année supplémentaire 21,1 %, par exemple, des étudiants obtiennent ce titre et qu'au bout des cinq ans ce seront 76,3 % des étudiants entrés à l'université qui l'auront validé. Ne mettre en avant que le taux de réussite en deux ans, comme le font fréquemment les sélectionnistes, c'est nier le droit à l'erreur, à la seconde chance, droit dont usent sans doute davantage les familles, lorsque l'on s'élève dans la hiérarchie sociale […]. Et un parcours plus lent dans le premier cycle ne signifie pas forcément une moindre réussite ultérieure. Il est piquant de voir ceux qui, pour remettre en cause la cohérence des cursus, ne jurent que par l'individualisation des parcours, ou en amont de l'université, le respect des rythmes de l'élève, ne pas admettre ici qu'il puisse y avoir des trajectoires plus ou moins rapides.

Extrait 4

• Que peut faire le professeur en tant que tel ? Même si ce n'est certes pas le seul cas qui donne un rôle au professeur de mathématiques, restons ici dans le cas emblématique de l'entrée en 1re S lorsque les résultats de l'année de 2de obtenus jusque-là ne plaident pas en sa faveur selon les critères ***usuels***.

➔ En tant que participant à la décision d'orientation, le professeur peut, lorsque les résultats ne parlent pas d'eux-mêmes, décider soit de soutenir la demande de l'élève, soit de lui refuser son soutien (sans pour autant s'*opposer* au passage demandé). Sur quelle base peut-il décider de le soutenir, qui aille au-delà des résultats (on les suppose non complètement convaincants) et au-delà aussi de l'estimation à l'intuition de son « potentiel » (comme le dit la question 1) ?

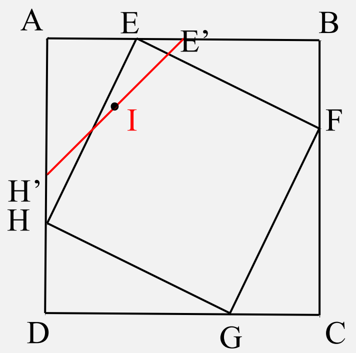
➔ Un dispositif pertinent consiste à passer ***contrat*** avec l'élève pour les mois à venir afin que, nonobstant ses difficultés ***passées***, il s'engage à faire la preuve de sa capacité à investir de manière visible et efficace (en termes de résultats) l'étude des mathématiques telle que le professeur la conduit. Les signes ainsi attendus seront pour le professeur les éléments lui permettant d'apporter son soutien – qu'il renoncera à accorder si de tels signes sensibles font défaut.

➔ Pour permettre à l'élève de remplir clairement son contrat, le professeur pourra, à partir d'une certaine période, pratiquer un enseignement ***spécifié*** – qui ménage des « poches » étudiées pour les différentes « espèces » d'élèves – ici, ceux désireux d'aller en 1re S notamment. Cette spécification ne saurait être que ***à la marge*** d'un enseignement par ailleurs conçu et réalisé pour être ***diversifié***. Pour illustrer le mécanisme de spécification, on reproduit ci-après un passage des notes de la séance 22 du Séminaire 2002-2003.

① La spécification de l'enseignement prodigué permet en principe de prendre en charge de manière appropriée les besoins de certains groupes d'élèves, notamment par la ***modularité des travaux*** qui y sont proposés, c'est-à-dire par le fait ***de retrancher, d'ajouter, de substituer telle ou telle tâche à telle autre dans le travail demandé***. Ce principe peut en vérité être appliqué dans l'ensemble de l'espace didactique, chaque fois du moins qu'il ne risque pas de nuire à la cohésion de la classe.

② En travail hors classe, ainsi, on pourra envisager l'étude modulaire suivante, où la question 3 est proposée à l'intention des seuls élèves visant la 1re S (et peut faire l'objet d'une évaluation à part, en vue de constituer, avec les appréciations obtenues sur les autres questions de même statut, un indicateur complémentaire en vue de la décision d'orientation vers la 1re S) :

Soit un carré ABCD de 8 cm de côté. Sur les segments [AB], [BC], [CD], [DA] on place les points E, F, G, H tels que AE = BF = CG = DH = x.



On rappelle que le quadrilatère EFGH est un carré. On cherche pour quelle valeur de x ce carré est d'aire minimale.

1. Que vaut l'aire de EFGH lorsque $x = 0$? Lorsque $x = 8$? Lorsque $x = 4$?

2. Montrer qu'on a : $2\mathcal{A}_{AEH} = 16 - (4-x)^2$. En déduire que l'aire du carré EFGH est minimale lorsque $x = 4$.

La question 3 ne concerne que les élèves visant une 1re S.

3. Soit E' et H' les milieux de [AB] et [AD], et soit I le milieu de [E'H']. Retrouver le résultat précédent en montrant, par des considérations géométriques d'aires, que l'on a : $\mathcal{A}_{AEH} \leq \mathcal{A}_{AE'H'}$.

5. L'utilisation d'un tel dispositif suppose que les élèves ayant déclaré leur intention d'orientation s'engagent dans un ***contrat*** simple et clair relatif au complément de travail attendu (et accepté) par le professeur, ainsi qu'aux conditions de ce travail – par exemple quant au fait que, ***en certains cas***, il pourra ne faire l'objet, de la part du professeur, que de corrigés écrits, et non de corrections *in praesentia*, cela afin de ne pas empiéter sur le temps d'enseignement commun à tous. Mais cette restriction même peut être

relâchée dès lors qu'on exploite adéquatement les ***modules***, types de SDA sur lequel on revient rapidement maintenant.

• Ce qui précède peut bien sûr être étendu à d'autres poursuites d'études que celle considérée jusqu'ici.

La suite des matéraux de réponse à cette question est à étudier en autonomie.

II. Pour terminer, nous examinerons comment donner des éléments de réponses à la troisième question.
1. On notera d'abord qu'il y a 3 h de mathématiques en 1re STG comme en 1re ES, mais que l'on peut prendre une option « mathématiques » en 1re ES qui ajoute 2 h supplémentaires, ce qui n'est pas le cas en 1re STG ; qu'en classe de terminale, il y a de manière obligatoire 3 h en terminale STG (2 h pour l'une des spécialités) contre 4 h en terminale ES. Les premiers éléments de comparaison peuvent être trouvés dans le programme des deux classes. On les trouvera sur le site Eduscol et on donnera ici seulement certaines indications.

2. On remarquera que, même si la structuration en domaines est un peu différente, ce sont les mêmes secteurs qui sont étudiés : information chiffrée, statistique, probabilités, algèbre, suites et fonctions. En considérant le secteur des fonctions, une différence majeure saute aux yeux : le programme de la série STG reprend une bonne partie du programme de la classe de seconde relatif au domaine « Calcul et fonctions » et certains thèmes qui figurent au programme de la série ES ne figurent pas au programme de la série STG : on citera notamment la résolution d'une équation du second degré par le discriminant, la notion de fonction dérivée qui ne sera étudiée qu'en terminale pour la série STG ainsi que le comportement asymptotique, la notion de limite étant hors programme de la classe de 1re STG. On peut encore voir que l'exigence de justification déductive pèse moins dans la série STG que dans la série ES, ou encore que la série STG comprend du travail avec le tableur.

3. Pour aller plus loin, on pourra examiner le dernier sujet de baccalauréat de chacune des deux séries (disponible sur le site SIEC, rubrique Annales). On notera d'abord que 3 exercices sont proposés à la série ES: un exercice sous forme de QCM portant sur le domaine des fonctions en deux parties, la deuxième partie demandant les justifications des réponses apportées, un exercice de probabilités et enfin un exercice en deux parties portant l'une sur la statistique (régression linéaire et exponentielle), l'autre sur l'étude du modèle exponentiel fourni par la première partie (domaine des fonctions). Pour la série STG 4 exercices sont proposés : un QCM sur le domaine des fonctions mais ne demandant pas de justifications, un exercice de probabilités, un exercice sur l'exploitation de l'information chiffrée (calcul d'indice notamment) et enfin un exercice en deux parties, l'une étudiant une régression linéaire, la seconde une modélisation par une suite géométrique où on remarquera une question portant sur l'utilisation d'un tableur.
Dans l'ensemble, on retrouve, comme on l'avait noté dans les programmes, une exigence moindre de justification en série STG. On peut également remarquer que les exercices sont plus courts en série STG, couvrant davantage de secteurs, ce qui permet notamment de prendre mieux en compte la diversité.

Modélisation

Prendre les $\frac{5}{6}$ des $\frac{3}{4}$ de 100 euros

$\downarrow$ $\quad\quad$ $\downarrow$ $\frac{5}{6} \times \quad \frac{3}{4} \times 100.$ Comment expliquer la « traduction » : de $\to \times$? (évidemment cela concerne le collège, donc pas de problème avec la phrase « f de x » ?) (5e, 18)   Comment (expliquer) amener l'idée aux élèves que prendre par exemple $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ cela revient à multiplier ces quantités ? (5e, 17)

Expliquer, on l'a déjà dit, ça n'est pas faire un discours, c'est engager les élèves dans une AER qui fasse émerger l'élément technologique et au moins une pratique enjeu de l'étude.

Ici, on considère une grandeur g d'une espèce de grandeur donnée, les masses par exemple. On cherche à déterminer la mesure des quatre cinquièmes de cette grandeur. Considérons par exemple la situation suivante.

Une recette d'un gâteau au chocolat demande que l'on prenne quatre des 5 barres d'une tablette de 200 grammes de chocolat. Pierre n'a pas de tablette de chocolat, mais du chocolat sous forme de petites pastilles. Comment peut-il déterminer la quantité de chocolat à mettre dans le gâteau ?
En fait, Pierre fait une recette prévue pour 4 œufs et il n'en a que 3. Outre le chocolat, il était prévu 100 grammes de sucre, 170 grammes de farine et 11 grammes de levure. Quelle quantité de chaque ingrédient doit-il utiliser ?

Une technique pour répondre à la première question consiste à utiliser le modèle de proportionnalité, en « réduisant à l'unité » : si 5 barres pèsent 200 grammes, une barre pèse 200 g/5 = 40 g ; 4 barres pèseront donc 4 fois plus soit 4×200 g/5 = 4×40g = 160 g.
La même technique permet d'obtenir la réponse à la deuxième question ; si l'on suppose que l'OM relative à la multiplication des fractions a déjà été construite, on peut également utiliser le fait que pour passer de 4 œufs à 3 œufs, il faut multiplier par 3/4, et donc utiliser le modèle de proportionnalité pour obtenir les quantités cherchées en multipliant par 3/4.

Supposons maintenant une situation du même type formulée de la façon suivante :

Pierre doit faire un gâteau dont les ingrédients sont les suivants : 160 grammes de chocolat, 3 œufs, 100 grammes de sucre, 170 grammes de farine et 11 grammes de levure. La recette est prévue pour un moule de diamètre 24 cm, et il est précisé que, dans le cas où on n'a qu'un moule de 20 cm, il faut prendre les cinq sixièmes des quantités données.
Déterminer les quantités de chaque ingrédient que Pierre, qui ne dispose que d'un moule de 20 cm de diamètre, doit utiliser.

Considérons le chocolat. Prendre les cinq sixièmes de 160 grammes, c'est prendre cinq fois un sixième de 160 grammes. Or un sixième de 160 grammes, c'est la grandeur qui multipliée par 6 donne 160 grammes : c'est donc, d'après ce qui a été étudié en 6e, $\frac{160\ g}{6}$; on est donc conduit à prendre $5 \times \frac{160\ g}{6}$, soit encore $5 \times \frac{1}{6} \times 160\ g$ qui est encore égal à $\frac{5}{6} \times 160\ g$.

Les explications recherchées tiennent ainsi dans des situations qui mobilisent adéquatement des éléments technologiques pertinents. On notera à cet égard que les dits éléments technologiques sont explicités dans le document d'accompagnement des programmes de collège sur les nombres dont on trouvera un extrait ci-dessous.

L'usage des fractions se diversifie au collège, en même temps que le sens de l'écriture fractionnaire s'élargit. À l'école primaire, les fractions sont introduites en vue d'aider à la compréhension des nombres décimaux : des fractions simples sont d'abord utilisées (dénominateur égal à 2, 3, 4...), mais ce sont les fractions décimales qui sont véritablement visées de façon à pouvoir interpréter, par exemple, 2,405 comme $2+\frac{4}{10}+\frac{5}{1000}$ ou comme $2+\frac{405}{1000}$. Dans ce but, les fractions sont définies en référence au partage de l'unité, soit dans des situations de mesure (longueurs, aires...), soit dans des situations de repérage de points sur une ligne graduée régulièrement. Une fraction comme $\frac{7}{4}$ évoque ce qui est obtenu en partageant l'unité en 4 parts égales et en reportant 7 de ces parts, ce qui correspond d'ailleurs à la lecture sept quarts ($\frac{7}{4}$ c'est 7 fois le quart de l'unité).

Au collège, dès la classe de sixième, l'écriture fractionnaire prend également une autre signification : $\frac{7}{4}$, c'est le quart de 7 (donc représentée en reportant l'unité 7 fois, puis en partageant ce qui est obtenu en 4 parts égales), c'est aussi le nombre qui multiplié par 4 donne pour résultat 7. (...)

J'ai commencé le chapitre sur les équations en 3^{e} ; le programme aborde les inéquations, plus particulièrement les problèmes mettant en jeu les inéquations, ainsi que les systèmes d'équations. Je me suis aperçu qu'une majorité de la classe n'avait pas vu les équations en 4^{e} ; chose vraie après vérification auprès des enseignants concernés. Puis-je de ce fait réaliser une activité (qui serait niveau 4^{e}) avec eux pour leur introduire les équations. (5^{e}, 4^{e} & 3^{e}, 20)

1. On notera d'abord ce que la situation a d'anormal. Voici ce que contient le programme de 4^{e} à propos de la notion d'équation :

Connaissances	**Capacités**	**Exemples d'activités, commentaires**	**Commentaires spécifiques pour le socle**
Dans les trois premières colonnes, une phrase ou une partie de phrase en italiques désigne une connaissance, une capacité ou une activité qui n'est pas exigible dans le socle. Si cette expression en italiques est précédée d'un astérisque, elle se rapporte à un exigible du socle dans une classe ultérieure.			
Résolution de problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue	*- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.*	*Les problèmes issus d'autres parties du programme et d'autres disciplines conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution. À chaque fois sont dégagées les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.* *Le choix des problèmes doit faire l'objet d'une attention particulière. Des situations qui aboutissent à une équation du type $ax + b = cx + d$ permettent de mettre en évidence les limites des méthodes de résolution arithmétique ou par essais et ajustements et de faire percevoir l'intérêt de la méthode de résolution algébrique.* Tous les problèmes aboutissant à des	La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun. Néanmoins, les élèves, dans le cadre du socle, pourront être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.

		équations produits, du type $(x-2)(2x-3) = 0$ sont hors programme.	

Si la résolution d'une équation du premier degré n'est pas un exigible du socle commun, ce type de tâches figure ainsi clairement au programme de la classe de 4e, de même qu'il doit y être rencontré et travaillé systématiquement dans le cadre de situations dont la modélisation conduit à une équation du premier degré. Les professeurs de 4e en cause ici n'ont pas rempli leur mission d'instruction, non seulement en privant les élèves de l'étude d'un savoir que la nation a décidé utile au citoyen mais encore en leur créant des conditions qui handicape leur scolarité future.

2. La difficulté rencontrée appelle effectivement une réponse en termes d'organisation de l'étude. Cette réponse dépend d'un certain nombre de facteurs parmi lesquels on citera : la proportion d'élèves de la classe pour lesquels les professeurs de 4e n'ont pas rempli leur mission d'instruction, les ressources en systèmes didactiques auxiliaires dont peut disposer le professeur (soutien, PPRE, notamment), les thèmes qui ont été antérieurement traités. Nous poursuivrons cette étude lors de la prochaine séance.

2. Notice éducation mathématique et citoyenneté

Faute de temps, la suite de la notice Éducation mathématique et citoyenneté est à étudier en autonomie. Une nouvelle notice est distribuée, intitulée Questions et Réponses. Elle est à étudier pendant les vacances.

3. Recherches dans les Archives

a) Une première recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant aux **techniques de correction des devoirs** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Je vois naître dans ma classe de l'agitation, mais seulement à un moment précis, en correction d'exercices. Ma méthode, pour l'instant, c'est de les faire passer au tableau, c'est peut-être trop « long ». Quels dispositifs me proposeriez-vous pour capter leur attention un peu plus... ? Je trouve ça dommage car je trouve que cela permet une bonne implication. (11)

2. En troisième, j'ai du mal à tenir la classe lorsque l'on fait des séances entières de correction d'exercices cherchés à la maison. J'ai un sentiment d'impuissance pesant... (17)

3. Concernant les devoirs surveillés et le bilan de fin de trimestre, peut-on utiliser les photocopies pour la correction avec certaines explications faites au tableau ou doit-on impérativement tout corriger au tableau ? (11)

4. Moi, j'ai du mal à faire une correction de devoir surveillé en classe (avec la classe) car ceux qui ont plus de 16 ne se sente pas obligés de suivre (sauf s'ils sont interrogés) et ceux qui ont moins de 5 ne s'y intéressent pas du tout, ils se disent que c'est du passé. J'ai du mal à diriger tout le monde en même temps... Alors, comment faire une correction adaptée, qui apporterait quelque-chose à tout le monde ? (9)

• Cette recherche est confiée au binôme formé de Nelly Bofelli et Samuel Der Monsessian. ***Son exposé est reporté à la prochaine séance.***

b) Une deuxième recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* sur l'**enseignement des vecteurs** en classe de 2^de ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Je n'arrive pas à concevoir une organisation didactique sur le chapitre « vecteurs du plan » en seconde, car c'est une reprise de l'étude, les nouvelles notions étant la colinéarité , l'alignement et la caractérisation du milieu. Ces différentes notions sont assez « intuitives » donc comment organiser une AER intéressante avec des moments de l'étude qui soient constructifs pour la classe et que cette AER ne soit pas « un exercice avant la synthèse »! (16)

2. Concernant la multiplication d'un vecteur par un réel, le programme stipule : « un repère étant fixé, exprimer la colinéarité de deux vecteurs ou l'alignement de trois points ». Le programme d'accompagnement qu'une fois la définition - indépendante du repère - de la multiplication d'un vecteur par un réel donnée, on n'utilisera le calcul vectoriel que pour justifier le calcul de coordonnées... Ma question : pour déterminer si, des points dont les coordonnées dans un repère sont données, sont alignés, il faut faire un gros travail sur la construction de la somme de vecteurs ; est-ce grave si pour faire émerger la multiplication d'un vecteur par un réel et les propriétés algébriques je prends plus de temps que sur le travail des vecteurs avec les coordonnées ? (18)

3. Je prépare mon cours sur les vecteurs. Il est précisé dans le programme que la colinéarité des vecteurs et l'alignement de trois points sont étudiés « un repère étant fixé ». Mon PCP tient à ce que je fasse du calcul vectoriel sans faire intervenir les coordonnées. Quels sont les avantages et les inconvénients à séparer calcul vectoriel et géométrie analytique ? (9)

4. Mes élèves rencontrent de grosses difficultés avec la notion de vecteur. Ils perçoivent les vecteurs comme des objets fixes avec une origine fixe. J'ai essayé de parler de déplacement avec les translations mais sans réel succès. Comment remédier à ce problème ? (13)

5. Le programme de seconde concernant les vecteurs insiste sur le repérage sur un réseau carré ou rectangulaire, sur les plans ou les cartes. Quels sont les types de tâches visés ? Si possible, un exemple d'activité. (18)

• Cette recherche est confiée au trinôme formé de Matthieu Bruno, Renaud Cortinovis et Sylvain Samat.

4. Questionnaire d'évaluation

a) Le temps restant est passé à répondre individuellement au questionnaire suivant :

Question 1a. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.

Question 1b. Indiquez *un* aspect de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

Question 2a. Indiquez *un* aspect de votre *travail personnel* dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît plutôt *positif*.

Question 2b. Indiquez *un* aspect de votre *travail personnel* dans le cadre de la formation proposée qui vous paraît actuellement plutôt *négatif*.

b) Chaque participant remplit individuellement la fiche qui lui a été distribuée pendant les vacances et la remet au tuteur de GFP le 5 mai 2009..

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 23 : mardi 5 mai 2009

Programme de la séance. 1. Évaluation et développement – TD 5 // 2. Forum des questions // 3. Notices // 4. Recherches dans les archives

Prochaine (et dernière) séance de séminaire, le mardi 19 mai.
Pour la séance de TD qui suivra cette séance, on demande aux participants de porter leurs ordinateurs portables.

1. Évaluation et développement – TD 5

1.1. On reprendra d'abord ici le travail qui était à effectuer. (Voir TD 5)

1.2. Pour travailler le développement du guide d'AER nous examinerons deux travaux qui ont été remis par courriel.

Voir le fichier des travaux sur Espar.

Commentaires oraux sur les travaux

1.3. Développement à partir de la deuxième proposition en intégrant les points positifs de la première.

Que pouvez-vous dire de ces couples de fonctions ?
Certaines ont des représentations graphiques qui se ressemblent.

Lesquelles et pourquoi ?
f_1 et f_2; f_7 et f_8; f_5 et f_6. Leurs représentations graphiques ont la même forme. La représentative de la fonction f_1 est la même à une translation près que celle de la fonction f_2 …

Comment en être sûr ?
En déplaçant une des courbes, on doit arriver à les superposer. On peut aussi utiliser le tableur pour vérifier.

Lesquelles peut-on en effet superposer ? *Les élèves utilisent GeoGebra.*
Les représentations graphiques de f_1 et f_2; f_7 et f_8. Mais celles de f_5 et f_6 ne se superposent pas. *(Vérification avec le tableur)*.

Quand on superpose f_7 et f_8 on obtient f_8 sous la forme f_7 + 1. Est ce que c'est généralisable à d'autres couples ? l'examen des couples permet d'obtenir que $f_2 = f_1 + 3$

Peut-on constituer d'autres couples de fonctions superposables ?

On a $f_7(x) = -\frac{2}{3x}$, $f_{10}(x) = \frac{3}{x}$

On peut tracer $g(x) = \frac{2}{3x}$, $h(x) = -\frac{3}{x}$. *Les élèves les tracent à l'aide de GeoGebra.*

Les élèves déplacent les courbes des fonctions f_7, f_{10}, g, h *pour voir s'ils peuvent les superposer avec d'autres.*

Oui, on arrive à superposer la courbe de f_7 ($f_7(x) = -\frac{2}{3x}$) avec celle de f_8 ($f_8(x) = \frac{3x-2}{3x}$), celle de h ($h(x) = -\frac{3}{x}$) avec celle de f_4 ($f_4(x) = \frac{3x}{x+1}$).

Remarque : les fonctions dont les courbes représentatives peuvent se superposer n'ont pas forcément le même dénominateur.

Que se passe-t-il pour l'expression algébrique de ces fonctions lorsqu'on déplace leurs représentations graphiques ?

Leur expression algébrique change sur GeoGebra. f_7 devient $\widetilde{f_7}(x) = -\frac{2}{3\,x} + 1 = \frac{-\frac{2}{3}}{x} + 1$

h devient $\tilde{h}(x) = -\frac{3}{x+1} + 3 = \frac{-3}{x+1} + 3$.

Fin du travail collectif. La suite sera retravaillée et insérée dans les notes du séminaire ultérieurement.

2. Forum des questions

Les équations en 3^e^ sans étude antérieure en 4^e^

J'ai commencé le chapitre sur les équations en 3^e ; le programme aborde les inéquations, plus particulièrement les problèmes mettant en jeu les inéquations, ainsi que les systèmes d'équations. Je me suis aperçu qu'une majorité de la classe n'avait pas vu les équations en 4^e ; chose vraie après vérification auprès des enseignants concernés. Puis-je de ce fait réaliser une activité (qui serait niveau 4^e) avec eux pour leur introduire les équations. (5^e, 4^e & 3^e, 20)

1. On rappellera que nous avons remarqué lors de la dernière séance ce que la ***situation*** signalée a d'***anormal*** : si la résolution d'une équation du premier degré n'est pas un exigible du socle commun, ce type de tâches ***figure*** ainsi clairement ***au programme de la classe de 4^e^,*** de même qu'il doit y être rencontré et travaillé systématiquement dans le cadre de situations dont la modélisation conduit à une équation du premier degré. La difficulté rencontrée appelle effectivement une réponse en termes d'organisation de l'étude. Cette réponse dépend d'un certain nombre de facteurs parmi lesquels on citera : la proportion d'élèves de la classe pour lesquels les professeurs de 4^e^ n'ont pas rempli leur mission d'instruction, les ressources en systèmes didactiques auxiliaires dont peut disposer le professeur (soutien, PPRE, notamment), les thèmes qui ont été antérieurement traités. Nous poursuivrons cette étude en donnant d'abord quelques indications sur la situation effective.

2. Voici les thèmes antérieurement traités au cours de l'année :
Outils pour le calcul : calculs fractionnaires, puissances ;
Géométrie : Application du théorème de Pythagore. Le théorème de Thalès et sa réciproque ;
Arithmétique : nombres premiers et PGCD ;

Trigonométrie ;
Factorisations développements Identités remarquables Équations produits ;.
Géométrie dans l'espace Sections Agrandissements et réductions. La sphère.

On notera que, parmi eux, figure un thème de calcul littéral dans lequel les équations sont, légitimement, mentionnées puisqu'elles permettent notamment de fonctionnaliser une partie du calcul algébrique : il paraît étonnant qu'un test d'entrée n'ait pas alors révélé l'affaire...

Le professeur a « effectué une activité sur les équations puis une sur les inéquations afin de faire émerger les principales propriétés », mais il a « peu insisté sur cela afin d'effectuer le point fort du programme sur ce thème c'est à dire la résolution de problèmes ».

3. Il est effectivement indispensable, dans la situation décrite où plus de la moitié des élèves n'ont pas étudié le thème en 4e, de passer du temps dans le SDP à étudier ce qui figure au programme de cette classe, mais sans dépenser trop de temps de manière à ne pas obérer l'étude de ce qui figure au programme de la classe de 3e. À cet égard, si l'on examine ce qui figure dans le programme de 3e, voici ce que l'on trouve à propos des équations :

Connaissances	**Capacités**	**Exemples d'activités, commentaires**	**Commentaires spécifiques pour le socle**
Dans les trois premières colonnes, une phrase ou une partie de phrase en italiques désigne une connaissance, une capacité ou une activité qui n'est pas exigible dans le socle.			
Factorisation	- Factoriser des expressions algébriques dans lesquelles le facteur est apparent.	Les travaux se développent dans trois directions : - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; *- utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes ;* *- utilisation pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).* *Les activités visent la maîtrise du développement ou de la factorisation d'expressions simples telles que :* $(x+1)(x+2)+5(x+2)$, $(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)$, $(x+1)^2+x+1$.	
Identités remarquables	- Connaître les identités: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ *- Les utiliser dans les deux sens sur des exemples numériques ou littéraux simples.*	La reconnaissance, dans une expression algébrique, d'une forme faisant intervenir une identité remarquable est difficile pour certains élèves. Un travail spécifique doit donc être conduit à ce sujet, dans des situations où le passage d'une expression à une autre est justifié, *par exemple dans le cadre de la résolution d'équations ou dans certaines démonstrations.*	Dans le cadre du socle, les élèves connaissent l'existence des identités remarquables et doivent savoir les utiliser pour calculer une expression numérique ou transformer une expression littérale du premier degré à une inconnue. Aucune mémorisation des formules n'est exigée.
2.4. Équations et inéquations du premier degré			La notion d'équation ne fait pas

Problèmes du premier degré : inéquation du premier degré à une inconnue, système de deux équations à deux inconnues	*- Mettre en équation un problème.* *- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques ; représenter ses solutions sur une droite graduée.* *- Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.*	*Il est indispensable dans toute cette partie de ne pas multiplier les exercices systématiques de résolution sans référence au sens d'un problème.* *Comme en classe de quatrième, les différentes étapes du travail sont identifiées à chaque occasion : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.* *La représentation graphique des fonctions affines est exploitable dans trois directions :* *- vérifier la vraisemblance d'une solution obtenue algébriquement ;* *- donner une solution graphique évidente et la vérifier algébriquement ;* *- donner une solution approchée, précédant une éventuelle résolution algébrique.*	partie du socle commun. Néanmoins, les élèves, dans le cadre du socle, peuvent être amenés à résoudre des problèmes du premier degré.
Problèmes se ramenant au premier degré : équations produits	*- Résoudre une équation mise sous la forme A(x).B(x) = 0, où A(x) et B(x) sont deux expressions du premier degré de la même variable x.*	*L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est hors programme.*	

On peut remarquer d'emblée que les fonctions affines sont citées dans la colonne des commentaires, et cela suggère une technique « en deux étapes », l'une expérimentale s'appuyant sur la représentation des fonctions affines, l'autre algébrique qui déduise les résultats obtenus de la TAD (théorie algébrique disponible). Dès lors, le travail de reprise de ce qui a été fait en 4^e^ pour augmenter la technique de cette étape expérimentale est au programme de la classe de 3^e^, et une stratégie pour ne pas dépenser trop de temps tout en faisant le travail nécessaire est de fabriquer d'emblée ici cette technique en partant d'un problème se modélisant par une équation du type $ax+b=cx+d$. Compte tenu des thèmes déjà abordés, on peut partir d'un problème de géométrie ou plus classiquement d'un problème arithmétique du type « le nombre d'Alice et Bertrand » (Alice et Bertrand partent d'un même nombre, effectue chacun un programme de calcul « affine » et trouve le même résultat ; peut-on retrouver le nombre dont ils sont partis ?) dont on peut voir une scénarisation pour la classe de 4^e^ sur le site educnet : http://www.educnet.education.fr/canal-educnet/?direct=124. Au lieu d'utiliser un système de calcul formel, on pourra ici utiliser la représentation graphique des fonctions affines et donc Geogebra par exemple. Bien entendu cela suppose que l'on ait au préalable anticipé la relation entre équations et fonctions affines et que la programmation de l'étude ait été établie en conséquence, ce qui n'était pas le cas ici.

Plus généralement, on pourra enquêter en début d'année auprès des collègues de l'établissement qui ont eu les élèves de la classe lors de l'année scolaire précédente pour anticiper ce type de problèmes.

En 4e, comment expliquer la différence entre théorème, proposition et propriété ?(4e, 21)

L'initiation des élèves à la pratique du raisonnement est l'un des attendus du cours de mathématiques. Or, je m'aperçois que mes élèves, même les meilleurs ne sont pas intéressés par la nature logique des démonstrations. Pour eux, une preuve consiste à faire une vérification sur un exemple. Peut-être est-ce dû à la forme actuelle des livres scolaires : on énonce une propriété et on l'illustre seulement par un exemple. On s'attache à l'utilisation plus qu'à la déduction des résultats. Serait-ce une solution de présenter systématiquement des contre-exemples ou des situations paradoxales pour donner de la valeur aux preuves ? (2de, 21)

1. On notera d'abord qu'il y a entre le choix de « propriété » et celui de « théorème » une ***différence de signification,*** qu'il est certes important d'entendre et de faire entendre. En vérité, le « jeu » langagier réunit ***trois*** termes, et non deux. Un objet mathématique possède certaines ***propriétés*** ; ces propriétés doivent être ***formulées*** ou ***énoncées*** : on obtient alors une ***formulation*** ou un ***énoncé*** de la propriété considérée. Un tel énoncé, exprimant une propriété qui aura été établie, éventuellement, de manière ***expérimentale***, pourra alors être ***démontré***, et deviendra ainsi un ***théorème*** de plein droit de la théorie (géométrique, algébrique, etc.) disponible – à moins qu'il n'y soit ***admis*** à titre de théorème ***sans démonstration.***

2. La relation entre propriété, énoncé de la propriété et démonstration de la propriété (atteinte à travers son énoncé) était autrefois explicitée à l'intention des élèves – et des professeurs. Le Séminaire 2005-2006 citait ainsi le passage suivant – qui précise l'usage du mot de théorème – d'un ouvrage de géométrie du niveau du collège, conforme aux programmes de 1947 :

> **Théorème.** De la définition de la figure résulte un certain nombre de propriétés.
> Ces propriétés s'énoncent en propositions appelées théorèmes, dont l'exactitude est établie par un raisonnement ou démonstration.

Les notes du Séminaire se poursuivaient ainsi :

> On notera que les programmes actuels de collège n'utilisent pas le mot « proposition ». Ce mot, utilisé comme synonyme d'énoncé dans ce qui précède, tend, dans les textes mathématiques contemporains, à désigner un théorème certes nécessaire ou utile comme maillon dans l'organisation déductive des connaissances, mais dont la force générative en tant qu'outil technologique de production de techniques est réduite. Ce que le *Dictionnaire des mathématiques* de Lucien Chambadal (Hachette, 1978) exprimait dans les termes suivants :
>
> **proposition**, syn. de *théorème*. En pratique, le mot *théorème* est réservé aux résultats d'une grande importance, de démonstration parfois difficile ou fort longue. Les propositions rassemblent des résultats faciles, ou n'ayant qu'un intérêt technique.
>
> 6. Une propriété reconnue et utilisée dans une classe de collège (et au-delà) n'est pas *a priori* un théorème *stricto sensu* : c'est d'abord ***un fait*** (spatial, numérique, algébrique, etc.) ***tenu pour vrai*** (ou pour très hautement vraisemblable), et, le cas échéant, qui sera intégré à ce titre dans la ***théorie disponible***, où il devrait figurer alors ***en toute rigueur à titre d'axiome***. Parler de propriété c'est mettre l'accent sur… la propriété, en « oubliant » volontairement ou non son ***statut théorique*** – il peut s'agir d'un résultat expérimentalement sûr, d'une conjecture très vraisemblable acceptée comme axiome, d'une propriété démontrée. Parler de théorème, c'est, en principe et par contraste, faire allusion au statut de la propriété vis-à-vis d'une certaine théorie mathématique en construction. Ce jeu avec le statut est illustré assez clairement dans les passages suivants – déjà cités – des programmes de collège.
>
> On prendra garde, à ce sujet, de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes.
>
> La symétrie centrale et les propriétés caractéristiques du parallélogramme permettent de démontrer ces théorèmes.

Ce qu'il est donc essentiel de faire vivre aux élèves dans la classe, c'est cette distinction entre un fait mathématique (une propriété donc), avéré expérimentalement, et son statut théorique, acquis après démonstration et/ou décision de le verser dans la théorie disponible.
(Commentaire sur le fait que l'on démontre en exercice une foule de propriétés que l'on ne verse pas pour autant dans la théorie).

C'est la constance de l'existence dans la classe de la réalisation d'un moment exploratoire articulé à un moment technologico-théorique, moments développés de façon à donner du topos aux élèves et qui fassent droit à ces deux pôles du travail mathématique (expérimentation, théorisation) qui permettra de dépasser les difficultés signalées dans les deux questions précédentes. (Développement oral) On notera en outre que faire entendre cette distinction est une exigence essentielle d'une éducation citoyenne comme le souligne la notice Éducation mathématique et citoyenneté.

Unités dans les calculs : la mesure des angles

A propos du calcul avec les unités, comment disparaît la mesure d'angles dans le calcul de la vitesse d'un point en rotation ? Formule : $V = \omega \times R$, avec V vitesse instantanée (mm/s), ω vitesse uniforme (rad/s) et R rayon de la rotation (mm). (2de, 20)

Voici par exemple ce que l'on trouve sur un site suisse (http://bdp.ge.ch/webphys/apprendre/connaitre/vitang.html)

Vitesse angulaire
Le vecteur vitesse angulaire d'un point en mouvement circulaire est le taux de variation du vecteur angle par rapport au temps

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{Unités : } \left[s^{-1}\right] = \left[\frac{\text{rad}}{s}\right]$$

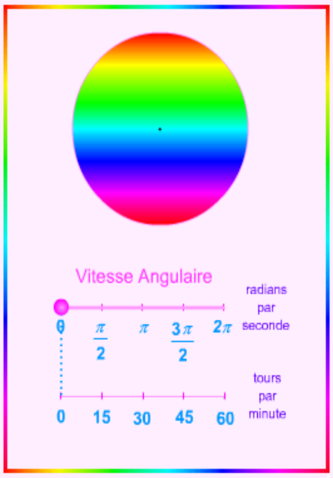
Sa direction est celle de l'axe de rotation. Son sens est donné par le tire-bouchon qui tourne dans le sens du mouvement.

Sa norme est $\omega = \frac{V}{R}$ où R est le rayon de la trajectoire.

Voici, pour préciser, ce qu'explicite un site de physique à destination d'élèves de 1re S (http://chatbleucom.free.fr/Physique/PremiereS/MtRotation/modelepage.php?NomPage=MtRotation4.php)

Vitesse Angulaire

Tous les points du disque (sauf son centre) franchissent des angles égaux pendant la durée de rotation du disque, donc il existe une vitesse commune à tous les point disque : c'est la vitesse angulaire ω du disque définie par :



$$\boxed{\omega = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}}$$ en $rad.s^{-1}$

Où α_2 est l'abscisse angulaire d'un point du disque à l'instant t_2 et α_1 est son abscisse angulaire à l'instant t_1.

Il est plus naturel d'utiliser les "tours" plutôt que les radians dans les problèmes.
Les vitesses angulaires sont exprimées en général en tours par minute : $tours.min^{-1}$

S Exprimer en $rad.s^{-1}$ une vitesse ω donnée en $tours.min^{-1}$.

Manip : Déplacez le curseur vers la droite pour faire tourner le disque à une certaine vitesse angulaire donnée en rad.s-1 et en tours.min-1.

Relation entre la vitesse angulaire d'un système et la vitesse d'un de ses points :

Manip : Appuyez sur le bouton "On" pour faire tourner le disque, les vecteurs vitesse de quatre points du disque sont représentés (de façon informelle).

Plus les points du disque sont éloignés du centre, plus ils parcourent des grandes distances pendant le temps de la rotation et donc plus leur vitesse est grande.

La vitesse d'un point est égale à : $v = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$

Où S_2 est l'abscisse angulaire d'un point du disque à l'instant t_2 et S_1 est son abscisse angulaire à l'instant t_1.

S En utilisant la relation $s=\alpha R$ donnant l'abscisse curviligne s en fonction de l'abscisse angulaire α et de la distance au centre R, exprimer la vitesse angulaire ω en fonction de la vitesse v du point et de R.

Cas général :

La relation entre la vitesse v (en m.s-1) d'un point sur un solide en rotation à la vitesse angulaire ω (en rad.s-1) est donnée par :

$$\boxed{v=R\omega}$$

où R est la distance du point à l'axe de rotation du solide

Dans la formule fournie, on n'a pas « homogénéité » comme disent les physiciens. Il y a donc effectivement une difficulté à élucider, difficulté qui a sans doute un rapport étroit avec la mesure des angles.

Le document d'accompagnement des programmes du collège sur les grandeurs fournit quelques indications sur cette question. En voici un extrait.

> Les angles sont souvent considérés comme des nombres (grandeur sans dimension), la justification s'appuyant sur la relation $l = R\theta$, dans laquelle l désigne la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre θ sur un cercle de rayon R : θ est le rapport de deux longueurs, donc c'est un nombre. Pour expliquer le manque de pertinence de cette justification, un détour par le radian s'impose.
> Pour mesurer un angle (et pas seulement les angles étudiés au collège), on peut penser à mesurer l'arc qu'un angle au centre intercepte sur un cercle. Puisqu'elle dépend de la longueur R du rayon, il est judicieux de choisir une unité de longueur u proportionnelle à R.
> Si on prend u = 2π R, on retrouve le tour. En effet : 1 u = angle plein = 1 tr. On retrouve le degré en prenant u = π/180 R, le grade en prenant u = π/200 R.
> Le choix le plus simple est de prendre u = R. Alors 1 tr = 2π u. u est alors appelé « radian » (noté rad).
> Il en résulte : 1 tr = 2π rad, angle plat = π rad, 1 D = π/2 rad, et les conversions peuvent se traiter comme précédemment, sans devoir recourir à un tableau.
> Revenons sur l'égalité $l = R\theta$. θ y désigne en fait la mesure en radian de l'angle au centre interceptant l'arc de longueur l sur un cercle de rayon R. Si on désigne par α cet angle, alors α = θ rad. Et si on veut écrire une égalité liant l, R, et l'angle α, on est conduit à écrire :
> - soit une égalité de deux nombres, rapports de deux grandeurs de même espèce (longueur et angle) $\frac{l}{R} = \frac{\alpha}{1\ rad}$,
> - soit une égalité d'angle $\alpha = \frac{l}{R}$rad.
>
> La confusion, fréquente en analyse, entre un angle α et sa mesure en radian, ici $\frac{l}{R}$ conduit à faire comme si le radian était le nombre 1. Cette confusion ne prête guère à conséquence chez un utilisateur averti. Mais elle ne saurait justifier l'argumentation présentée au début du paragraphe, puisqu'elle admet dès le départ ce qu'elle voudrait établir (un angle est sans dimension).

L'écueil signalé apparaît assez clairement dans « l'établissement » de la formule sur le site cité précédemment : il est en effet écrit que s, l'abscisse curviligne, est égale à $R\alpha$, où R est le rayon et α l'abscisse angulaire, cette dernière étant alors considérée « sans dimension » au lieu d'écrire, comme le développe le document d'accompagnement que $s = \frac{R\,\alpha}{1\ rad}$.

Donc ici, si R = r mm, on note ρ = R/1 rad et on a V = ω ρ. En fait, on ne multiplie pas par la grandeur R mais par un rapport de deux grandeurs dont l'une est de mesure 1 dans l'unité choisie. Si ω était exprimée en tr s^{-1}, on aurait alors l'expression de V en mm s^{-1}, avec les mêmes notations, donnée par V = 2π ω ρ. Ce qui permet de faire comme si l'on multipliait par la grandeur R, c'est le fait que l'on prend pour unité de mesure des angles le radian qui, on l'a vu, est égal au rayon.

Ressources

Est-ce que la différence entre ressources et savoirs anciens est la suivante : - Ressources : Notions vues pendant l'année ? - Savoirs anciens : Notions vues lors des années précédentes ? (2^{de}, 21)

Le savoir ancien peut-il être considéré comme ressources (je pense que oui) mais quelle distinction fait-on ? (2de, 21)

Une recherche dans les quatre dernières séances de séminaires amènent les occurrences suivantes du terme « ressources » ou « ressource » :

Ce maillage de questions cruciales n'est pas encore suffisant : il faut envisager l'élaboration des réponses par les élèves, ce qui se fait dialectiquement, nous l'avons vu, avec la constitution des questions cruciales, en portant attention aux ressources, notamment en termes de milieu, dont dispose les élèves pour effectuer le travail demandé.

Il appartient au candidat de faire un *choix* de présentation, qui lui permette de mettre en avant ce qui, *de son point de vue*, apparaît le mériter le plus – *par exemple* le fait que, en telle séance de la séquence, l'organisation de l'étude intégrait la conception et la réalisation d'une expérimentation conduite par les élèves réunis en binômes avec telles ou telles ressources de milieu (ordinateurs, Internet, calculatrice, épures, théories déductives, etc.).

❹ Qu'en est-il de la mésogénèse ?
– De quelles ressources didactiques et notamment de quelles ressources mathématiques, de quels moyens déductifs et de quels moyens expérimentaux (calculatrices, logiciels, etc.) les élèves disposent-ils pour accomplir le travail d'étude et de recherche qui leur est demandé ?
– Ces ressources leur permettent-elles de résoudre en quasi-autonomie didactique les problèmes qu'ils ont à affronter ?

❷ La gestion par le professeur de son propre *topos* et du *topos* de l'élève, et en particulier des ressources que celui-ci peut mobiliser, lui permet-elle une prise de décision effective et une action efficace devant les difficultés rencontrées au cours de la séquence ?

Dans ce type de questions, les archives du séminaire s'avèrent une ressource précieuse et, disons-le, irremplaçable.

En revanche, l'expression « savoirs anciens » n'apparaît pas, ce qui n'est pas un hasard. En effet, des savoirs dit « anciens » pouvant être d'une actualité redoutable, les auteurs du séminaire préfèrent signifier l'antériorité de l'étude par les expressions « savoirs antérieurement étudiés » ou plus fréquemment « organisations mathématiques antérieurement étudiées ».
Cela noté, à la question de savoir si ces praxéologies mathématiques étudiées au préalable peuvent être considérées comme des ressources, la collection de citations permet de répondre par l'affirmative, les ressources n'étant pas constituées exclusivement de ces OM.

Voici maintenant pour terminer cette rubrique deux questions portant sur le **C2i2e.**

Je ne comprends pas le travail demandé dans l'item B.2.3. du C2i2e. Puis-je avoir une explication ? (2de, 21)

Je ne comprends pas le travail demandé dans l'item B.3.1. du C2i2e. Puis-je avoir une explication ? (2de, 21,)

Les items en questions sont les suivants :

B.2.3. Intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation.

B.3.1. Conduire des situations d'apprentissage en tirant parti du potentiel des TIC :
– travail collectif, individualisé, en petits groupes ;
– recherche documentaire.

Examinons ce que dit le document Repères et balises (voir les pages de la filières) à ce propos.

Pour l'item B.2.3, on trouve dans le document les notations suivantes :

B.2.3. « Intégrer des outils et des ressources dans une séquence d'enseignement, en opérant des choix entre les supports et médias utilisables et leurs modalités d'utilisation »

a) *Repères*

Activités possibles du stagiaire
– Le stagiaire construit des scénarios pédagogiques utilisant les différents supports existants dont il acquiert progressivement la maîtrise technique.
– Dans ce cadre :
• il met en relation l'utilisation des supports et les besoins liés à différentes situations d'apprentissage ;
• il analyse et justifie les choix opérés.
Pistes possibles pour l'évaluation
Les évaluateurs chercheront à mesurer, en même temps que la maîtrise technique des supports, la pertinence didactique et pédagogique de leur utilisation :
– ils s'appuient sur les conceptions de scénarios de séquences (a minima d'une séance) ;
– ils peuvent également effectuer une évaluation ponctuelle dans le cadre d'une observation de séance ;
– les temps d'analyse de pratiques en présentiel ou sur une plate-forme de formation peuvent également constituer un cadre pour cette évaluation.

b) *Balises*

• Cette compétence peut s'exprimer dans la conception d'un scénario d'AER incluant de façon articulée une exploration numérique à l'aide d'un tableur puis une étude à l'aide du calcul algébrique (à la main) pour confirmer le résultat suggéré par le tableur, travail algébrique dont certaines étapes cruciales sont à leur tour éventuellement contrôlées numériquement à l'aide du tableur.

• Cette compétence peut s'exprimer à travers la conception d'un scénario d'AER incluant l'emploi d'outils différents (logiciel de géométrie, calculatrice, calcul exact à la main, etc.) pour résoudre un problème de géométrie que l'expérimentation graphique ne permet pas de résoudre (exemple : étude du parallélisme de deux droites passant par des points trop éloignés pour pouvoir être représentés sur une feuille au format A4).

• Cette compétence peut s'exprimer à travers la conception d'un scénario d'AER incluant la possibilité de l'emploi d'outils différents (tableur, calculatrice graphique, calcul algébrique, calcul formel, etc.) pour vérifier la solution (de la forme $\forall x\ (x \in I \Rightarrow f(x^*) \geq f(x))$ d'un problème de maximisation élémentaire (exemple : vérification du maximum du volume d'une boîte de conserve cylindrique dont la surface totale est donnée).

• Cette compétence peut s'exprimer à travers la conception d'un scénario d'AER incluant la possibilité de l'emploi d'outils divers (factoriseurs, calculatrices, calcul algébrique, etc.), à rechercher en ligne ou non, pour déterminer certains diviseurs d'un entier donné (exemple : déterminer les facteurs de l'entier $2^{48} - 1$ compris entre 60 et 70).

Commentaires oraux

Pour l'item B.3.1., ne figurent que les repères que voici:

B.3. « Mise en œuvre pédagogique »

B.3.1. « Conduire des situations d'apprentissage en tirant parti du potentiel des TIC : travail collectif, individualisé, en petits groupes ; recherche documentaire »

a) *Repères*

Activités possibles du stagiaire
– Dans le cadre de sa formation et de la construction de séquences d'apprentissage, le stagiaire identifiera et s'appropriera les différentes situations d'apprentissage possibles et il pourra en dresser une typologie argumentée en explicitant pour chacune d'elle le potentiel des TIC.
– Il mettra en place au cours de ses stages en responsabilité des situations d'apprentissage appuyées sur des recherches documentaires et des situations pédagogiques variées.
– Il analysera ses propres mises en œuvre ou, à défaut, des études de cas comme les situations de formations.
Il est important que le professeur stagiaire puisse se confronter aux contraintes d'une utilisation des TICE en classe dans sa pratique en responsabilité comme pour tous les items de ce domaine. Les dérogations à cette règle devront être rares et motivées. Dans ce cas, un travail en binôme ou l'observation d'un des professeurs stagiaires en situation d'utiliser les TICE dans sa classe, devrait permettre cette confrontation.
Pistes pour l'évaluation
– S'agissant de compétences s'inscrivant dans un référentiel métier, l'évaluation portera sur l'analyse critique d'une activité réalisée plutôt que sur l'activité elle-même.
– L'observation directe d'une situation mise en place et l'entretien qui la suit, appuyés sur l'utilisation d'une grille spécifique d'analyse, permettra l'évaluation de cette compétence.
– À défaut, l'évaluation pourra prendre appui sur une étude de cas comme l'analyse d'une séance en classe filmée.
– Dans l'évaluation, on recherchera l'adaptation du dispositif (pédagogique et technique) aux objectifs visés.
– Toutes les personnes effectuant le suivi (formateurs IUFM, conseillers pédagogiques du premier degré et du 2nd degré, maîtres formateurs, directeurs de mémoire…) ont vocation à être évaluateurs.

Voyons collectivement quelles balises pourrait être constituées.

Cette compétence peut s'exprimer à partir de l'analyse et de l'évaluation d'une AER réalisée en classe qui mette en évidence l'adaptation des choix effectués en matière de dispositifs (tableur en demi-groupe, logiciel de géométrie en classe entière, etc.) à l'égard des fonctions didactiques à réaliser (moment exploratoire et/ou technologico-théorique par exemple ici). On pourra se reporter aux exemples signalés dans les balises de la compétence B.2.3 ci-dessus.

Cette compétence peut s'exprimer à partir de l'analyse et l'évaluation d'une séance d'exercices réalisée en classe qui mette en évidence l'adaptation des choix effectués en matière de dispositifs (calculatrice par exemple) à l'égard des fonctions didactiques à réaliser (moment du travail de l'organisation mathématique ici).

3. Notices

Ce volet a été brièvement abordé oralement.

4. Recherches dans les Archives

a) Une recherche dans les *Archives* tentera de répondre à la question suivante :

Que nous disent les *Archives du Séminaire* quant aux **techniques de correction des devoirs** ?

• Le compte rendu de la recherche s'efforcera de présenter les éléments de réponse aux questions de la semaine ci-après éventuellement présents dans les *Archives*.

1. Je vois naître dans ma classe de l'agitation, mais seulement à un moment précis, en correction d'exercices. Ma méthode, pour l'instant, c'est de les faire passer au tableau, c'est peut-être trop « long ». Quels dispositifs me proposeriez-vous pour capter leur attention un peu plus... ? Je trouve ça dommage car je trouve que cela permet une bonne implication. (11)

2. En troisième, j'ai du mal à tenir la classe lorsque l'on fait des séances entières de correction d'exercices cherchés à la maison. J'ai un sentiment d'impuissance pesant... (17)

3. Concernant les devoirs surveillés et le bilan de fin de trimestre, peut-on utiliser les photocopies pour la correction avec certaines explications faites au tableau ou doit-on impérativement tout corriger au tableau ? (11)

4. Moi, j'ai du mal à faire une correction de devoir surveillé en classe (avec la classe) car ceux qui ont plus de 16 ne se sente pas obligés de suivre (sauf s'ils sont interrogés) et ceux qui ont moins de 5 ne s'y intéressent pas du tout, ils se disent que c'est du passé. J'ai du mal à diriger tout le monde en même temps... Alors, comment faire une correction adaptée, qui apporterait quelque-chose à tout le monde ? (9)

• L'exposé de cette recherche, confiée au binôme formé de Nelly Bofelli et Samuel Der Monsessian, .avait été reporté à cette séance.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 24 : mardi 19 mai 2009

Programme de la séance. 1. Notice Questions & Réponses // 2. Question d'entretien : La diversité// 3. Forum des questions // 4. Organisation didactique, une synthèse

1. La notice Questions et Réponses

Il s'agissait de donner deux éléments développés dans la notice qui semblaient importants en justifiant le choix opéré.

Des réponses apportées mettent d'abord en avant le fait que les réponses se construisent dans le temps, avec un processus de déconstruction / reconstruction qu'il s'agit de renouveler « régulièrement », notamment en tant que professeur.

* (extrait du paragraphe 5.2) *D'autre part, en ce qui concerne plus particulièrement les professeurs en formation, ce serait se méprendre lourdement de croire qu'une question professionnelle, même d'apparence anodine, puisse faire l'objet d'une réponse définitive, qui embrasse* **l'ensemble** *des situations concrètes où cette difficulté pourra surgir : de fait, sa résurgence ultérieure ne manquera pas en général de faire apparaître la fragilité du « règlement » allégué ! La première vertu professionnelle, par-delà l'humilité qui en constitue la condition de possibilité, est le courage de tenir toute « réponse », même durement construite, pour* **provisoire***, révisable, promise à être un jour éventuellement proche* **déconstruite** *et* **reconstruite**
J'adhère parfaitement à ce passage de la notice qui représente une des difficultés du métier de professeur. Mais heureusement qu'il n'y a pas de réponses définitives car sinon enseigner deviendrait très vite routinier.

Ce qui m'a paru intéressant c'est le fait qu'une réponse n'est pas définitive, même si elle est anodine (voir 5.2 de la notice) et je crois que dans cette nouvelle profession qui est la nôtre, se remettre en question perpétuellement nous permet d'avancer et d'améliorer notre travail. le simple fait de déconstruire » pour « reconstruire » ne peut être que bénéfique pour notre enseignement.

Certains mettant davantage en avant la technique de construction/déconstruction :

Le premier élément qui me parait important concernent les différentes étapes de construction d'une réponse R(cœur):
- observation des réponses R(poinçon) possible ;
- analyse de ces réponses ;
- évaluation de ces réponses
- publication de la réponse R élaborée R(cœur)

C'est un point que je considère important puisque on se retrouve souvent dans cette situation où l'on doit apporter une réponse à une question. Par exemple « De quelle manière vais-je introduire les fonctions en classe de 2de ? ». En général, on cherche plusieurs activités, manières puis ensuite on « publie » l'activité qui nous parait pertinente.[45]

§6.1 et 6.2 : de l'importance d'identifier les bonnes ressources didactiques
Raisons : j'ai été frappé par l'exemple d'Enigma. J'en ai un autre : durant la première guerre mondiale (?), pour résoudre la question de l'amélioration des communications, les français ont

[45] On notera que l'élève professeur a omis de citer le développement.

mobilisé la science des pigeons voyageurs et les américains, les équations de Maxwell (fondement de l'électromagnétisme).

Un deuxième aspect mis en évidence par les réponses est relatif à l'importance du professeur comme directeur d'étude des questions à étudier, soit du point de vue de l'émergence de la problématicité (certains instant sur le déni de problématicité), soit du point de vue de la dévolution des questions cruciales ou encore du choix des situations problématiques :

« *De là le rôle irremplaçable des professeurs et des formateurs de tout type dans la diffusion sociale (et en particulier scolaire) des connaissances : nul ne saurait être de manière exclusive et durable son propre formateur.*
L'exigence précédente ne signifie pourtant nullement que ce soit au professeur seul de poser toutes les questions à étudier : il lui appartient au contraire d'aider les élèves à formuler, sinon les grandes questions fondatrices du curriculum, du moins certaines des questions en lesquelles se déploie leur étude, et cela, plus largement, afin de leur permettre d'acquérir une vraie capacité à assumer la fonction de problématisation essentielle en tout abord critique, scientifique ou citoyen, du monde. »
Ce passage montre bien l'importance du rôle du professeur en tant que directeur d'étude. Il est là pour aider les élèves à apprendre à se poser les bonnes questions et à adopter un guide de recherche.

Il leur échoira (aux élèves) sous la houlette du professeur d'identifier la ou les tâches problématiques ...
Raison de ce choix : ce passage définit clairement le topos des élèves, identifier les tâches problématiques, et celui de P en amont de la séance, enchâsser ces tâches dans la tâche coche ; utilisation du verbe échoir au futur.

Tout d'abord, la notion de formation et problématisation a retenu mon attention. Ce paragraphe montre bien le rôle du professeur dans l'apprentissage. Comme on peut le lire dans la notice, pour la majorité des personnes, « les savoirs n'émergent pas spontanément des pratiques ». Autrement dit, la vie de tous les jours ne permet pas de générer un apprentissage. Il s'agit donc pour le professeur de forcer ses élèves à faire fasse à des problèmes. Il doit également tenter de faire trouver aux élèves des questions, afin de les aider à se former en tant que scientifique mais aussi en tant que citoyen.

Dans le paragraphe « création de connaissances et déni de problématicité », le point qui me semble important est le suivant : une condition nécessaire de création de connaissances est de partir d'une situation de problématicité. Effectivement si on rencontre des types de tâches que l'on sait résoudre, la génération de connaissances nouvelles est pauvre, sinon nulle. Le déni de problématicité se rencontre souvent dans notre pratique quotidienne de l'enseignement : par exemple le bruit dans une classe peut être rejeté sur les élèves, et utiliser une sanction pour arrêter le bruit, au lieu d'être perçu comme un problème d'organisation didactique. Problème qui peut engendrer des connaissances didactiques nouvelles et nécessaires pour comprendre les raisons du bruit.

C'est quelquefois le problème lui-même qui est mis en avant :

Notion de problème. L'intérêt d'aborder une notion vise un problème. L'utilité est rencontrée. La notion de problème doit prendre une place plus importante dans la culture scolaire. La problématisation est essentielle.

La notion de problème me semble importante car il me semble qu'elle rejoint la volonté de motivation d'un type de tache. Face à un problème rencontré et pour y répondre, le professeur, avec les élèves fait avancer le temps didactique. De plus d'un point de vue plus général cette notion est à la base de l'avancée des mathématiques; en effet c'est souvent suite à des problèmes rencontrés en physique par exemple que des résultats en mathématiques ont été démontrés.

Plusieurs élèves professeurs citent également le dispositif des questions de la semaine :

Le premier élément qui me semble important dans cette notice concerne le dispositif des « questions vives de la période » -semaine ou quinzaine par exemple. Cet élément permet un questionnement « infini » dans le sens où toute réponse même durement construite est provisoire. Ce questionnement entraîne la réalisation d'une nouvelle réponse en ayant au préalable analyser et évaluer les réponses connues. La remise en question des réponses « toutes faites » me paraît essentielle tant pour le professeur que pour les élèves. La déconstruction et la reconstruction des réponses existantes n'aura lieu que dans le cas où on examine les réponses existantes ce que l'on prendra soin de faire régulièrement.
Dans le cas où ce dispositif est mis en place en classe, le professeur s'efforcera de ne pas donner immédiatement des réponses « toutes faites ». Ce dispositif permet alors de gérer la mémoire didactique de la classe.

Par ailleurs, le temps consacré aux questions et aux réponses au sein d'une classe me paraît important. Les élèves peuvent poser leurs questions par écrit, ces questions seront traitées quelque temps plus tard. On doit établir un

travail collectif autour de ces questions : chaque question posée concerne toute la classe et non seulement l'élève qui l'a posée.
Le fait que les réponses ne soient pas données dans l'immédiat permet de ne pas laisser de côté une notion qu'on pourrait déjà considérer comme appartenant au passé.

D'autres, enfin, citent encore la « coopération interdisciplinaire » :

Le deuxième éléments qui me semble important est la coopération interdisciplinaire à laquelle la culture scolaire est restée longtemps réticente. Dans tous les cas, la production d'une réponse repose sur un mixte de connaissances ; ainsi, il ne faut pas hésiter lors d'une AER par exemple à aller chercher dans des problèmes de physique et de travailler avec le professeur de cette matière à l'apport de réponses. Ceci implique aussi de suivre une progression dans chaque matière longuement réfléchie en commun.

7.3 Qu'elle se fasse d'une manière intradisciplinaire .../... de dialectiques qu'on explicitera ici pour mémoire
Le travail et la communication intra et codisciplinaire est utile (en particulier dans les établissements dits « difficile »), d'une part pour les enseignants qui forment alors une équipe soudée et d'autre part pour les élèves qui perçoivent en face d'eux, des adultes compétents et réunis autour d'un même objectif, les former.

NB : on prendra garde au fait qu'une codisciplinarité efficace s'obtient souvent bien davantage par un recours et une confrontation aux œuvres des autres disciplines que par un recours aux « spécialistes » de ces disciplines.

On notera pour terminer que ce sont principalement des éléments technologico-théoriques qui sont mis en avant, et que les dialectiques explicitées dans la notice, qui permettent notamment de développer des praxéologies didactiques, ou encore le schéma herbartien qui modélise le processus de construction des réponses ne sont pas cités dans les réponses.

2. Questions d'entretien : gérer la diversité

Nous avions noté, lors de l'examen des questions d'entretien, que figurait la question suivante :

❷ Quelles formes d'aide ou de différenciation réalistes propose la séquence (ou pourrait-on proposer à partir de cette séquence) pour gérer la diversité des élèves ?

Pour éclairer ce point, nous partirons d'un fragment d'analyse d'un corpus B sur le thème « Triangle rectangle et cercle » en classe de 4e.

Le document d'accompagnement des programmes du collège qui concerne la géométrie explicite les objectifs généraux.

I- Objectifs généraux

D'une manière plus globale, l'enseignement de la géométrie contribue, comme celui des autres rubriques des programmes, à la pratique de l'activité mathématique par les élèves de collège.

> ***À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution.***
> (BO hors série n°6 avril 2007, Mathématiques, Introduction générale pour le collège : les mathématiques comme discipline de formation générale)

Au delà de cette description générale, trois finalités primordiales et complémentaires peuvent être distinguées et assignées à l'enseignement de la géométrie au collège :

• Fournir des bases pour développer une capacité à géométriser un problème spatial ou non, ce qui implique la nécessité de construire un modèle à l'aide d'objets géométriques et de le travailler à l'aide de savoirs géométriques.
Cette dimension fondamentale est soulignée dans le rapport de la CREM[2] sur l'enseignement de la géométrie :

> *"De fait, chaque mathématicien a ses représentations concrètes de situations complexes qui lui servent de raccourcis de pensée…"*
> *"Penser géométriquement, c'est avoir une vision globale d'une question mathématique, la perception plus locale intervenant ensuite, notamment avec les calculs."*

• Fournir un cadre pour développer les capacités à expérimenter et à mettre en œuvre des démarches d'investigation.
Cet axe prend toute sa signification dans le contexte plus général de l'enseignement des sciences au collège.[3]
• Fournir l'un des supports de l'apprentissage du raisonnement déductif.[4,5]

Ce sont ces trois objectifs qui fournissent les axes de réflexion des paragraphes qui suivent.

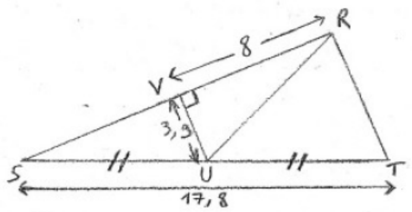
On voit que si la démonstration joue un rôle évidemment essentiel dans « l'apprentissage du raisonnement déductif », elle ne constitue pas à elle seule la totalité des objectifs poursuivis en géométrie.

L'énoncé du devoir surveillé et les notes obtenues

DS de Mathématiques n°8

Partie I : On donne la figure suivante :

Le dessin n'est pas à échelle réelle.

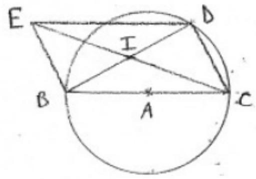


Montrer que le triangle RST est rectangle en R.

Partie II : Soit un triangle ABC rectangle en A. Soit O le milieu de [BC]. Le cercle de diamètre [OC] coupe [AC] en H.

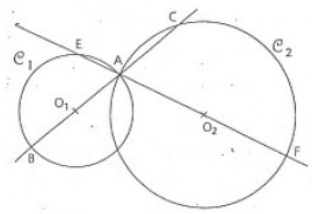
1) Faire une figure.
2) Montrer que (OH) est la hauteur issue de O du triangle AOC.

Partie III : On donne la figure suivante, où A est le centre du cercle et BCDE est un parallélogramme :



1) Montrer que (IA) est parallèle à (DC).
2) En déduire que (IA) est perpendiculaire à (BD).

Partie IV : A est un point commun au cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O_1 et au cercle $\mathcal{C}_2$ de centre O_2. La droite (O_1A) recoupe $\mathcal{C}_1$ en B et $\mathcal{C}_2$ en C. La droite (O_2A) recoupe $\mathcal{C}_1$ en E et $\mathcal{C}_2$ en F.



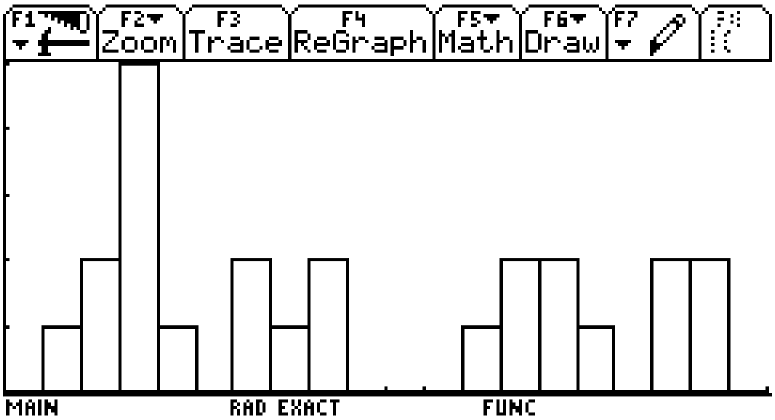
1)a) Quelle est la nature du triangle EBA ? Le démontrer.
1)b) Que peut-on alors dire des droites (EB) et (EF) ? Justifier.
2) Que peut-on dire des droites (CB) et (CF) ? Le démontrer.
3) Démontrer que les quatre points B, F, C et E sont sur un même cercle $\mathcal{C}_3$ dont on précisera le centre et le rayon.

4) Notes relatives à la séquence :

	DM 10	DM 11	DS 8
Coefficient :	1	1	3
élève 1	5	NN	AB
élève 2	15	12	6,5
élève 3	13	15,5	18,5
élève A	**17**	**15**	**18**
élève 5	15	16,5	17,5
élève 6	15,5	16	13,5
élève 7	16,5	12,5	12,5
élève 8	10	12,5	3
élève 9	NN	11	8
élève 10	13,5	15,5	14,5
élève 11	AB	AB	AB
élève 12	16,5	14	13,5
élève 13	14	17,5	17
élève 14	2	AB	2,5
élève 15	11	6	6
élève 16	12,5	AB	AB
élève 17	14	11	15,5
élève 18	14	9	3
élève 19	12,5	8,5	4,5
élève 20	8	3	1,5
élève 21	12	10	3,5
élève 22	NN	1	2
élève 23	16	17,5	14,5
élève 24	12	AB	AB
élève 25	3,5	NN	AB
élève 26	13	10,5	8
élève B	**13**	**11,5**	**7**
élève 28	NN	3,5	3
élève 29	12	2	3
Moyenne:	12,3	10,9	9
Plus haute:	17	17,5	18,5
Plus basse:	2	1	1,5

Dans l'exemple observé, si le travail de la classe a laissé place aux différents aspects de la géométrie explicités dans l'extrait ci-dessus, en revanche le devoir en classe qui en fait le bilan va porter exclusivement sur les aspects démonstratifs.

Ce manque de prise en compte d'une part, de la diversité des travaux effectués en classe et, d'autre part, de la diversité des élèves, ajouté à une longueur sans doute excessive du devoir proposé, va conduire à « éclater » la classe du point de vue des résultats comme en témoignent les notes obtenues par la classe dont l'histogramme ci-dessous rend compte.



On ajoutera que si la moyenne est de 9, l'écart-type est, lui, de 5,99 ce qui donne un coefficient de variation de près de 67%. (Le coefficient de variation est le quotient de l'écart type par la moyenne, il permet de relativiser la valeur de l'écart-type par rapport à celle-ci.)

Nous avons rassemblé ci-dessous, pour poursuivre, des matériaux extraits du Séminaire de l'année 2004-2005, que nous examinerons collectivement.

Extrait 1

On amorce ici un travail sur la question de la ***gestion de la diversité*** sous la forme de notes exploratoires pour un PER professionnel – pour le professeur de mathématiques – qui pourrait s'intituler ***Quelles diversités doit-on gérer dans un établissement, dans une classe, et comment peut-on envisager de le faire ?***

① **Notes exploratoires : proposer des travaux “ différenciés ” ?**

❶ La question du bon “ calibrage ” des travaux proposés aux élèves surgit vite dans la vie d'une classe. Cette question apparaît aujourd'hui parfois sur-compliquée par une exigence de principe que l'expression de ***différenciation pédagogique*** exprime positivement et que celle de ***classe hétérogène***, négativement, semble imposer. Mais la signification qu'on peut donner à une telle exigence ***ne va nullement de soi***. Observons simplement que, s'il est déjà difficile de “ calibrer ” le travail demandé en ayant en vue des élèves réputés “ moyens ” (d'un niveau de classe donné), parvenir à des “ calibrages ” finement différenciés – et réussis – pour différents “ profils ” d'élèves ressemble à un tour de force, voire à une… illusion !

❷ L'ambition de proposer des travaux plus ou moins finement différenciés porte en elle le danger de flatter le “ narcissisme des petites différences ” (Freud), avec pour effet possible de remplacer à la longue une ***république d'égaux*** par un ***rassemblement anomique d'*egos**, de substituer à une classe toujours en construction, deux, trois, dix “ classes ” dont l'homogénéité n'est même pas certaine – on trouve toujours à se distinguer de l'autre ! En un tel cas, il ne restera plus alors au professeur qu'à gérer d'un même mouvement deux, trois, dix classes, avec chacune leur histoire, leurs particularismes, leur dynamique – chose en vérité presque impossible !

❸ Par contraste, on doit méditer sur l'importance de faire de la classe une " république une et indivisible ", avec son histoire partagée, à l'intérieur de laquelle se dessinent les trajectoires diverses mais solidaires d'élèves-citoyens. Cette classe, " la classe ", est pour le professeur ***le premier outil didactique***, et c'est d'un formidable outil qu'on se prive lorsque la classe ne fonctionne plus comme telle, mais comme une simple réunion de petits groupes.

❹ Ces effets sont encore redoublés lorsque de tels groupes sont fondés sur un principe différenciateur qui, à rebours de l'effet recherché, peut figer les élèves dans un " profil ", un " niveau ", alors même que, dans le cadre ordinaire de la classe, c'est-à-dire d'un groupe ***assez nombreux et assez divers***, les résultats d'un même élève ***peuvent fluctuer assez fortement au fil du temps***.

❺ Une action différenciée est donc bienvenue si elle permet de donner une ***meilleure cohésion*** à la classe, parce qu'elle tend à ramener en son sein des élèves qui, seuls ou en petits groupes, se seraient par trop éloignés des " normes " fondatrices de l'unité de la classe. En ce cas, on peut envisager, ponctuellement, de passer contrat avec les *" outliers "* – les " points aberrants ", comme on dit en statistique… –, et avec eux seulement, afin de les aider à reprendre leur place au sein de la classe.

Extrait 2

⇨ ***Gérer la diversité des élèves***

On poursuit ici l'étude exploratoire relative à la ***gestion de la diversité***.

1. Une classe n'est pas un simple rassemblement contingent d'individus, chacun plus ou moins figés dans une certaine posture scolaire. Il est ainsi des élèves " fluctuants ", alternant par exemple bonnes et moins bonnes notes, et qui, pour cela même, peuvent parfois irriter le professeur. Pourtant, on peut montrer que ces élèves jouent un ***rôle positif*** dans de la vie de la classe en ce qu'ils permettent à ce collectif de se regarder comme ***relativement uni et cohérent***. Si, en effet, il est possible à quelques-uns d'osciller entre la tête et la queue du peloton, c'est que, dans cette classe, chacun ou presque " reste dans la course ", même si la place qu'il ou elle occupe à tel moment semble peu flatteuse.

2. Le rôle unificateur qu'assument sans le savoir les élèves " nomades " s'exprime dans un registre plus irréfutable encore : dans la formation de l'image chiffrée de la classe par le truchement des ***notes trimestrielles***.

Montrons-le ici à l'aide d'un modèle qui stylisera volontairement la fabrication de ces notes.

① Soit $X_i : \Omega \to [0 ; 20]$ $(1 \le i \le n)$ les notes entrant dans la formation de la moyenne trimestrielle : chacun des élèves $\omega \in \Omega$ a une série de n notes $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$. La ***moyenne trimestrielle*** Y est alors donnée par

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad .$$

Où se situe alors le phénomène indiqué ? La moyenne de la classe est

$$m(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m(X_i) \ .$$

Mais si s désigne l'écart type, ***on n'a pas*** sauf exception

$$s(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s(X_i) \ .$$

L'écart type des moyennes trimestrielles ***n'est pas*** la moyenne des écarts types des moyennes aux différents devoirs. En fait, l'écart type des moyennes trimestrielles est ***inférieur***, voire ***très*** inférieur à la moyenne des écart types des différentes séries de notes assignées au cours du trimestre ! Pourquoi cela ?

② On doit se rappeler en ce point que $s^2(X)$ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique $\mathrm{cov}(X, Y) = s(X)s(Y)r(X, Y)$, où $r(X, Y)$ est le coefficient de corrélation des variables X et Y. On a donc :

Or, en élevant au carré l'expression de $s(Y)$, puis en prenant la racine carrée, on a :

$$s(Y) = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} s^2(X_i) + 2 \sum_{i \neq j} s(X_i)s(X_j)\underline{r(X_i, X_j)}}.$$

Dans l'expression de $s(Y)$, le facteur souligné – le coefficient de

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s(X_i) = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} s^2(X_i) + 2 \sum_{i \neq j} s(X_i)s(X_j)}$$

corrélation $r(X_i, Y_i)$ – peut, grâce à l'action des élèves nomades, être très inférieur à 1 : $s(Y)$ est donc d'autant plus inférieur à la moyenne des écarts types $s(X_i)$ que les devoirs X_i ***sont deux à deux plus faiblement corrélés***. Il est même possible que l'écart type “ trimestriel ” $s(Y)$ soit ***inférieur à chacun*** des écarts types $s(X_i)$: la classe, alors, est plus unie au rendez-vous de fin de trimestre qu'elle ne l'a jamais été au cours du trimestre ! Une classe n'est pas une somme d'individus.

3. Plusieurs observations complémentaires peuvent être faites. La première, c'est que ce qui réduit l'écart type – et, donc, accroît la cohésion de la classe –, ce sont les ***“ élèves fluctuants ”***, ceux qui ont tantôt de bonnes, tantôt de moins bonnes notes, tantôt des mauvaises, tantôt des moins mauvaises notes. D'une manière paradoxale seulement en apparence, ces élèves, dont le comportement irrégulier peut irriter, ***œuvrent ainsi à l'unité de la classe*** !

4. Une seconde observation fournit au professeur une ***variable de commande*** pour mieux rassembler la classe. Afin de contrôler “ à la source ” l'écart type de chaque X_i, il convient de composer le “ devoir ” donnant lieu à la note X_i de ***plusieurs volets assez différents*** (en pensant aux diverses “ espèces ” d'élèves de la classe), afin que la note s'écrive comme une somme $X_i = Z_{i1}+Z_{i2}+$ … avec des séries de notes partielles Z_{i1}, Z_{i2}, … ***faiblement corrélées*** entre elles.

5. La mise en œuvre d'une telle évaluation “ mélangeante ” suppose, bien entendu, en amont, un ***enseignement “ diversifié ”***, notion qu'il convient donc de travailler.

① Dans cette perspective, on commencera par s'arrêter sur la question suivante.

Pas rigoureux ?

Concernant le thème des fonctions affines, avec les élèves on a écrit la technique suivante pour tracer la représentation graphique $\mathcal{D}$ d'une fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$: i) on se place sur un point quelconque appartenant à $\mathcal{D}$, par exemple M (0 ; b) ; ii) on se déplace horizontalement d'une unité vers la droite ; iii) on se déplace verticalement de $|a|$ unités vers le haut (resp. bas) si a est positif (resp. négatif) ; iv) on place alors un point N, puis on trace la droite (MN). On a ainsi détaillé cette technique, car il me semble qu'elle est aussi utile pour résoudre le type de tâches suivant : “ Déterminer graphiquement l'équation d'une droite ”. D'après un professeur de mathématiques du lycée, il n'est pas rigoureux mathématiquement d'écrire cela dans les classeurs des élèves. Qu'en pensez-vous ? (2de, 19)

❶ Pour comprendre le commentaire de ce professeur, il faut revenir à un enseignement de la séance 6 de ce Séminaire, dans les notes de laquelle on lit :

L'attention aux gestes techniques – et pas seulement à la technologie – semble avoir été, autrefois, plus forte et davantage bienveillante à l'égard de l'élève qui, par contraste, est aujourd'hui laissé à lui-même...

Ce que la question rapporte de l'activité de cette classe de 2de montre qu'on y est attentif aux ***gestes techniques*** : la description proposée est celle d'une certaine technique de tracé de la droite représentative, dans un repère donné, d'une fonction affine donnée. L'impression d'étrangeté que ressent le professeur mentionné – ces choses-là ne se font pas !… – s'exprime en un langage certes inapproprié (on va le voir) et dont la seule vertu est d'être disponible dans la culture actuelle de la profession : ce qui me paraît étrange doit être insuffisamment rigoureux !

❷ En vérité, il semble que ce qui est ressenti comme inhabituel ici, ce soit tout simplement le souci d'expliciter une technique qui, d'ordinaire, est au mieux “ folklorique ”. (Un élément technique, technologique ou théorique est dit folklorique dans une communauté donnée s'il y est connu, et même ***“ bien connu ”***, c'est-à-dire s'il y est communément disponible, mais sans pour autant y faire l'objet d'une explication ou d'un questionnement. Le mot anglais *folklore* vient de *folk*, peuple, et de *lore*, savoir (mot apparenté au verbe *to learn*) : le folklore est le “ savoir du peuple ” ; ici, de la communauté considérée, classe ou autre.) D'ordinaire, les manuels – et, par contamination, les “ classeurs d'élèves ” – ne “ descendent ” pas jusqu'à ce niveau de description technique que, dans une tradition élitaire récente, on semble tenir pour indésirable. C'est ainsi que, dans tel manuel, sous le titre *Représentation d'une fonction affine*, on trouve, à propos de la fonction affine $x \mapsto 1/2x + 3$, une ébauche graphique où est marqué le point A(0 ;3) et où le placement du point de coordonnées (1 ; 3,5) est suggéré, avec cette légende :

$a = 1/2$; si x augmente de 1,
y augmente de 1/2.

Mais ce qui est ensuite ***explicité*** – sous le nom pompeux mais traditionnel de ***“ méthode ”*** –, c'est ceci :

Méthode Pour représenter graphiquement une fonction affine, on peut utiliser :
- deux points de la droite.
- ou bien le coefficient directeur et un point de la droite.

On reconnaîtra, dans la deuxième possibilité envisagée, l'expression ***non développée*** de la technique mise en place dans la classe de 2de évoquée dans la question !

❸ Cela noté, on ne voit guère en quel sens la technique mise en mots et rapportée dans la question examinée pourrait être dite “ mathématiquement non rigoureuse ”. Il s'agit là d'une technique de construction graphique ***exacte*** (et non pas approchée, par exemple) à laquelle on pourrait, certes, reprocher le fait que, en tant que procédé de tracé effectif, si l'unité choisie ou si la valeur absolue $|a|$ est " petite ", sa mise en œuvre risque d'être ***imprécise*** – ce à quoi on peut aisément remédier en modifiant ainsi les instructions qui la définissent (u désigne l'unité de longueur choisie) :

ii) on se déplace horizontalement de n unités vers la droite, où n est tel que nu $n|a|u$ ne soient pas trop petits ;
iii) on se déplace verticalement de $n|a|$ unités vers le haut (resp. bas) si a est positif (resp. négatif) ;

❹ Une autre difficulté – non explicitée, celle-là – surgit encore si a n'est pas un entier ou une fraction " simple " (comme ci-dessus : $a = 1/2$). Comment se déplacer sur un quadrillage de pas u d'une distance égale à $\sqrt{1+\sqrt{5}}\ u$, par exemple ? Si l'on prend une valeur approchée de $\sqrt{1+\sqrt{5}}$ ($\approx 1{,}8$), la technique de tracé devient ***approchée***. Pour qu'elle demeure exacte, il conviendrait de faire appel à des procédés exacts de construction de longueurs, ce qui est un autre problème. Mais il n'y a en tout cela rien qui ne soit " mathématiquement rigoureux ".

❺ Bien entendu, la ***technique*** proposée doit être ***justifiée***, et cela de façon également ***explicite***. Sa ***technologie***, en l'espèce, repose essentiellement sur trois éléments :

1) la représentation graphique d'une fonction affine f est une droite D ;

2) une droite D est déterminée par deux quelconques de ses points ;

3) Si pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, alors pour tout $(x, \Delta x) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = a\Delta x$.

Un bilan d'étape : La technique première mise en œuvre pour prendre en charge la diversité qui consiste à faire des groupes de profils semblables et à gérer chaque groupe spécifiquement est problématique. D'une part, il est déjà difficile de proposer un enseignement adéquatement calibré à un point moyen, arriver à en proposer plusieurs relève du tour de force, voire de l'utopie ; d'autre part, il est avantageux pour la cohésion de la classe d'avoir des élèves de « niveaux divers », et même des élèves dont les notes fluctuent fortement. Il n'en reste pas moins qu'en certains cas on pourra et on devra mettre en place des systèmes didactiques auxiliaires (aide individualisée, module, PPRE, soutien, etc.) pour certains élèves qui se sont trop écartés du « centre » de la classe et qui ont besoin d'une aide spécifique pour reprendre leur place au sein de la classe.

Nous avons également commencé à aborder un point essentiel : l'attention aux gestes techniques est un aspect important de la gestion de la diversité. Nous poursuivons sur ce point, en considérant la suite des notes du Séminaire 2004-2005.

Extrait 3

② D'une manière plus générale, un ***enseignement diversifié*** – et non pas " différencié " – suppose d'abord (mais bien sûr pas seulement !) une ***attention réellement équitable*** aux ***types de tâches***, aux ***techniques***, à leur ***technologie*** ainsi qu'aux aspects ***théoriques*** s'il y a lieu. Pour illustrer ce principe, on se tourne maintenant vers l'exemple des problèmes de ***construction géométrique***.

❶ Examinons en premier lieu le document ci-après, relatif à la proposition 1 du livre I des *Éléments* d'Euclide (vers 300 av. J.-C.), que l'on présente dans la traduction des *Éléments* publiée par Didier Henrion en 1632.

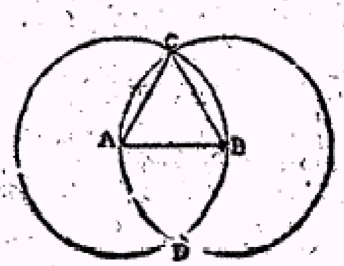
PROBL. I. PROP. I.

Sur vne ligne droicte donnee & terminee, descrire vn triangle equilateral.

SOIT la ligne droicte donnee AB, sur laquelle il faut faire vn triangle equilateral.

Du centre A, & de l'interuale de AB, soit descrit le cercle BCD: Item, du centre B, & de l'interualle de la mesme AB, soit descrit vn autre cercle ACD, couppant le premier és poincts C & D, de l'vn desquels, sçauoir de C, soient menees les deux lignes droictes CA, & CB: Ie dis que le triangle ABC, construit sur la ligne droicte donnee AB, est equilateral.

Car le costé AB, est egal au costé AC par la 15. deff. d'autant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circonference: & par la mesme raison, le costé BA est égal au coste BC. Dõc par la 1. com. sent. les costés CA, & CB seront égaux, chacun estant égal à AB: & partant le triangle ABC decrit sur AB, est equilateral; qui est ce qu'il falloit faire.



On y voit en effet nettement distingués le ***type de tâches***, la ***technique***, la ***technologie***, ainsi que des éléments ***théoriques***. Le type de tâches y apparaît énoncé en ces termes :

Sur une ligne droicte donnee & terminee, descrire un triangle equilateral.

La technique s'explicite ainsi :

Du centre A, & de l'intervale de AB, soit descrit le cercle BCD : Item, du centre B, & de l'intervale de la mesme AB, soit descrit un autre cercle ACD, couppant le premier és poincts C & D, de l'un desquels, sçavoir de C, soient menees les deux lignes droictes CA, & CB : Ie dis que le triangle ABC, construit sur la ligne droicte donnee AB, est equilateral.

La technologie s'énonce ainsi :

Car le costé AB, est égal au costé AC par la 15 deff. d'autant qu'ils procedent de mesme centre vers mesme circonference : & par la mesme raison, le costé BA est égal au costé BC. Dŏc par la I. com. sent. les costés seront égaux, chacun estant égal à AB : & partant le triangle ABC descrit sur AB, est equilateral ; qui est ce qu'il falloit faire ".

Ce que la formulation précédente désigne par l'abréviation " 15 deff. " est la définition 15, qui relève aussi de la ***technologie*** et s'énonce ainsi : " Cercle, est une figure plane, contenue par une seule ligne qu'on appelle circonference, vers laquelle toutes les lignes droictes menees d'un seul point de ceux qui sont en icelle figure sont égales entr'elles ". Enfin, la " I. com. sent. ", la première commune sentence, qui relève, elle, de la ***théorie***, est libellée ainsi : " Axiomes ou communes sentences. I. Les choses égales à une mesme, sont égales entr'elles. "

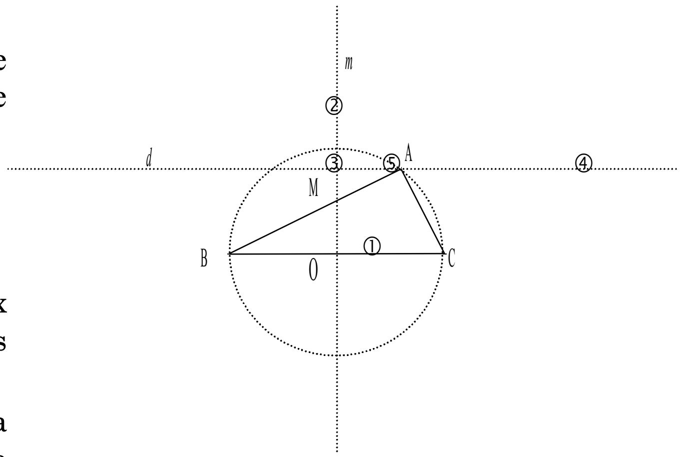
❷ D'une façon générale, technique et technologie doivent être ***coprésentes dans l'organisation mathématique*** qui sera institutionnalisée, et il serait *a priori* inopportun de gommer l'une ou l'autre d'entre elles. La classe doit en fait travailler ***plusieurs aspects***, que l'on retrouvera à l'étape de ***l'évaluation***, et que l'on explicitera dans ce qui suit.

③ Sous le titre ***Les problèmes de construction***, le document d'accompagnement du programme du cycle central du collège comporte ce passage : " Le tracé est une chose, sa description raisonnée en est une autre. " Le texte euclidien précédemment examiné illustre l'exigence, au-delà de la mise en œuvre du procédé de tracé, de la formulation d'une " description raisonnée " de ce procédé.

❶ Telle est la première exigence que l'on fera prévaloir dans la classe, et qui pourra conduire, dans les travaux évalués, à proposer des exercices (au sens strict du mot) du type suivant – où, ***volontairement***, on a ***neutralisé*** en partie la ***recherche*** de la technique de construction :

On considère le problème suivant : *Construire un triangle* ABC *rectangle en* A*, où* BC = 3 cm *et* AH = 1,2 cm*,* H *étant le pied de la hauteur issue de* A. En s'appuyant sur le schéma ci-après, écrire un programme de construction permettant de résoudre ce problème.

La réponse attendue pourra prendre la forme suivante :



Programme de construction

1) Marquer deux points B et C tels que BC = 3 cm.

2) Tracer la médiatrice *m* de [BC].

3) Sur *m*, du côté de (BC) que l'on souhaite, marquer le point M tel que OM = 1,2 cm (où O est le milieu de [BC]).

4) Tracer la parallèle *d* à (BC) passant par M.

5) Choisir pour A l'un des points d'intersection de *d* avec le cercle.

❷ Le document d'accompagnement déjà cité indique encore :

Les élèves sont amenés à mettre en œuvre des définitions ou des propriétés caractéristiques de figures géométriques et des propriétés d'une transformation qui agit sur ces figures. L'intérêt d'une construction porte plus sur la procédure utilisée que sur l'objet obtenu. La justification qui l'accompagne est une occasion de raisonnement.

La description de la " procédure " est " accompagnée " d'une " justification " : tel est, bien sûr, le deuxième point qu'il convient de travailler fermement – quoique ***sans exclusive***. À ce travail de la classe pourra correspondre, dans les travaux évalués, l'exercice que voici :

Exercice

On considère le programme de construction suivant :

1) Marquer deux points B et C tels que BC = 3 cm.

2) Tracer la médiatrice m de [BC].

3) Sur m, du côté de (BC) que l'on souhaite, marquer le point M tel que OM = 1,2 cm (où O est le milieu de [BC]).

4) Tracer la parallèle d à (BC) passant par M.

5) Choisir pour A l'un des points d'intersection de d avec le cercle.

Démontrer que l'exécution de ce programme produit un triangle ABC rectangle en A.

Le " discours technologique " demandé prendra la forme d'une " preuve de programme " qui pourrait avoir le contenu suivant :

Preuve du programme

Comme MO = 1,2 cm < 1,5 cm = $\frac{BC}{2}$, le point M est intérieur au cercle C. Par suite, la droite d, qui passe par M, coupe C en deux points. Soit A l'un de ces points. Puisque A $\in d$, on a AH = 1,2 cm. Puisque A $\in$ C, on a $\widehat{BAC}$ = 90º. Le point A convient.

❸ On notera la présence, dans la démonstration précédente, de ***deux niveaux d'exigence*** : celui de la démonstration que BAC est droit, qui devrait être accessible ***à tous***, et celui de la démonstration de l'***existence*** du point A, qui relève d'un type de difficultés à la limite du programme, " point extrémal " du domaine étudié comme le suggère cet autre passage du document d'accompagnement :

L'existence d'une solution dans l'un ou l'autre problème de construction peut se poser sans que, pour autant, elle soit soulevée de façon systématique et formalisée.

❹ Un troisième point tient dans l'***exécution graphique*** du programme de construction. Pour " lester " ce travail et le valoriser dans la classe de mathématiques, on pourra exploiter la notion de ***calcul graphique*** (et sa pratique éventuelle à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique), tel qu'on l'a mentionné dès la séance 2 de ce Séminaire. Le problème de construction évoquée plus haut permet ainsi de résoudre graphiquement le système $\begin{cases} BC = 3 \\ AH = 1{,}2 \\ BH\ BC = AH^2 \end{cases}$

soit encore, en posant BH = x, $\begin{cases} x(3-x) = 1{,}4 \\ 0 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$, ou $\begin{cases} x^2 - 3x + 1{,}4 = 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$. Les solutions sont ici $x = 2{,}4$ et $x = 3 - 2{,}4 = 0{,}6$. On voit ainsi comme on peut résoudre ***graphiquement*** (et donc, à l'aide d'un logiciel adéquat, ***numériquement***) une ***équation du second degré***. La technique précédente permet par exemple de s'attaquer aux équations du type $ax^2 + bx + c = 0$, où $ac > 0$ et $ab < 0$, puisqu'une telle équation s'écrit $x(\beta - x) = \gamma$ où $\beta = \frac{-b}{a}$ et $\gamma = \frac{c}{a}$.

3. Forum des questions

TER et soutenances

Pour les différents oraux, le jury n'est-il composé que de personnes ayant une formation en mathématiques ou faut-il vulgariser la présentation ? (5e & 4e, 23)

Lors de la présentation du TER, quelle organisation doit-on choisir (l'organisation linéaire n'étant pas conseillée) ?
Au sujet de la soutenance du mémoire, comment se répartir entre les membres du trinôme, les différentes parties du mémoire ? (5^{e} & 4^{e}, 23)
Faut-il préparer une présentation type « powerpoint » pour les oraux ? (5^{e} & 4^{e}, 22)
Lors des oraux (soutenance de mémoire et présentation du corpus B) faut-il utiliser une préAO ? (5^{e} & 4^{e}, 22)
Les membres d'un même trinôme ont-ils la même mention à la soutenance du mémoire ? (2de, 23)

1. Les membres du jury sont tous instruits en mathématiques : même le représentant de la FIT, membre de la commission de validation, est un visiteur. Ils ne sont cependant pas tous également instruits dans la matière sur laquelle porte la soutenance : un professeur de collège, maître de stage, peut n'avoir eu que fort peu de contacts depuis sa formation initiale avec la méthode d'Euler par exemple. Il est donc nécessaire d'avoir un discours suffisamment éclairant et d'éviter de parler par sous-entendus.

2. Il y a bien entendu plusieurs techniques pour se répartir les interventions. Si une présentation strictement linéaire – i.e. dans laquelle le premier intervenant ne présente que l'analyse de la séance, le second l'évaluation et le troisième le développement – n'est effectivement pas conseillée, il n'en reste pas moins que le premier intervenant a la tâche de présenter les éléments essentiels de la séance observée de façon à rendre la soutenance intelligible pour le jury, et notamment le ou les membres qui n'ont pas lu le manuscrit. La voie à suivre est sans doute de ne pas « suivre les parties du mémoire », mais de prendre du recul par rapport au manuscrit et de prévoir un découpage qui recouvre la plus grande partie du mémoire, en faisant ressortir des lignes de force du travail proposé.

3. Se présenter sans le secours d'un support écrit (transparents ou présentation assistée par ordinateur) peut s'avérer très dommageable pour la soutenance (mémoire ou enseignements), notamment compte tenu du temps qui est imparti. En outre, notamment par la structuration que sa préparation oblige à faire dans la présentation, un tel support permet de prendre du recul par rapport au travail effectué. Dans le cas de l'utilisation d'un ordinateur, vous pouvez utiliser un « fichier texte », ou encore un logiciel de présentation comme powerpoint ou impress. Veillez, si vous n'utilisez pas votre ordinateur portable, à l'enregistrer sous un format lisible par une majorité d'ordinateurs (docx, etc. à éviter...).

4. Il n'est pas impossible que des membres d'un même trinôme n'ait pas la même mention au mémoire, et cela arrive chaque année en quelques occasions : si l'évaluation du manuscrit est commune, la présentation orale et l'entretien peuvent créer des différences.

Organisations mathématiques

Bissectrices

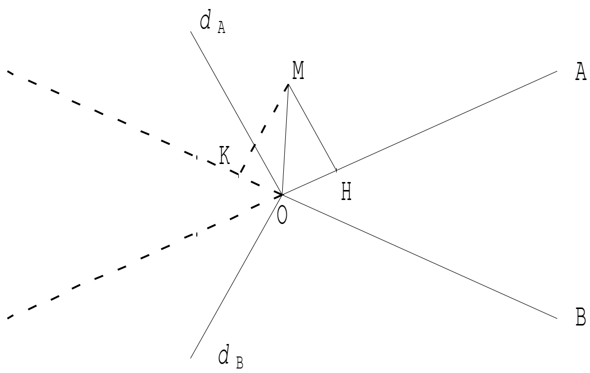
Dans les manuels, les bissectrices sont définies en tant que droites ou demi-droites. Lequel de ces deux termes doit-on employer ? (4^{e}, 21)

Voici ce qu'une recherche dans les Archives du Séminaire 2003-2004 a permis de récolter.

8. La question de la bissectrice pose un problème un peu différent – bien que, ici, le même mot puisse renvoyer encore et à un segment de droite (déterminé par un sommet et le point d'intersection de la bissectrice issue de ce sommet avec le côté opposé), et à sa longueur. Le problème est celui de savoir si la bissectrice d'un angle $\widehat{AOB}$ est une demi-droite ou une droite.

① Si l'on définit la bissectrice comme le lieu des points équidistants des deux côtés [OA) et [OB) de l'angle, que trouve-t-on ? La première difficulté est de définir la distance d'un point M du plan à une demi-droite δ. Il est normal de la définir comme le minimum de e(M, P) où P $\in \delta$, où e désigne la distance euclidienne ; comme ce minimum est celui obtenu en se restreignant aux points P de δ contenus dans un disque de centre M ayant avec δ une intersection non vide, il existe N $\in \delta$ où ce minimum est atteint.

② Considérons la figure ci-après.



Ce qui précède permet d'y voir quatre régions : 1) celle du secteur fermé $\widehat{AOB}$, où les points équidistants de [OA) et [OB) sont exactement les points de la demi-droite fermée bissectrice de ce secteur ; 2) les quarts de plan ouverts déterminés par les demi-droites [OA) et d_A et [OB) et d_B, où d_A et d_B sont perpendiculaires respectivement à [OA) et [OB), dans lesquels aucun point n'est équidistant des demi-droites [OA) et [OB) ; 3) le secteur angulaire fermé ***saillant*** déterminé par d_A et d_B – c'est celui qui ne contient ni A ni B –, dans lequel ***tout*** point M est équidistant des demi-droites [OA) et [OB) – la distance de M à chacune de ces demi-droites étant égale à MO.

③ On arrive ainsi à une conclusion rarement explicitée : si l'on appelle bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ l'ensemble des points ***du plan*** qui sont équidistants des ***demi***-droites [OA) et [OB), alors la bissectrice est une demi-droite (fermée) augmentée d'un secteur angulaire fermé saillant, dont les côtés sont perpendiculaires aux côtés de l'angle…

④ On voit en même temps par où pèche la définition adoptée plus haut : la bissectrice ne doit pas être définie comme “ le lieu des points [du plan] équidistants des deux côtés [OA) et [OB) de l'angle ” mais comme “ le lieu des points du secteur angulaire fermé saillant déterminé par [OA) et [OB) qui sont équidistants des côtés [OA) et [OB) de l'angle ”. Dès lors, “ la ” bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ est, indubitablement, une ***demi***-droite – ce qui n'empêche pas de considérer la droite “ support ” de cette bissectrice, laquelle est l'une des deux droites composant le lieu des points du plan équidistants des ***droites*** (OA) et (OB)…

⑤ On peut confronter les conclusions précédentes avec la tradition des manuels de l'enseignement secondaire (ou primaire supérieur, autrefois) pour y saisir ***à la fois*** la précision établie ci-dessus et son ***effacement***. Ce qui suit, en l'espèce, est un extrait du *Traité de géométrie élémentaire* déjà cité.

> Théorème III. – Points équidistants de deux droites données
>
> 63. *Tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle.*
>
> …
>
> 64. Réciproquement *tout point intérieur à un angle et équidistant des côtés de cet angle est situé sur la bissectrice de l'angle.*
>
> …
>
> 65. Corollaire. – Les deux propositions précédentes peuvent se résumer ainsi : *le lieu géométrique des points* équidistants *des deux côtés d'un angle est la* bissectrice *de l'angle ; et, par là même, le lieu des points équidistants de deux droites indéfinies se compose des bissectrices des quatre angles formés par ces droites.*

Nombre dérivée en 1re STG

En 1re STG, dans le thème « Nombre dérivé et tangente », parmi les capacités attendues on trouve « connaître les nombres dérivés des fonctions de référence et des fonctions trinômes du second degré ». Est-ce que cette capacité revient à dire « connaître les fonctions dérivées des fonctions de référence et des fonctions trinômes du second degré » ? (2de & 1re STG, 22)

Voici ce que comporte le document d'accompagnement du programme sur cette question :

3 - Nombre dérivé et tangente
On se contente en première STG d'introduire le nombre dérivé, dont la compréhension nécessite une longue maturation. La fonction dérivée sera traitée en classe terminale. Le passage du nombre $f'(x)$ à la fonction f' présente en effet des obstacles, notamment l'absence de tracé de courbe pour cette nouvelle fonction. Néanmoins le terrain sera préparé par les formules concernant les fonctions de référence et les fonctions trinômes du second degré, et par l'observation du signe du nombre dérivé.

Il est clair qu'il ne s'agit pas de traiter de la fonction dérivée en classe de première. Dès lors, comment introduire les « formules » évoquées ci-dessus ? Examinons ce qui suit dans le document d'accompagnement :

Le programme cite une illustration de la notion de nombre dérivé : le coût marginal. Rappelons que si $f(q)$ désigne le coût total de production d'une quantité q, le coût marginal est le nombre $f'(q)$. Les économistes l'interprètent comme le coût de production de la dernière unité produite, ou d'une unité supplémentaire. Cela revient à identifier localement le graphe de f avec sa tangente, ce qui est justifié si q est assez grand et f assez régulière (cf. ci-après « Approfondissements pour le professeur »).
Pour l'équation de la tangente, la formule générale $y=f'(x_A)(x-x_A)+f(x_A)$ peut être démontrée si le niveau de la classe le permet mais elle n'est pas exigible des élèves. En revanche, il doivent savoir la retrouver sur des exemples numériques, le nombre $f'(x_A)$ étant donné soit numériquement, soit littéralement, soit graphiquement (la tangente passant par des points clairement identifiables).
En ce qui concerne les fonctions de référence « carré », « cube », « inverse », « racine carrée », on admet les formules $2x_A$, $3x_A^2$, $-\frac{1}{x_A^2}$, $\frac{1}{2\sqrt{x_A}}$ donnant le nombre dérivé en x_A.

C'est donc non une vision fonctionnelle, mais une vision de formule qui donne la valeur d'un nombre qu'il faut adopter : de la même manière qu'au collège, on savait que l'aire d'un disque de rayon R était donnée par πR^2, on saura ici que le nombre dérivée de la fonction carré en a, $f'(a)$, sera donné par $2a$. On pourra donc envisager de faire déterminer graphiquement le nombre dérivée de la fonction carré en plusieurs valeurs, et de remarquer que l'on obtient le double de la valeur, ce qui permettra de produire la formule et de la tester avec un logiciel du type Geogebra ou une calculatrice. On procèdera de même avec les autres fonctions de référence.

On soulignera la mention de la notion de coût marginal qui permet de motiver économiquement le travail autour de ces formules. Le coût marginal est en effet donné en économie par le coût de production d'une unité supplémentaire, soit encore $C_m(q)=C(q+1)-C(q)$, $C(q)$ étant le coût total de production de q unités. En supposant que la fonction de coût total est cubique, on a donc à calculer $(q+1)^3-q^3$, soit encore $3q^2+3q+1$, ce que l'on approxime par la valeur $3q^2$ du nombre dérivée. L'approximation est donc meilleure quand « q est grand » et on pourra travailler avec les élèves sur la variation avec q de l'erreur commise.

Système d'équations (suite)

Dans le séminaire, en réponse à une question posée sur les systèmes d'équations en seconde, vous parlez de deux étapes :
•Une étape expérimentale qui utilise la calculatrice
•Une deuxième étape de calculs pour déterminer les éventuelles solutions
Ma question : Pourquoi n'évoquez-vous pas la technique des vecteurs directeurs qui est aussi pertinente et très rapide pour savoir si le système admet des solutions (ou pas) ?(22, 2de)

Il est va de soi que, souvent, il n'y a pas qu'une technique que l'on puisse mettre en place et qui réponde aux contraintes du programme. Examinons si celle qui est proposée convient.
On notera d'abord qu'elle est peu décrite ; nous supposerons qu'elle conduit à accomplir le travail suivant : déterminer les vecteurs directeurs des deux droites dont les équations constituent le système ; s'ils sont égaux, les droites sont strictement parallèles ou confondues et le système n'a pas de solution ou en a une infinité ; sinon, les droites sont sécantes et le système a une solution unique.

La détermination du vecteur directeur de la droite ne peut pas se faire à partir de l'équation du type $ax+by=c$, dont on ne « sait » pas en seconde qu'il s'agit d'une équation de droite (ce résultat ne fait pas partie de la TGD). Il faut donc transformer l'équation sous la forme $y=\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x$ (en supposant pour simplifier que b est non nul). Un vecteur directeur est alors $\left(1\,;-\frac{a}{b}\right)$, et il n'y a aucun intérêt à considérer les vecteurs directeurs à la place du coefficient directeur, d'autant que la notion de vecteur directeur n'apparaît pas dans le programme de seconde (même si elle n'en est pas formellement exclue) et que la notion même de vecteur a disparu du projet de programme...

On ajoutera que cette technique seule ne répond aucunement à la condition sur laquelle nous avons lourdement insisté tout au long de ce Séminaire : le fait que les techniques doivent comprendre des étapes de contrôle. (Voir supra, gestion de la diversité.)

En revanche, si l'on voulait véritablement utiliser les vecteurs, on pourrait mettre en place la technique suivante (en l'adaptant à la classe de seconde), qui repose sur les notions de repère du plan et de colinéarité.

Soit le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.
On examine la colinéarité des vecteurs $\vec{u}(a\,;a')$ et $\vec{v}(b\,,b')$. S'ils ne sont pas colinéaires, alors les vecteurs de $\vec{u}(a\,;a')$ et $\vec{v}(b\,,b')$ forment un repère du plan et il existe un seul couple $(x,\ y)$ vérifiant le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$. S'ils sont colinéaires, deux cas se présentent : soit le vecteur $\vec{w}(c\,,c')$ est également colinéaire avec $\vec{u}$ (et donc $\vec{v}$) et le système a une infinité de solutions, la droite dirigée par le vecteur $\vec{u}$; soit le vecteur $\vec{w}$ n'est pas colinéaire avec $\vec{u}$ et le système n'a pas de solution.
L'étape expérimentale pouvant alors être constituée du tracé des trois vecteurs, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
On a ensuite à résoudre le système dans le cas où on a une unique solution.

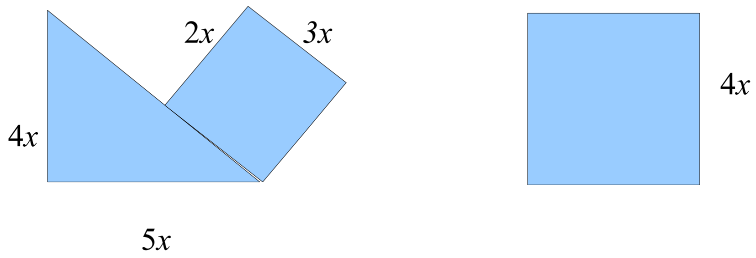
Dans le chapitre « calcul littéral » en classe de quatrième, j'ai trouvé dans les manuels deux types de tâches :
1er a) réduire une expression littérale ;
b) utiliser la double distributivité.
2e a) utiliser la double distributivité
b) réduire une expression littérale

Quelle est celle qui semble la plus pertinente ? (4e, 22)

On remarquera d'abord que « utiliser la double distributivité » n'est pas un type de tâches à proprement parler, ce n'est pas cela que les élèves auront à accomplir mais à « développer une expression littérale » de façon à simplifier un programme de calcul ou à pouvoir montrer que ce programme de calcul est équivalent à un autre.

On voit alors apparaître que le développement seul d'une expression du type $(ax+b)(cx+d)$ aura peu d'intérêt sans que l'on accomplisse ensuite une réduction. En revanche, la réduction seule peut être pratiquée.

Ainsi, par exemple, supposons que l'on ait eu à comparer les aires des deux figure suivantes et que l'on se soit convaincu, expérimentalement, que ces aires étaient les mêmes.



Il s'agit donc maintenant de le déduire de la TAD (théorie algébrique disponible). On a ainsi à réduire d'une part l'expression $4\,x \times 4\,x$ et d'autre part l'expression $\frac{1}{2}\,4\,x \times 5\,x + 2\,x \times 3\,x$, ce qui donne d'une part $16\,x^2$ et d'autre part $10\,x^2 + 6\,x^2$, soit encore $16\,x^2$.

Si la question pose le problème de la hiérarchisation de la rencontre des deux types de tâches envisagés, il paraît donc a priori plus pertinent que l'on rencontre d'abord la réduction avant de rencontrer le développement. Il est cependant possible de faire rencontrer les deux à partir d'un problème qui pose la question de l'équivalence de deux programmes de calcul dont l'un soit de la forme $(ax+b)(cx+d)$.

Organisation de l'étude

En seconde , dans le thème « fluctuation d'échantillonnage et simulation », le programme demande de ne pas faire une partie synthèse. Comment doit-on organiser ce thème ? (succession d'AER, avec exercices à la fin ?) (2de, 22)

Voici le passage du programme de seconde concerné par la question :

La notion de fluctuation d'échantillonnage et de simulation ne doit pas faire l'objet d'un cours. L'élève pourra se faire un « cahier de statistique » où il consignera une grande partie des traitements de données et des expériences de simulation qu'il fait, des raisons qui conduisent à faire des simulations ou traiter des données, l'observation et la synthèse de ses propres expériences et de celles de sa classe. Ce cahier sera complété en première et terminale et pourra faire partie des procédures d'évaluation annuelle.

Le fait que le programme insiste sur le fait que cette partie « ne doit pas faire l'objet d'un cours » ne veut nullement dire que l'OM relative à ce thème ne doit pas être mise en forme. Le texte du programme veut insister par là sur le fait que, là encore moins qu'ailleurs, on doit s'exonérer d'une structure ternaire de l'étude. Un peu plus loin on lit en effet que l'élève devra consigner « la synthèse de ses propres expériences et de celles de sa classe ».

Pour gagner du temps, on m'a dit (MJ) que je pouvais poser comme énoncé d'AER : « Voilà ce que nous dit le programme sur telle notion ; comment travailler cette notion ? ». Concrètement, quel guide de questions cruciales peut-on prévoir alors ? (2^{de}, 22)

Le dispositif évoqué est un dispositif que l'on pourrait décrire ainsi : on considère le programme qui définit le thème enjeu de l'étude et il s'agit de s'instruire sur ce thème en enquêtant à son endroit. Le premier lieu où l'on peut enquêter est bien entendu le manuel de la classe. Supposons que l'on choisisse le thème des systèmes linéaires en classe de seconde. Voici ce que dit le programme de seconde à ce propos.

Système d'équations linéaires.

Déterminer le nombre de solutions d'un système de deux équations à deux inconnues.
Résoudre des problèmes conduisant à de tels systèmes.

On y voit apparaître deux types de tâches, Déterminer le nombre de solutions d'un système de deux équations à deux inconnues et Résoudre un problème conduisant à un système de deux équations à deux inconnues. C'est d'abord cela que l'on fera reconnaître aux élèves, en posant par exemple une première question cruciale : ***que doit-on savoir faire sur ce thème d'après le programme ?*** On poursuivra l'étude de la question : ***quels types de problèmes doit-on savoir résoudre sur ce thème ?*** en considérant le manuel de la classe et on pourra mettre ce que l'on aura trouvé à l'épreuve d'un ouvrage d'exercices corrigés ou de sites internet destinés à la classe de seconde. Une fois les types de tâches dégagés, et un corpus d'exercices et de problèmes constitués, on pourra se demander ***« comment faire pour accomplir les types de problèmes T ? »***, qui permettra de se donner une technique, par le biais du manuel, la plupart présentant des exercices corrigés qui permettent de faire le travail, ou encore d'autres ressources mieux adaptées. Bien entendu, on mettra à l'épreuve la technique élaborée, ***« qu'est-ce qui nous assure que cette technique est valide ? »***, ce qui permettra de constituer l'environnement technologico-théorique et on la fera travailler pour s'assurer de sa robustesse ou encore de sa fiabilité.

On notera que ce type de technique didactique n'est pas sans liens avec la dialectique de l'inscription et de l'excription développée dans la notice Questions et Réponses.

Avec l'une de mes classes (ma 5^e), je risque de finir le programme avant la fin de l'année, je me demandais que faire ? - Prendre un peu plus de temps pour les activités des derniers chapitres ? - Récapituler un peu ce qu'on a fait durant toute l'année ? - Entamer légèrement le programme de 4^e ? (5^e & 4^e, 22)

Il n'y a aucune raison d'entamer le programme de la classe suivante. Il convient d'abord, et avant tout, de s'assurer que l'on a bien couvert l'ensemble du programme de la classe. Lorsque c'est le cas, il y a en règle générale quelques thèmes sur lesquels, une fois le temps de l'étude écoulé, on a le sentiment que la classe aurait besoin d'un temps de travail supplémentaire : c'est l'occasion de revenir sur l'étude de ces thèmes par le biais de problèmes dirigés sous forme d'AER qui n'ont pas pour objet de faire surgir une OM inédite mais de reprendre le travail d'OM déjà étudiées.

Ce temps de travail supplémentaire sera l'occasion de faire des synthèses au niveau du secteur, voire du domaine, en prenant appui sur un petit nombre de types de tâches, que l'on fait travailler à travers des problèmes. Par exemple en géométrie en classe de 5e, on pourra travailler « Comment montrer que deux droites sont parallèles ? » de manière à faire émerger une technique qui unifie les cinq techniques rencontrées dans l'année (montrer qu'elles définissent des angles alternes-internes égaux, ou encore des angles complémentaires égaux, montrer que ce sont les côtés d'un parallélogramme, montrer qu'elles sont images l'une de l'autre dans une symétrie centrale, montrer qu'elles sont perpendiculaires à une même droite) en en précisant la portée respective.

Nous poursuivrons le travail des organisations de l'étude en faisant une synthèse à ce propos.

4. Organisation de l'étude, une synthèse

Nous partirons, pour présenter cette synthèse, des différents types de tâches que le professeur a à accomplir pour réaliser une organisation didactique relative à une organisation mathématique donnée, que l'on suppose déjà conçue par le professeur. Au plus près de la conception de l'OD, on a dit que six grands types de tâches devaient être réalisés :

Un moment de la première rencontre avec l'OM, le plus souvent à travers les types de tâches mathématiques qu'il s'agit d'étudier ;

Un moment exploratoire, dans lequel les types de tâches sont explorés et qui voit l'émergence d'une technique relative à ces types de tâches ;

Un moment technologico-théorique, qui permettra d'élaborer la (ou les) technologie (s) et la théorie relative à l'OM étudiée permettant ainsi de justifier, de produire et de rendre intelligibles les techniques de cette OM ;

Un moment de travail de l'organisation mathématique élaborée, dans lequel on se mettra en main l'OM, et notamment les techniques, et qui permettra également de faire travailler l'OM construite ;

Un moment d'institutionnalisation de l'OM, qui mettra en forme l'OM produite et qui la reliera aux OM antérieurement produites de manière à obtenir des OM amalgamées au niveau des secteurs, voire des domaines mathématiques étudiés ;

Un moment de l'évaluation enfin, qui évaluera la maîtrise que l'on a de l'OM construite tout comme l'OM elle-même.

Ces grands types de tâches sont à réaliser au sein des 4 dispositifs prévu par le programme des classes de collège et de lycée : Activité (d'étude et de recherche), Synthèse, Exercices, Interrogations et devoirs notés. Nous avons également étudié le fait qu'il y a avantage à insérer les AER dans un PER, qui donne une vision au moins sectorielle de l'OM à étudier.

Penser un PER demande d'avoir « en tête » une organisation mathématique régionale amalgamée autour d'un petit nombre de « grands » types de tâches définitoires de l'OM, même si son étude fera apparaître d'autres types de tâches que l'accomplissement des types de tâches définitoires demande. Pour éclairer ce point, nous considèrerons d'abord la classe de seconde et le secteur de la statistique descriptive à travers un corpus B qui présente les traces écrites de l'étude de ce secteur. Voici l'analyse de l'OM faite par P.

T_1 : Calculer une moyenne ;
T_2 : Calculer un mode ;
T_3 : Calculer une médiane ;
T_4 : Calculer une étendue ;
T_5 : Choisir des résumés numériques pour une série statistique quantitative.

Les types de tâches T_1, T_3 et T_4 sont repérés comme ayant été enjeu de l'étude au collège, et le dernier type de tâches est scindé en deux sous-types de tâches :
$T_{5\text{-}1}$: Vérifier la pertinence des données
$T_{5\text{-}2}$: Choisir une ou des mesures statistiques

Conjointement à ce découpage, P donne une motivation de l'OM à étudier : « répondre à une question sur un phénomène variable ».

Partons donc d'une question sur un phénomène variable, génératrice de l'OM : mettre 10 minutes pour aller au lycée, c'est beaucoup ou c'est peu ? Pour pouvoir répondre à cette question, on se donne une population sur laquelle on recueille des valeurs du caractère « temps en minutes mis pour aller au lycée », la classe de seconde que P a en responsabilité par exemple. On en calcule la médiane et on regarde comment 10 min se situe par rapport à elle. On suppose maintenant que l'on veut étendre l'enquête, et P recueille chez ses collègues les moyennes et les médianes des temps de leurs classes ; seul un collègue a encore les données brutes. C'est maintenant la moyenne que l'on va retenir, parce qu'on peut calculer la moyenne de la population à partir de celle de sous-groupes, ce qui n'est pas le cas de la médiane et que l'on peut fait l'hypothèse que la moyenne permet d'approcher la médiane (soit que l'on suppose que les séries ne sont pas trop asymétriques).
On le voit, c'est donc « Étudier une série statistique » qui permet d'amalgamer l'OM : on est alors conduit à « vérifier les données », et à « choisir un ou des résumés numériques » voire « une ou des représentations graphiques » selon la nature de l'étude effectuée, les types de tâches de calcul des indicateurs apparaissant comme sous-types de tâches du type de tâches d'étude.

Cette problématique vaut pour la ***statistique descriptive*** dès le collège, comme on l'a vu dans les séances antérieures : seuls changeront les types de tâches permettant l'étude : ils seront au départ pour l'essentiel graphiques, puis s'appuieront sur le calcul de fréquences, puis encore sur la moyenne, etc.

Nous avons travaillé de la sorte sur les ***fonctions***, et nous avons mis en évidence que l'OM du secteur des fonctions pouvait s'organiser autour de la modélisation et de l'étude de phénomènes économiques, biologiques, physiques, géométriques et notamment l'optimisation et le calcul de grandeurs, les autres types de tâches venant s'intégrer comme sous-types de tâches des précédents.

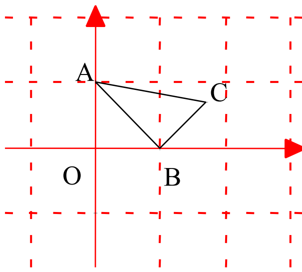
Nous avons également mis en évidence l'organisation du secteur du ***calcul algébrique*** autour des programmes de calculs, le type de tâches principal étant de déterminer un programme de calcul adapté à un calcul de grandeur, ce qui conduit à déterminer des programmes de calculs équivalents à un programme de calcul donné, ou encore à la détermination des variations d'une fonction (notamment en seconde avec le travail effectué sur les fonctions du second degré).

Du point de vue de la ***géométrie plane***, ce sont les types de taches de détermination de distances et d'angles, ou encore de construction de figure qui permettent d'organiser la matière mathématique de la scolarité obligatoire en ce domaine. Par exemple, montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme permet d'abord de montrer que des longueurs sont égales, et donc de déterminer des distances, ou que des droites sont parallèles et encore que des angles sont égaux, soit de déterminer des angles. Il en va de même quand on montre que deux triangles sont isométriques ou semblables en seconde. Plus généralement, on fait de la géométrie pour connaître les propriétés de l'espace. C'est ce que développait les notes du Séminaire 2004-2005 auxquelles on renvoie le lecteur.

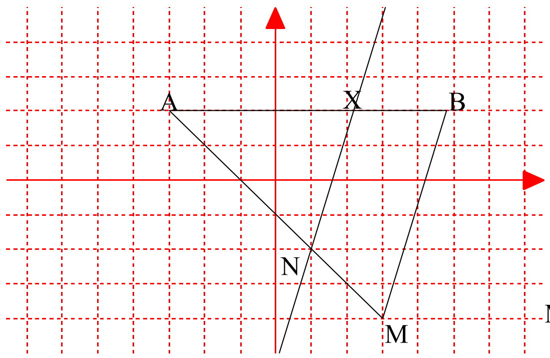
Les ***travaux numériques*** quant à eux sont au service du calcul des grandeurs et des programmes de calculs (nombres négatifs) : si l'on a par exemple une pièce de bois de longueur 2 m que l'on coupe en trois morceaux égaux, la longueur en mètre de chaque morceau sera la grandeur qui multipliée par 3 donne 2 m, soit 2/3 m.

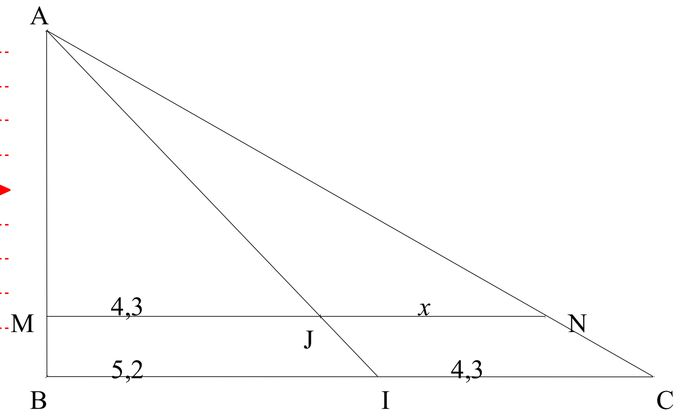
Un PER peut cependant ne pas concerner un seul secteur, voire un domaine,ou encore ne couvrir que partiellement les secteurs envisagés. Considérons ainsi par exemple le PER pour la classe de 4^{e} proposé dans la notice du temps de l'étude. On reproduit d'abord ci-dessous l'extrait de la notice :

2.9. La mise en œuvre des principes de gestion précédents suppose évidemment l'existence d'une ***dynamique de l'étude*** que le professeur s'interdira de laisser s'emballer, dériver, musarder, etc. Dans une organisation générale de l'étude d'un style maintenant classique, cette dynamique est supposée être régulièrement relancée par l'introduction, par le professeur, d'une AER nouvelle, souvent sans lien avec celles qui l'ont précédées non plus qu'avec celles qui suivront [46]. Cette structure faiblement intégrée de la suite des AER impulsant l'étude pose problème : l'expérience montre en effet que cette ossature didactique est relativement fragile parce que l'introduction *ex abrupto* d'une AER nouvelle se fait alors, en règle générale, sans ***motivation mathématique*** suffisante, et en particulier sans véritable raison autre que la volonté – du professeur, ou même de la classe, quand celle-ci a voix au chapitre en la matière – de lancer l'étude de tel ou tel bloc thématique. Par contraste, la dynamique à lancer et à nourrir gagne à avoir pour moteur, non une suite peu intégrée d'AER organisées chacune autour d'une question ***isolée***, dont le choix, extrinsèque, resterait entièrement à la charge du professeur (éventuellement en dialogue avec la classe), mais un petit nombre de suites d'AER intégrées au sein de ce qu'on nommera un PER, un ***parcours d'étude et de recherche*** engendré par une ***« grande » question***, c'est-à-dire par une question ayant un ***fort pouvoir générateur***, et qui va donc ***motiver***, au plan de la connaissance, l'étude de beaucoup de questions.
À titre d'exemple, considérons la figure ci-contre, sur laquelle $\widehat{ABC} = 90°$ et BC = 1 ; on voit aisément qu'on a AC = $\sqrt{3}$. On a ainsi ***« construit graphiquement »*** le nombre $\sqrt{3}$, et on obtient alors une valeur décimale approchée de ce nombre ***par une simple mesure de longueur***. Cet exemple illustre de manière simplifiée ce qu'on nommait autrefois ***calcul graphique***, domaine des mathématiques appliquées aujourd'hui presque oublié mais qui, pendant plus d'un siècle à partir de 1860, permit aux ingénieurs d'effectuer graphiquement des calculs en tous genres (évaluation de fonctions, calcul d'intégrales, résolution de systèmes d'équations, etc.). En 4^{e}, notamment, on peut se proposer un parcours d'étude et de recherche portant sur la question de la construction d'un « calculateur graphique », c'est-à-dire visant à développer un ensemble d'***algorithmes géométriques*** permettant d'effectuer graphiquement les principaux types de calculs rencontrés à ce niveau. Sur la figure ci-dessous, à gauche, on a ainsi « construit », à titre d'exemple, sur papier quadrillé, le nombre AX = $\frac{2}{3} \times 7{,}8$; tandis que, sur la figure de droite, on a construit, sur papier blanc, le nombre $x = \frac{4{,}3^2}{5{,}2}$.



[46] Sur la notion d'AER, voir la notice *Première rentrée des classes*.





À partir du calculateur graphique peu à peu construit, on pourra fabriquer un calculateur ***électronique*** en utilisant un logiciel de géométrie dynamique tel Géoplan ou Geogebra : il suffit pour cela d'exécuter sur Géoplan ou Geogebra l'algorithme géométrique trouvé, puis de demander au logiciel de mesurer la distance voulue. Mais on notera surtout que l'étude de la question génératrice du PER – comment calculer graphiquement ? – engendre nombre de questions qu'il peut être pertinent d'étudier en 4e (ou en d'autres classes). Ainsi apparaît « naturel », dans ce PER, de se demander quels entiers naturels n s'écrivent comme une ***somme*** de deux carrés d'entiers ($n = x^2 + y^2$) : si par exemple on cherche à « construire » le nombre $\sqrt{202}$, on observera que $202 = 11^2 + 9^2$ et il suffira alors de mesurer, sur une feuille de papier d'écolier, la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle ont pour longueur 11 cm et 9 cm. On justifierait de semblable façon le fait de s'interroger [47] sur la nature des entiers n qui s'écrivent comme une ***différence*** de carrés d'entiers ($n = x^2 - y^2$). Bien entendu, le fait de prendre la décision de lancer la classe dans l'étude de telle question poussée en avant par l'étude de la question à l'origine du PER, ou le fait, cette étude amorcée, de l'interrompre à tel moment, incombe en dernier ressort au professeur, agissant en directeur d'étude selon les principes indiqués plus haut.

Le PER envisagé motive d'abord une partie du secteur de la géométrie plane en classe de 4e. Il permet de façon claire d'envisager l'émergence d'une organisation mathématique relative au théorème de Thalès par le biais par exemple de la sous-question suivante :

comment calculer graphiquement des expressions du type $\frac{a}{b} \times c$?

qui donnera lieu à une AER faisant émerger le théorème de Thalès. On notera ici que l'on pourra ainsi produire le « premier théorème des milieux » comme cas particulier du théorème de Thalès et qu'on l'on pourra également être conduit à rencontrer le fait que diviser par b, c'est multiplier par $\frac{1}{b}$, ce qui constituera une première AER relative à la notion d'inverse et le PER permettra également de motiver un thème du secteur du calcul.

Ce sont ces « lignes de forces fonctionnelles » des programmes qu'il faut s'habituer à repérer et à mettre en place, en suivant les questions et ce qu'elles conduisent à rencontrer sans considérer le programme comme une structuration de la matière à étudier mais plutôt comme traçant, incomplètement parfois, nous l'avons vu, les limites des mathématiques enjeu de l'étude.

Ce type de travail est bien entendu soumis à un certain nombres de conditions et de contraintes. Nous avions introduit lors de l'étude de la notice Éducation mathématique et citoyenneté, sans le porter dans les notes du Séminaire, le modèle des niveaux de co-déterminations didactiques qui

[47] Cette dernière question peut être étudiée en 4e : on montre aisément que les entiers en question sont les entiers impairs et les entiers multiples de 4. La première, en revanche, ne peut guère être étudiée très avant (on démontre que les entiers cherchés sont ceux dans la décomposition en facteurs premiers desquels les facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 sont affectés d'un exposant *pair*) ; mais ce n'est pas une raison pour ne pas la poser, et l'étudier quelque peu, si elle se présente.

permet de rendre lisible et d'analyser les conditions et les contraintes qui pèsent sur les OM comme sur les OD qui les font émerger.

Civilisation
↑↓
Société
↑↓
École
↑↓
Pédagogie
↑↓
Discipline
↑↓
Domaine
↑↓
Secteur
↑↓
Thème
↑↓
Sujet

L'idée essentielle derrière ce schéma est que, lorsque le professeur et les élèves se rencontrent dans la classe autour d'une question à étudier, ce qu'il peut advenir est déterminé par des conditions et des contraintes qui ne sauraient se réduire à celles identifiables immédiatement dans la classe – la disponibilité de tel ou tel matériel, de tel logiciel, de telle organisation temporelle, de telles connaissances chez le professeur ou chez les élèves, etc. –, même si, bien évidemment, ces contraintes et conditions-là jouent un rôle éminent dans le « travail » de détermination. Car en même temps que jouent des conditions touchant la discipline enseignée et le thème étudié par exemple, jouent aussi des contraintes tenant à la pédagogie et à l'organisation de l'école, au type de société, voire à des aspects de civilisation plus large…

Ainsi la plupart d'entre vous ont rencontré des conditions/contraintes du niveau de l'École et de la Société, notamment par exemple le fait qu'aujourd'hui il y ait des élèves « à besoin particulier » auxquels l'École doit faire un « sort particulier » ou encore que l'on ait à accueillir sans autre forme de procès un élève qui change d'établissement scolaire en cours d'année. Nous avons également noté dans le travail sur la notice Questions et Réponses que le déni de problématicité qui prévaut dans notre société aujourd'hui est une contrainte qui pèse sur le travail scolaire.
On a également étudié que le fait que l'on soit dans une société laïque et démocratique implique la dispense d'une éducation par l'instruction, y compris sur des aspects qui peuvent sembler proprement éducatifs (au sens de l'éducation familiale) et nécessite que soit explicité des raisons d'être de l'étude des éléments de savoir ou encore que la technique d'étude employée permette d'éclairer le citoyen. (Voir la notice Éducation mathématique et citoyenneté).

Nous examinerons maintenant les techniques de conception et de réalisation de certains des moments de l'étude cité précédemment.

(À suivre la semaine prochaine)

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Travaux dirigés de didactique des mathématiques
Utiliser les TICE

N. B. La séance de travail dirigé dont rendent compte les notes ci-après n'a concerné qu'une moitié des participants au Séminaire environ. Elle ne sera pas reprise in praesentia *avec les participants composant l'autre moitié : par principe, et dans le cadre de leur formation au travail en équipe, ces derniers devront étudier le contenu du TDDM 5 à partir des notes qui suivent et avec l'aide, laissée à la convenance de chacun, de participants ayant dûment suivi cette séance.*

➔ Séance 6 : mardi 19 mai 2009 (17 h 20 – 18 h 50)

Programme de la séance : *La recherche sur Internet pour l'élaboration d'organisations mathématiques*

Les professeurs de mathématiques du lycée Emmy Noether ont examiné le projet de programme de mathématiques prévu pour entrer en vigueur l'année prochaine. Ils se sont aperçus qu'ils allaient avoir à diriger l'étude de l'un des trois thèmes suivant :

1. Cryptologie et codage

2. Utilisations de la théorie des graphes

3 Phénomènes d'évolution

Ils se sont donc réparti le travail à effectuer et Sophie Germain, professeur de mathématiques dans ce lycée, est chargée d'animer l'équipe de professeurs qui s'occupe du 3^{e} thème, les phénomènes d'évolution. Elle sollicite l'aide des élèves-professeurs de l'IUFM.

Le but du travail est de réunir de la matière de façon à constituer un dossier qui permettent aux professeurs du Lycée Emmy Noether de disposer de quelques phénomènes d'évolution et de leur étude, étude compatible avec l'environnement mathématique d'une classe de seconde.

Des éléments pour un corrigé figurent ci-après.

On notera que, le lendemain du travail effectué, le projet de programme « post-consultation » a été publié sur le site Eduscol : l'étude des thèmes en avait disparu...

Une chronique d'enquête...

Recherche sur la requête : modèles d'évolution
sous google et jusqu'à la page 8

Calibrer un *modèle d'évolution* de l'occupation du sol urbain. L'exemple de Belfort. Calibrating a *model* of urban land change. An example in Belfort **...**
http://www.cybergeo.eu/index2436.html

Étude mathématique de modèles stochastiques d'évolution issus de la théorie écologique des dynamiques adaptatives
http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00091929

Cette thèse porte sur l'étude probabiliste de modèles écologiques appartenant à la récente théorie des "dynamiques adaptatives". Après avoir précisé et généralisé le cadre et l'heuristique biologique de ces modèles, nous obtenons une justification microscopique d'un modèle d'évolution par sauts à partir d'un système de particules en interaction à valeurs mesure, décrivant la dynamique de la population à l'échelle individuelle. Il s'agit d'un résultat de séparation d'échelles de temps lié à deux asymptotiques : mutations rares et grande population. Ensuite, nous retrouvons une équation différentielle ordinaire connue sous le nom d'"équation canonique des dynamiques adaptatives" en appliquant une asymptotique de petits sauts au processus précédent. Cette asymptotique nous conduit à introduire un modèle d'évolution par diffusion comme approximation diffusion du processus de saut, dont les coefficients présentent une mauvaise régularité : dérive discontinue et diffusion dégénérée aux mêmes points. Nous examinons d'abord l'existence faible, l'unicité en loi et la propriété de Markov forte pour ces processus, questions liées au problème d'atteinte de certains points isolés de l'espace. Enfin, nous démontrons un principe de grandes déviations pour ces diffusions qui permet d'étudier le temps et le lieu de sortie d'un domaine attracteur --- question biologique fondamentale.

http://forums.futura-sciences.com/exercices-concours-examens/34393-maths-ts-equations-differentielles-modeles-devolution.html

Modèle de von Bertalanffy (1938)
équation différentielle

Les *modèles d'évolution* de déflexion des chaussées marocaines élaborés, à partir des données de l'auscultation systématique durant la période de 1992 à 2004 **...**
www.mtpnet.gov.ma/NR/rdonlyres/17F48F90-02BB-4DA2-B42A-2213394AF72B/978/208**Modèlesdévolution**desdéflexionsdeschausséesmar...

Développement d'un nouveau modèle d'évolution de profil de plage

16 oct 2008 **...** Description du *modèle*. 2.1. Module hydrodynamique. Les notations utilisées par la suite sont décrite en Figure 1. L'*évolution* de **...**
www.paralia.fr/jngcgc/10_05_castelle.pdf

DM 25 - Deux modèles d'évolution de bactéries
File Format: PDF/Adobe Acrobat - View as HTML
14 mai 2008 **...** Nous allons étudier deux *modèles d'évolution* de cette popu- lation : un premier à court terme et un second pouvant s'appliquer sur une **...**
www.ac-grenoble.fr/ugine/maths/documents/terminale_s/devoirs/DM25.pdf

Quelques modèles continus d'évolution de populations
File Format: PDF/Adobe Acrobat - View as HTML
Modèles à une seule espèce. *Modèles* à deux espèces. Prise en compte de l'âge. *Modèle* tenant compte de l'âge. Objet : *modèle d'évolution* de population **...**
www.lama.univ-savoie.fr/sitelama/Membres/pages_web/BOURDARIAS/enseignement/M1/cours/Pop_video.pdf

http://www.ac-grenoble.fr/maths/LAB/analyse/suites/Modele-evolution.htm

On cherche à modéliser l'évolution d'une population (animale ou végétale) en fonction du temps.
Une première approche consiste à considérer que l'accroissement de cette population d'une année à l'autre est proportionnel à l'effectif de cette population.
Plus précisément, si on note u_n l'effectif de la population l'année n, on a $u_{n+1}=au_n$ où a est un coefficient positif.
La suite (u_n) est alors une suite géométrique de raison a.
Si a>1, u_n diverge vers l'infini.

- En réalité, un certain nombre de facteurs viennent freiner cette croissance.

Par exemple, le territoire sur lequel vit cette population est, en général, limité, et si on considère que ses ressources ne permettent pas de faire vivre plus de M individus, il est naturel de faire intervenir dans la définition de la suite (u_n) un facteur qui sera d'autant plus proche de 0 que u_n est proche de M (la croissance est d'autant plus faible que la population est proche de sa valeur maximale théorique).
On modélise cette situation par la relation $u_{n+1}=au_n(1-u_n/M)$
Si on choisit M comme unité, la relation s'écrit $u_{n+1}=au_n(1-u_n)$

On remarque qu'on ne ramène pas grand chose de compatible avec l'outillage mathématique d'une classe de seconde.

2.

évolution d'un phénomène naturel : réchauffement climatique
Requête sous google : évolution réchauffement climatique modèle

Réchauffement climatique et El Niño - climat-evolution
11 avr 2009 **...** Le *réchauffement climatique*, issu du forçage radiatif d'origine **...** Les *modèles* actuels (voir ici et ici) ayant plutôt tendance à prévoir **...**
www.**climat-evolution**.com/article-30128142.html

http://www.climat-evolution.com/article-30128142.html

qui permet d'aller là :

http://camille.risi.free.fr/simclimat/

Où on trouve un logiciel et un modèle « simplifié » d'évolution du climat, encore complexe...

1. *Le réchauffement climatique et la santé - Page 5*

Climat : pourquoi les *modèles* n'ont pas tort · Le *réchauffement* **....** Toutes choses égales par ailleurs, l'*évolution climatique* se traduirait donc, **...**
www.x-environnement.org/index.php?option=com_content&view=article&id=58%3A2000&catid=36%3Ajaune-rouge&Itemid=41...4

A partir de Wikipedia, Réchauffement climatique, accès à deux articles de courrier international et Pour la Science

Tableur et graphisme

Pour simuler l'*évolution d'une population* avec le modèle de Malthus, on note : **...** Lorsque la *population* approche de la capacité *limite* L, les *ressources* se **...**
www.rpn.ch/lddr/informatique/tabl_graph.pdf

Intéressant car il donne le moyen de simuler les modèles de Malthus et de Verhust avec un tableur sans trop de difficultés mathématiques.

Requête Cohortes fictives

Une application de la *méthode* Age, Période, *Cohorte* (APC)

Format de fichier: PDF/Adobe Acrobat - Version HTML
cohortes fictives : pour réduire la durée d'observation à une pério- **.....** La *méthode* d'estimation des effets d'âge, de période et de *cohorte* **...**
www.uclouvain.be/cps/ucl/doc/sped/documents/WP7.pdf - Pages similaires
de P WANNER - Autres articles - Les 3 versions

Données permettant d'étudier l'évolution de la fécondité en Europe

DISCUSSION PAPERS

Format de fichier: PDF/Adobe Acrobat - Version HTML
système d'enseignement à un moment donné (*méthode des cohortes fictives*) ; **.....** L'avantage de la *méthode des cohortes fictives* tient au fait qu'elle ne **...**
statistiques.wallonie.be/dyn/14/fichiers/DP199903172.pdf

Requête Modèle évolution population discret

Évolution de la *population*: Pour lui, l'hypothèse basse est le doublement de la **...** *Modèle* Malthusien *Discret*. La taille Yn de la *population* à la **...**
*www.unice.fr/sciences-vie/**population-discret**.pdf*

Intéressant ; donne en gros ce qu'on a besoin de savoir, accessible et avec des références à des textes historiques et à des données.

Il resterait bien entendu à constituer une note de synthèse qui serait la réponse à apporter à l'équipe de professeurs.

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance 24b : mardi 26 mai 2009

1. Organisation didactique, une synthèse (suite) // 2. Forum des questions

Nous avons insisté dans le travail effectué dans l'année sur la conception et la réalisation des trois premiers moments : il s'agit de partir d'un problème suffisamment générateur (voir *supra*) qui permettra de rencontrer l'OM enjeu de l'étude généralement par le biais de types de tâches de cette OM et de manière à en faire apparaître une raison d'être. La direction d'étude se fera sous la forme de questions cruciales, dont la mise au point demande de suivre au plus près la dynamique de l'étude du problème. (Voir le travail effectué lors de la séance 23 et lors du travail sur les AER de statistique.) Non seulement il s'agit de suivre généralement « le chemin inverse » que suivrait un énoncé de problème donné à faire en autonomie, mais encore il faut le faire de manière à ne pas empiéter sur le *topos* des élèves.

Ces questions cruciales doivent notamment permettre de faire réaliser les moments exploratoires et technologico-théoriques, ces deux moments étant fortement articulés, nous y reviendrons.

Du point de vue de la réalisation du moment exploratoire, nous avons vu le profit qu'il y avait à tirer d'avoir plusieurs spécimens du même type de problèmes de manière à rendre accessible le travail à effectuer et à pouvoir enrichir les observations sur lesquels le travail d'émergence va pouvoir prendre appui. À cet égard, nous avons insisté sur la nécessité de s'assurer que les élèves disposaient bien d'un milieu qui rende possible ce travail exploratoire et le travail technologico-théorique associé.

On peut structurer le travail à effectuer a priori par le professeur de ce point de vue par une suite de questions telle la suivante :

Quelle est la fonction didactique de la séance (ou de la partie de séance) ?
À propos de chacune des étapes prévues, quels sont les moyens qui sont à la disposition des élèves pour les accomplir ? Est-ce qu'ils les ont à leur disposition d'emblée ? Sinon, que faire pour les « convoquer » ?
A-t-on prévu un dispositif qui permette le travail collectif ? qui permette aux élèves de contrôler leur travail et/ou celui de la classe ? (le dernier morceau supposant que l'on dispose d'un dispositif de travail collectif) De pouvoir reprendre le travail en autonomie ?

Une question essentielle se pose dans la réalisation d'un moment exploratoire : quand plusieurs techniques possibles surviennent, que faire ?

Examinons à ce propos un extrait d'un compte rendu d'observation d'une classe de seconde. Il s'agit du début d'une AER pour introduire les triangles semblables.

ACTIVITES : TRIANGLES SEMBLABLES

ACTIVITE 1:

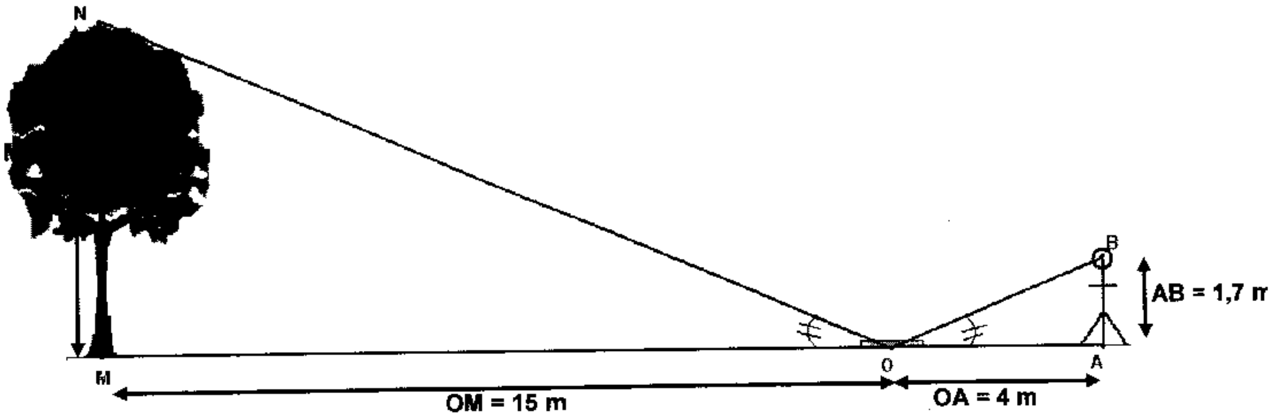
Partie 1

Eric souhaite mesurer la hauteur d'un arbre. Pour cela, il réalise l'expérience suivante :

- Il place un miroir au sol situé à 15 m du pied de l'arbre.
- Il se déplace après le miroir jusqu'à ce qu'il puisse voir la cime de l'arbre dans le miroir. Il s'est alors déplacé d'une distance de 4m.

De plus, on sait que les yeux d'Eric se situent à 1,70 m du sol.

On représente son expérience par le schéma ci-dessous :

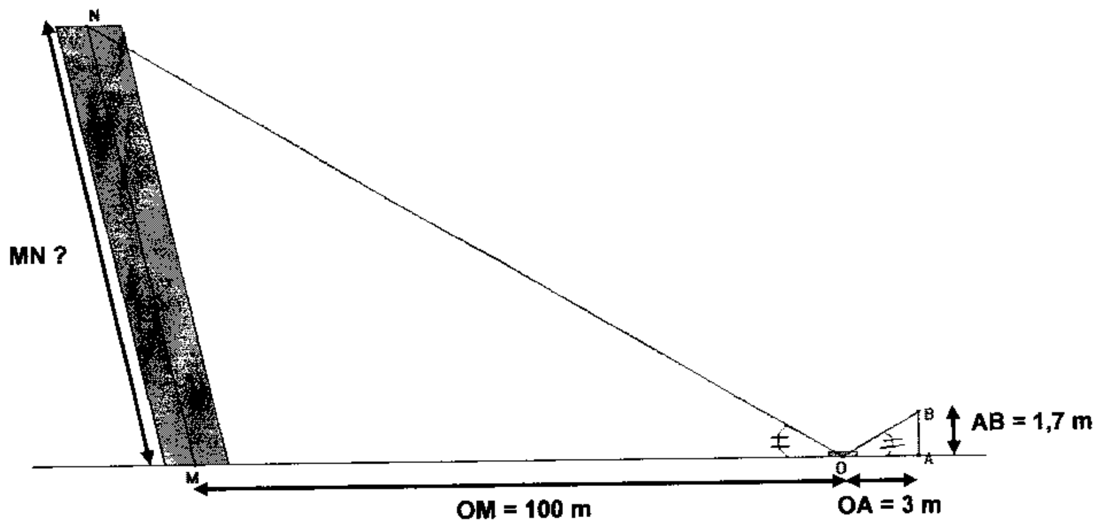


Quelle est la hauteur MN de l'arbre ?

Partie 2

Eric se rend en Italie et souhaite réaliser la même expérience avec la tour de Pise.

On représente son expérience par le schéma suivant :



Pensez-vous que cette expérience va permettre de calculer la hauteur MN de la tour de Pise? Justifier.

Après 2 minutes dédiées à une lecture individuelle, P explicite l'objet de l'activité.
« Votre attention s'il vous plaît. Il y a un personnage qui veut savoir la hauteur de l'arbre. Il va mener une expérience. Pour cela, il va placer un miroir à 15 mètres de l'arbre, et il va se déplacer derrière le miroir, d'une longueur de 4 mètres, jusqu'à ce qu'il puisse voir la cime de l'arbre. Grâce à cette expérience-là, a priori, il serait capable de calculer la longueur MN de l'arbre. Donc dans un premier temps, ce que je vais vous demander, c'est de repérer dans la partie I les données et la conclusion à laquelle on doit aboutir. Puis de réfléchir aux méthodes que vous connaissez pour résoudre ce type de problèmes. »
Des élèves lancent « Pythagore », d'autres « Thalès » et P leur enjoint de se mettre au travail. Les élèves s'affairent pendant que P circule dans la classe.

Deux minutes plus tard, P récolte les données en interrogeant les élèves, en notant au tableau au fur et à mesure.
On obtient d'abord que la distance OM vaut 15 mètres, que OA = 4 mètres. Puis que l'on a deux triangles rectangles, MNO et OAB, et enfin que la hauteur AB est égale à 1,7 m.

P relance : « Qu'est-ce qu'on a d'autre comme information ? ... les angles peut-être ? »
Des élèves donnent alors successivement que $\widehat{BOA} = \widehat{MON}$; puis que $\widehat{OMN} = 90° = \widehat{BAO}$.
Ce qu'il faut calculer : la longueur MN.

P : « Qu'est ce que vous connaissez comme méthode pour calculer une longueur ? »
Les élèves citent pèle-mêle Pythagore, Thalès, le théorème des milieux ou la trigonométrie.
P : « Pour utiliser Pythagore ou la trigonométrie, il faut quoi comme conditions ? »
Des élèves disent qu'il faut un triangle.
P : « Quoi comme triangle ? »
Es : « Rectangle ».
P approuve, puis demande aux élèves de considérer l'activité 2 : « est-ce qu'on a les deux triangles rectangles ? » Les élèves conviennent que ce n'est pas le cas, et on disqualifie ainsi les deux techniques. On souhaite donc calculer MN à l'aide du théorème de Thalès.

Commentaires
Les élèves ont déjà travaillé sur les triangles isométriques et on voit sans doute l'effet de ce travail dans l'énoncé des éléments pertinents lorsque P demande des techniques de calcul de longueurs.

Pythagore « ne marche pas » directement ; on n'a pas les moyens de calculer l'hypoténuse du grand triangle si l'on ne calcule pas d'abord le cosinus de l'angle en O, ce qui est faisable avec le petit triangle en passant par Pythagore pour déterminer l'hypoténuse.
La trigonométrie seule, en revanche, donne le résultat ; on a la tangente de l'angle en O avec le petit triangle : $\frac{1{,}7\ m}{4\ m} = 0{,}425$. On obtient donc que $\frac{MN}{15\ m} = 0{,}425$, soit que MN = 6,375 m. Mais le résultat ne pourra pas s'étendre dans le cas de triangles non rectangles. Cela aurait eu tout à fait sa place dans le travail exploratoire, et cela aurait permis à la fois de synthétiser le travail fait au collège (ce qui est un objectif du programme), mais aussi d'en préciser la portée en justifiant son insertion dans l'OM à propos des triangles semblables.

La réponse de la professeure stagiaire à la question qui nous occupe est autre : il s'agit de disqualifier à peu de frais les techniques qui n'entrent pas dans le cheminement prévu, technique didactique dont on vient de voir ici qu'elle n'est pas fonctionnelle à l'égard de la constitution d'une organisation mathématique amalgamée. Elle est souvent le symptôme d'un défaut de conception de la séquence à cet égard.

Nous avions considéré dans une séance antérieure un épisode de synthèse qui a eu lieu dans une classe de seconde à la fin du mois de janvier de cette année.

Cette synthèse était relative à un thème que le professeur a intitulé « Vecteurs et équations de droites ». Le travail sur les vecteurs et les repères dans le plan a déjà eu lieu et a donné lieu à une synthèse. Il s'agit là donc de synthétiser le travail mené sur les équations de droites. P est parti de la poursuite d'une AER faite à propos des vecteurs, où il s'agissait de « caractériser l'alignement de points dont on connaît les coordonnées ». Une des « techniques proposées » était la suivante :

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{A}\,(7\,;3) & 7 = 3 \times 2 + 1 \\ \mathrm{B}\,(13\,;6) & 13 = 6 \times 2 + 1 \\ \mathrm{C}\,(28\,;14) & 28 = 14 \times 2 + 0 \neq 14 \times 2 + 1 \\ \mathrm{D}\,(17\,;8) & 17 = 8 \times 2 + 1 \\ \mathrm{E}\,(25\,;12) & 25 = 12 \times 2 + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{A, B, D et E alignés ;} \\ \quad \text{C non alignés avec les autres.} \end{array}$$

Et il s'agissait alors « d'éprouver cette technique sur les autres points de l'AER ». C'est cela qui a permis de faire émerger les équations de droites. Dans la première partie de la séance, la classe a donc travaillé sur le problème suivant : Quelle relation existe-t-il entre A(0; 2), B(2; 5) et M(x, y) pour que les points A, B et M soient alignés ? Et c'est à l'issue de cette étude que survient la synthèse.

On notera que l'on avait ici une autre technique de réalisation d'un épisode semblable du moment exploratoire : quand une autre technique surgit qui n'entre pas dans le cheminement prévu, l'écarter provisoirement pour y revenir ultérieurement. C'est cette technique que nous avions également vu à l'œuvre dans le premier compte rendu analysé.

Moment exploratoire et moment technologico-théorique sont dialectiquement liés, on l'a dit, et on rencontre au moins deux cas de figures de cette dialectique.

Dans le premier, on fait émerger une technique dont la validité dépend de celle d'un élément technologico-théorique qui émerge de l'exploration, qu'il va donc falloir établir et, dans certains cas, déduire de la théorie [géométrique, analytique, algébrique, numérique statistique...] disponible. C'est le cas par exemple dans l'émergence de l'OM suivante, relative à la construction à la règle et au compas d'une droite coupant un cercle de centre O en un point A de ce cercle, et en ce point seulement. Une exploration graphique de la situation conduit à essayer de repérer la droite par rapport au « seul » élément fixe de la configuration, le rayon ; si l'on s'assure du fait que cette droite est perpendiculaire en A au rayon OA, la technique est faite, puisqu'il suffira de construire à la règle et au compas la perpendiculaire en A au rayon OA. C'est ce cas qui était à l'œuvre dans la première séance que nous avons analysé.

Dans le second, l'exploration d'un type de problème fait émerger une technique qui repose sur des éléments technologiques antérieurement établis, dont la systématisation amène à voir que l'on fait « toujours la même chose », cette « chose » fonctionnant comme « lemme technique » et pouvant être enregistrée dans la théorie de façon à être accomplie une fois pour toute et permettre de produire alors une autre technique, moins coûteuse.

C'est le cas par exemple, pour sortir de la géométrie, dans la résolution du trinôme du second degré en classe de 1re : on va au départ reconnaître le début d'un carré, puis une forme $A^2 - B^2$ ou encore $A^2 + B^2$; etc. L'accomplissement systématique de cette technique en fera émerger la généralité ; mise en œuvre sur la forme générique d'un trinôme du second degré, elle conduira à la définition du discriminant et au théorème donnant les cas d'existence des solutions et leurs valeurs, résultat qui permettra de produire la technique « classique » : on calcule le discriminant ; s'il est positif, etc.

On était dans ce cas lors de la synthèse citée pour le type de tâches « Déterminer une équation de droite », ce que le professeur n'avait sans doute pas bien analysé puisqu'il ne va pas utiliser le résultat technologique fraîchement démontré pour produire la technique.

L'institutionnalisation s'effectue sous deux types de dispositifs, les bilans d'étapes et la synthèse, les premiers permettant de préparer la seconde. La synthèse gagne généralement à être différée de façon à ne pas occuper trop de temps et à mettre en forme une OM suffisamment amalgamée. Il est important qu'elle contienne l'ensemble de l'OM et, donc, les types de tâches et les techniques et qu'elle prenne en charge non seulement le niveau thématique mais aussi le niveau du secteur. Sa réalisation doit prendre appui sur le travail des élèves et on peut, si on la diffère suffisamment, demander aux élèves de la préparer hors classe.

La recherche de l'amalgamation de l'OM au niveau du chapitre est essentielle : par exemple, à l'issue du travail mentionné plus haut sur les équations de droites, le type de tâches « démontrer que 3 points sont alignés » a maintenant deux techniques, dont l'une n'a pas été institutionnalisée bien qu'elle ait émergée de l'AER. Il s'agit donc d'amalgamer ces techniques en une seule, en précisant les occasions d'emploi de chacun des éléments. On obtiendrait par exemple :

Démontrer que 3 points A, B et C sont alignés
Si les points sont donnés par des conditions vectorielles, montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires en les exprimant dans un repère fixé par la configuration ;
Si les points sont donnés par leur coordonnées, déterminer l'équation d'une droite définie par deux points et montrer que les coordonnées du troisième point vérifient l'équation ;
Si l'on a déjà l'équation d'une droite définie par deux des points, montrer que les coordonnées du troisième point (éventuellement à déterminer) vérifient l'équation.

Pour déterminer l'équation de droite dans le deuxième cas, on voit alors que si l'on écrit la colinéarité d'un vecteur $\overrightarrow{AM}$ avec $\overrightarrow{AB}$, on reproduit en la complexifiant et en l'allongeant, la première technique. On est donc conduit à s'interroger sur des techniques de détermination d'équation de droites autres, et la technique qui consiste à calculer coefficient directeur et ordonnée à l'origine a toute chance de venir à l'esprit. Cela aurait sans doute permis de voir le défaut de fabrication de l'OM mentionné précédemment.

En outre elle permet, dans le cas où « plusieurs techniques » ont émergé, de les articuler en une seule en précisant les conditions d'emploi et la portée de chaque « morceau », et donc de ne pas laisser cela à la charge de l'élève (ce qui peut s'avérer très dommageable comme on le voit à travers l'analyse d'un certain nombre de corpus B).

Nous terminerons ce tour d'horizon par le moment de travail des OM. Sa réussite est dans l'ensemble conditionnée d'abord par la conception de l'OM et sa mise en forme : si celle-ci est diffractée, ou encore si les techniques ne sont pas adéquatement fabriquées, notamment du point de vue de l'insertion d'étapes de contrôle et de vérification utilisant autant que faire se peut la calculatrice, le moment de travail a peu de chance de porter tout le fruit que l'on peut en attendre dans le temps qui lui est généralement alloué.

2. Forum des questions

Faut-il compter dans le nombre moyen de 3 ou 4 spécimens de types de tâches, celui qu'on donne dans une évaluation intermédiaire (test, interro de 10 min) ? (5^{e}, 23)

L'objet d'une évaluation intermédiaire est de réaliser, partiellement bien sûr, un moment de l'évaluation : on ne peut pas s'en servir pour réaliser une partie du moment du travail de l'OM, qui aura dû être, sur les types de tâches évalués, déjà réalisé.

Lorsqu'une technologie a émergé d'une AER dont la justification est seulement illustrée dans le cas général, mais non démontrée, est-ce que la démonstration doit apparaître lors du travail de l'organisation mathématique, sur des exercices ? Et dans quelle mesure ? (2^de^, 23)

Comme dans la question précédente, la réponse réside dans l'analyse des moments de l'étude : la réalisation du moment technologico-théorique d'une OML ne saurait en général réaliser un moment de travail de ladite OML. Il est cependant possible, dans certains cas, qu'une démonstration d'un résultat permette de travailler des éléments d'organisations mathématiques antérieurement étudiées, ou conjointement étudiées, et elle pourra alors figurer dans le moment de travail de ces OML déjà étudiées.

Lors des séances d'exercices, est-il préférable que les élèves écrivent leurs recherches personnelles sur leur cahier de brouillon ou sur leur cahier d'exercices ? (2^de^, 21)

A priori, la réponse devrait être « sur leurs cahiers d'exercices » : il faut faire entendre, aux élèves comme au professeur, que la coexistence des recherches, et des erreurs éventuelles surtout, avec la correction permet de mettre en lumière les écarts existants qui constitue une aide importante au moment de la préparation des évaluations pour s'assurer que les difficultés rencontrées sont dépassées. On notera cependant que deux conditions au moins, qui peuvent jouer comme contraintes, pèsent dans les classes et peuvent gêner le travail de ce point de vue : le fait que les élèves veulent avoir un cahier « propre », sans rature ; le fait qu'il est nécessaire pour avancer d'oublier qu'on s'est trompé sur certaines choses. Suivant les classes, le professeur pourra donc transiger et accepter la présence des recherches sur le cahier de brouillon, ou encore faire une distinction entre des brouillons de recherche qui figureront sur le cahier de brouillon et leur « première » mise en forme qui figurera elle sur le cahier d'exercices, etc.

Concernant le thème du calcul littéral, quel moyen peut-on employer pour faire comprendre aux élèves qu'une lettre *n* peut représenter n'importe quelle valeur numérique ? (4^e^, 24)

Nous avons vu à l'occasion du travail que nous avons mené sur le compte rendu d'observation en classe de 4^e^ portant sur le calcul littéral d'une part, sur l'utilisation des TICE d'autre part, que la constitution de l'OM relative au calcul littéral passe par un travail exploratoire numérique qui doit utiliser largement le tableur. Au sein de ce travail exploratoire, les élèves vont devoir être conduits à manipuler de « grandes séries de nombres », qu'ils modéliseront d'abord avec la cellule du tableur, avant de passer à une désignation plus générique par une notation littérale. On notera que ce travail est préparé dans le travail effectué en 5^e^ sur l'évaluation de programmes de calculs mais aussi par l'utilisation des formules de calculs d'aire ou de volume.

Mes élèves savent résoudre des équations, mais sont en difficulté face à des problèmes où il faut mettre en équation. Comment remédier à cette difficulté ? (4^e^, 24)

On a là un effet, classique mais peu repéré, du découpage généralement insuffisant d'une technique, relative ici aux problèmes de modélisation où le modèle n'est pas donné mais à produire.

La première chose à repérer, à cet égard, c'est que ces problèmes mettent en jeu des grandeurs qui sont en général liées entre elles, et que cette ou ces relations peuvent s'exprimer en fonction d'une ou deux grandeurs inconnues. En quatrième, on a généralement une seule grandeur inconnue et c'est le plus souvent directement cette grandeur inconnue que l'on demande de déterminer.

Par exemple dans le problème suivant, issu d'un ouvrage pour la classe de 4e (Bréal 2007) :

Les figurines à collectionner du jeu « Tar Wars » sont les « communes » qui valent 0,75 €, les « rares » qui coûtent 2 € et les « collectors » à 4,50 €. Fred a acheté 7 figurines communes, 8 rares et des collectors. Il a payé 39,25 €. Combien de figurines collectors Fred a-t-il achetées ?

La grandeur inconnue est le nombre de figurines collectors achetées par Fred, que l'on note *n*.

On a plusieurs autres grandeurs qui interviennent dans l'énoncé : le prix total payé, le nombre de figurines rares, etc. Ces grandeurs sont liées entre elles par le fait que le prix total payé est la somme du prix payé pour chaque sorte de figurines, et on obtient ainsi que 39,25 € = 7 * 0,75 € + 8 *2 € + *n* * 4,5 €. Etc.

On classait autrefois, dans les ouvrages préparant le certificat d'études primaires par exemple, les problèmes de modélisation par types de problèmes organisés selon la situation modélisée : les fameux « problèmes de robinet », les problèmes d'intérêt, etc. Cela avait l'avantage de faire ressortir les ingrédients de technique de modélisation propres à chaque type de problèmes.

Par exemple le problème ci-dessus pourrait être identifié comme étant un « problème d'achat », dans lequel on aura à déterminer soit un nombre d'objets, soit un prix, unitaire ou pas. Il s'agit alors d'exprimer le montant total payé comme somme des prix partiels payés, chaque prix partiel étant éventuellement obtenu en faisant le produit du prix unitaire par le nombre d'objets. C'est cela qu'il faudra ***construire avec les élèves*** par la fréquentation de plusieurs spécimens de types de problèmes de modélisation. On notera que l'évaluation portera sur un type de problèmes de modélisation déjà rencontré.

Comment établir une AER sur le type de tâches « résolution d'équation » en quatrième ? (4e, 24)

Nous avons déjà travaillé cette question et nous avons rencontré par exemple la situation du magicien (voir vidéo du MEN) qui fournit un bon argument d'AER à ce propos se basant sur la recherche de l'égalité de deux programmes de calculs, même si sa mise en forme peut être améliorée, l'utilisation d'un logiciel de calcul formel ne s'avérant pas incontournable. L'égalité des deux programmes de calcul de départ est obtenue pour 0,625, et il est peu probable que les élèves trouvent par exploration le nombre cherché. On peut alors se poser la question d'explorer d'autres programmes de calculs, plus simples, qui nous permettrait de faire émerger une technique pour trouver la solution du problème initial. Le travail effectué préalablement sur l'équivalence des programmes de calcul à propos du développement d'une expression algébrique devrait permettre que surgisse l'idée de se ramener à un programme de calcul plus simple et qui soit équivalent, dont l'exploration sera menée avec le tableur.

Quelle est la différence entre la règle de trois et le produit en croix ? (24)

Considérons le problème suivant ;
Il faut à Benoît 7 heures pour monter 5 meubles en kit ; combien lui faudra-t-il de temps pour en monter 8 ?

Règle de trois : Il faut 7 heures pour monter 5 meubles en kit ; pour monter 1 meuble, il faudra 5 fois moins de temps, soit $\frac{7}{5}$ h et pour en monter 8, 8 fois plus de temps soit 8 $\frac{7}{5}$ h ou encore 11 h et 12 min.

Produits en croix : il y a proportionnalité du temps passé, et si *t* est le temps cherché on a

$$\begin{array}{c|c} 7 & 5 \\ \hline t & 8 \end{array}$$

et on obtient que 7 * 8 = 5 * *t*.

Traditionnellement, on écrivait que 7 : 5 :: *t* : 8, ce qui se lisait de la façon suivante : « 7 est à 5 comme *t* est à 8 », et on utilisait que « le produit des extrêmes est égal au produit des moyens » pour obtenir l'égalité.

On pourra se reporter, pour davantage de détail, aux notes des séminaires des années antérieures, et notamment celles de l'année 2000-2001.

Le jury d'enseignement a-t-il le corpus A en sa possession ?

Oui, parce que le candidat l'apporte avec son corpus B...

La date de la séance de bilan sera communiquée par mel : ce sera vraisemblablement le mardi 23 juin ou le mardi 30 juin 2009.

IUFM d'Aix-Marseille
PCL2 de mathématiques
2008-2009

Séminaire de didactique des mathématiques

Résumés des séances

➔ Séance de bilan : mardi 30 juin 2009

Programme de la séance. 1. Compte rendu du questionnaire rendu le 5 mai 2009 // 2. Un bilan des validations // 3. Et après ?

1. Compte rendu du questionnaire

On donnera ci-dessous les réponses apportées par les questionnaires rendus, et on les commentera oralement.

Point positif de la formation

L'échange d'informations et de problèmes rencontrés entre professeurs stagiaires.
Échange avec des stagiaires.
Les échanges entre stagiaires (intra ou inter-disciplinaire).
L'échange avec les autres collègues. Avoir appris une théorie qui nous aide dans la pratique de notre profession d'enseignant.
Des échanges riches et constructifs avec plusieurs formateurs m'ont permis de répondre à mes questions et d'orienter mes recherches. Je souligne ici les qualités de disponibilité et d'écoute des formateurs.

La formation m'a appris à mieux établir durant l'année le topos des élèves, à ce qu'ils soient acteurs de la séance, en les rendant responsables.
Les réponses apportées aux questions du forum sont très utiles surtout sur les sujets sur lesquels je n'avais pas trop réfléchi.
La réponse aux questions de la semaine, même a posteriori, nous permet d'avancer parce que ce sont souvent des questions récurrentes qui nous concernent tous.
La diversité des thèmes étudiés par opposition à la limitation du programme dans une classe unique.

Le travail sur la préparation de thème nous aide à prendre le recul nécessaire sur les mathématiques à enseigner et la façon de les enseigner.
Apprendre à amener des leçons par une problématique (émergence de la raison d'être).

Les idées d'AER (recherche dans les archives du séminaire)

Le travail en TD TICE fournit des dispositifs pour l'étude de certains thèmes et en apporte une meilleure motivation.
Les séances de TD TICE m'ont permis de trouver de nouvelles utilisations à Word et Excel.
La formation et la sensibilisation aux TICE dans nos pratiques quotidiennes sont des points qui sont pour moi très positifs dans la formation proposée.

Apprentissage d'une théorie concernant l'enseignement des mathématiques.
La formation en didactique des mathématiques, les méthodes pour mettre l'élève au centre de l'étude.
Les enseignements dispensés sont fort utiles pour mon stage en responsabilité.

Le travail est progressif : plus on apprend de choses et plus on étudie les OM / OD... en profondeur. De plus des notions annexes sont étudiées (histoire de l'éducation, orientation...)
Plus le temps passe et plus la formation se recentre sur notre pratique professionnelle, sur comment aborder certains points des programmes.

Les conseils avisés pour la rédaction du TER.
La réalisation du corpus B a été très enrichissante, notamment au niveau de l'observation des traces écrites des élèves.

La simulation des soutenances TER et corpus B en GFP.

Les GFP permettent de réinvestir et comprendre les notions vues en séminaire. La complémentarité de ces deux dispositifs est très positive et permet une acquisition plus rapide des informations.

GFP - Séminaires.
On se pose beaucoup de questions sur notre métier, de la conception d'une séquence au relationnel avec les élèves, c'est très enrichissant.
Le ratio formation / stage en responsabilité est bien équilibré, il nous permet de ne pas enseigner « la tête dans le guidon toute l'année » mais au contraire de pouvoir modifier son enseignement en le réajustant au fur et à mesure.

Séances de GFP qui répondent à nos questions les plus urgentes.

La diversité des formations : GFP, séminaires, GFPIT, FIT,… Même si certains points sont travaillés plusieurs fois, il y a toujours des éléments qui peuvent nous servir.

L'apprentissage de la « fabrication » d'une activité en séminaire et en GFP ; l'ouverture d'esprit des professeurs des autres disciplines en GFP IT ; les stages.

Le stage d'observation, qui offre l'opportunité de mieux appréhender les différentes facettes d'un établissement. Par exemple, un stage avec un CPE.
Les GFP IT ont permis de nombreux échanges en donnant un cadre pour coopérer.
Le GFP-IT et les FIT, pour leur aspect pragmatique et interdisciplinaire

Les GFP IT.

Le fait que certaines parties soient interdisciplinaires.

Point négatif de la formation

Il est apparu au cours de l'année des répétitions dans le GFPIT et dans le modules FIT.
Certains intervenants des FIT ne semblent pas trop savoir quoi nous raconter... Séances creuses.
Les séances de GFPIT ne m'ont pas appris grand chose contrairement aux modules FIT.
Les GFP IT qui sur le papier peuvent être satisfaisants mais ils se sont révélés pour moi décevants : mise en place et organisation difficile, structure et contenu au choix des professeurs stagiaires. Pas de programme clair. Point positif : le stage.

Certains FIT, bien que intéressants, ne m'ont pas aidée à progresser en tant que professeur.

Les GFPIT devraient être mis en place plus tôt dans l'année (mais je sais que c'était la première année et qu'il y aura peut être des changements à ce sujet pour les années à venir).

Je n'ai pas saisi le réel intérêt des GFP IT.

Le lien trop distant entre l'IUFM et les maîtres de stage.

Un petit manque d'information concernant le déroulement de la soutenance de mémoire.
Manque d'information sur les corpus A et B.
Les questions posées ainsi que ce qu'on attend de nous n'est pas toujours très clair.
L'absence d'un calendrier et d'un emploi du temps clair et précis sur une seule page : les informations sont disséminées entre différents points des différents sites.

Le faible nombre d'études de cas à tester/mettre en œuvre *a posteriori* dans les classes. L'idée louable d'un travail collectif est-elle réellement réalisée ?
J'aurais souhaité étudier plus d'AER des collègues.
La synthèse du séminaire est toujours difficile à faire.

Les horaires des TD qui ne tiennent pas compte des situations familiales (enfant à charge, déplacement en train, etc.)
On devrait avoir plus de formation en informatique, notamment sur les logiciels de géométrie dynamique.

Séances informatique du mardi soir.

Le C2i2e (On ne comprend pas toujours ce qu'il faut faire…).

Les recherches dans les Archives du Séminaire ne sont pas disponibles sur le site.
Lors des recherches dans les archives, certains thèmes abordés lors d'exposés oraux réalisés par les stagiaires m'ont intéressé. Je regrette l'absence de traces, ou synthèses, des ces exposés dans les archives.

Il me semble dommage que les professeurs stagiaires enseignant en collège et en lycée soient ensemble, faire des groupes suivant ce critère permettrait de discuter des problèmes, ou des programmes.

L'abord moindre du moment du travail (hors évaluation) et du calibrage des exercices.

On se ramène souvent lors de l'étude d'OM à l'étude de cas particuliers (les vecteurs, géométrie dans l'espace). Ne pourrait-on pas parler plus généralement (ex : gestion des enchaînements type de tâches / sous-types de tâches) ?

Il y a beaucoup de questions posées et on ne peut en traiter qu'un certain nombre.

Le fait de ne pas avoir plus parlé de gestion de la discipline dans les "classes difficiles" qu'on pourrait avoir l'année prochaine.

L'absence de suivi au niveau de la rédaction du corpus B.

Certains contenus sont redondants.

Je trouve que la masse de travail venant de la préparation des cours, du mémoire ICFP et de l'ensemble des dossiers à étudier à l'IUFM, ne nous permet pas de nous donner à fond pour chacune de ces tâches, et c'est dommage.
Avant les vacances, il y a eu de nombreuses échéances (corpus B, visite, mémoire,...)
J'ai trouvé que la période entre les vacances de février et les vacances de printemps a été assez lourde au niveau de la charge de travail avec le corpus B, la visite et le mémoire.
Il y a beaucoup trop de dispositifs différents dans un laps de temps assez court, on se disperse sans trop savoir quelles sont les priorités.
Le rythme imposé pour le corpus B / TER.
Entre les FIT, le GFP IT, les TICE, etc., c'est une année où on fait peut-être un peu trop de choses à la fois.
Énormément de choses à faire : FIT, GFP IT, Mémoire, SPA, C2i2e, Corpus B... à faire coexister avec notre stage en responsabilité, il est parfois difficile de mener tout ça de front.

Tout le travail à faire dans le cadre de la formation (mémoire, corpus, recherches, …) ; décalage important entre les questions qu'on se pose et les réponses apportées en séminaire.

Point positif du travail personnel

Le travail avec la PCP et les reproches qu'elle m'a fait.

Le travail avec mon PCP.

Certains élèves, une demi-classe environ, est intéressée et suit les leçons.

Lors des GFP et des séminaires, des points importants pour la réalisation de la préparation des séances ont été apporté (questions cruciales ; comment ? Pourquoi ?)
Conception des AER.
Ma façon de concevoir les AER et de choisir les exercices que je vais proposer à la classe a changé.
Je m'efforce de faire une liste de questions cruciales qui me permet de mettre en évidence les difficultés des exercices.
J'avais compris, me semble-t-il, les raisons d'être d'une AER. Le travail collaboratif réalisé en trinôme sur le mémoire m'a permis de mieux comprendre comment construire un tel dispositif didactique et pédagogique.
Élaboration des activités, questions cruciales. Les élèves découvrent le pourquoi des différentes notions et il n'y a plus les questions du style « à quoi ça sert ? ».
Je réinvestis les notions travaillées en séminaire ou en GFP, en particulier, je prépare mieux un guide d'AER, des questions cruciales,...
J'ai beaucoup progressé dans la conception des AER. Cela permet d'avoir un certain esprit critique sur ce qui est proposé dans les livres et de mettre une touche personnelle dans les séquences.

Fabrication des AER et guides d'AER.

J'ai, grâce à la formation, enrichi mes connaissances sur les TICE ; j'ai progressé dans la mise en œuvre d'une activité.

J'ai l'impression que j'arrive de mieux en mieux à assimiler les notions du séminaire et à les intégrer dans mes préparations (notamment au niveau du topos des élèves).

J'arrive mieux à organiser et à prévoir l'organisation de l'étude d'un thème en entier.

L'organisation mathématique de mes séances me semble plus structurée.

Les progrès dans l'analyse d'une séance *a posteriori* et *a priori*

J'arrive à travailler d'une façon plus sereine dans mon établissement.

Les recherches sur l'orientation lors de mon stage pour le GFPIT

Le travail sur l'organisation mathématique et l'organisation didactique m'aide à mieux concevoir un thème d'étude et à le mettre en œuvre. J'ai aussi recours au Séminaire, aux Archives...

En appliquant, lors de mon stage en responsabilité, des enseignements proposés par l'IUFM, j'ai pu constater, dans la plupart des cas, une réelle efficacité des dispositifs didactiques que j'ai mis en place.

Le travail sur le corpus B qui nous a permis de travailler profondément sur un thème et de nous montrer la démarche à suivre à chaque préparation.

Après un temps d'adaptation, je pense que ma participation est devenue un peu plus pertinente.

J'arrive de mieux en mieux à faire des séquences centrées sur le travail des élèves, à créer des OM et des OD intéressantes.

Le travail avec mon nouveau PCP, avec qui on discute des AER et de comment les créer, les mettre en place dans ma classe. Cela me demande de bien travailler les notions vues en séminaire, afin de pouvoir les lui expliquer.

Les séances d'explicitation m'ont permis de trouver des réponses aux questions concrètes de la profession.

Travailler "activement" les séminaires et GFP me permet une meilleure assimilation. Ceci me permet alors d'acquérir des nouvelles méthodes.

J'essaie d'apprendre une nouvelle façon d'enseigner, c'est dur mais j'aime cela.

Le travail demandé est généralement intéressant

Grâce au travail d'analyse et d'évaluation du TER (étude des praxéologies à l'étude), j'ai beaucoup plus de facilités qu'avant à décortiquer un programme pour créer une séquence d'enseignement.

La relecture des notices du début d'année et des premiers séminaires avec du recul m'a permis de mieux comprendre certaines notions.

L’élaboration du mémoire..

J’essaie d’utiliser le plus souvent possible les archives du séminaire pour préparer mes cours, mais aussi pour trouver des réponses à des questions liées au mémoire (par exemple).

La rédaction du corpus B m’a permis de mieux analyser mon travail de préparation et d’observer les répercussions sur le travail des élèves.

Les recherches pour le mémoire (permet de répondre à des questions que l’on se posait).

Mon travail est davantage orienté autour des types de tâches, il est plus fonctionnel.

Un point négatif

J'ai eu du mal au départ à synthétiser, classer toutes les informations données par la formation.

J'ai encore quelques problèmes sur la problématisation des notions que j'aborde.

Il y a certains chapitres que j'aurais aimé préparer d'une manière plus approfondie, mais je n'ai pas pu par manque de temps.

La difficulté à penser et à préparer une question de la semaine.

Retard sur les programmes.

J'ai du mal à trouver un bon équilibre entre mon topos et celui des élèves.

J'ai du mal à m'organiser pour préparer à l'avance les recherches dans les Archives.

J'ai demandé à mon tuteur si les items de mon portfolio du C2i2e étaient validables ; apparemment je ne le saurais qu'après la date de clôture des dépôts dans le portfolio. Pour les items relatifs au FIT, après dépôt, on nous a dit si l'item est validé ou pas au fur et à mesure ce qui permet d'effectuer des modifications en cas de non validation. Cela aurait été préférable qu'il en soit de même pour les compétences disciplinaires.

Devant la charge de travail à réaliser, je ne me suis pas investi régulièrement dans le C2i2e et me suis retrouvé à en faire beaucoup au dernier moment.

Ø

Le GFP IT me semble intéressant mais seulement pour le stage de fin d'année.

Certains élèves, un quart environ, ne travaillent pratiquement pas et perturbent les autres. Le problème n'a pas été résolu.

Les sujets traités en séminaire concernent le plus souvent le niveau lycée et peu le niveau collège.

Le travail en groupe pour le mémoire est difficile à gérer quand le « groupe » ne se met au travail que quinze jours avant l'échéance.

J'ai du mal à organiser des synthèses au niveau des organisations régionales et globales.

Mon travail lors du corpus B qui s'est réalisé dans des conditions exécrables.

Pour l'instant je n'arrive pas à trouver le temps pour valider mon C2i2e.

Suggestion : mettre en place un moteur de recherche sur les archives du séminaire.

L'étude trop tardive des TER précédents, qui apporte un nouvel éclairage sur les séminaires, les AER... „J'aurai gagné à étudier ces TER plus tôt dans l'année, au lieu de m'y mettre il y a seulement un mois et demi.

Je ne sais pas quelle doit être la priorité dans mon travail (stage, TER, corpus, C2i2e, ...).

Le vocabulaire que j'emploie n'est pas toujours approprié.

J'aimerais parvenir à trouver le temps de faire tout ce qu'il faut avec le sérieux et l'implication que cela nécessite.

Parfois, les dispositifs didactiques que j'ai mis en place dans ma classe en responsabilité n'ont pas été très efficaces. Je pense que dans ce cas-là, j'ai souvent été "responsable" de l'échec de ces dispositifs.

L'assimilation de toutes les notions vues cette année a été relativement lente. Je n'ai pas compris ce que l'on me demandait précisément, mais une cohérence apparaît enfin.

La quantité de travail personnel est difficilement gérable avec une vie familiale très chargée.

J'aimerais avoir plus de temps pour préparer des activités plus intéressantes (utilisation d'un vidéo-projecteur plus souvent, activité de création de patrons de solides, ...) mais ça prend énormément de temps.

J'ai toujours beaucoup de mal à anticiper et à travailler à l'avance. Je suis une adepte du « dernier moment ».

J'ai sans doute attendu un peu trop longtemps avant de faire des recherches dans les archives du séminaire afin de m'aider dans l'élaboration de mes séances.

Je n'arrive plus à trouver des questions de la semaine pertinente..

La validation du C2i2e.

Une utilisation réduite des TICE.

Toujours le C2i2e.

Amalgamation des types de tâches pas encore au point.

Topos de l'élève.

2. Un bilan des validations

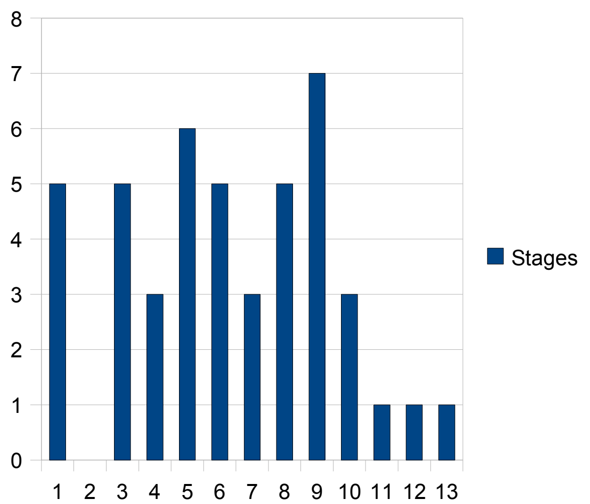
2.1. Un bilan chiffré

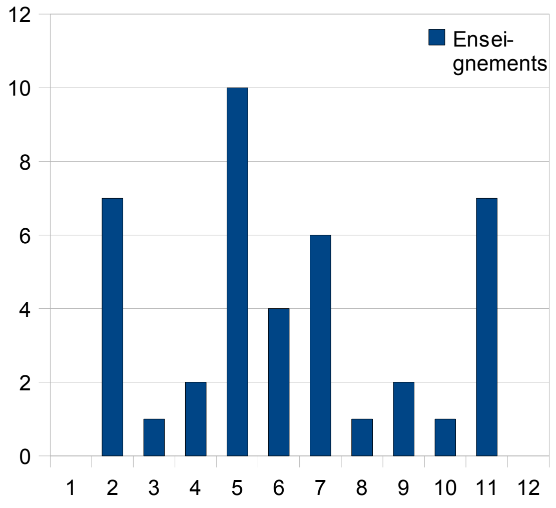
	Enseignements	Stages	Mémoires
Notes			
NS	0	5	0
10	8	5	7
11	1	3	0
12	2	6	5
13	10	5	4
14	4	3	5
15	6	5	6
16	1	7	8
17	2	3	5
18	1	1	1
19	7	1	4
20	0	1	0
	42	45	45

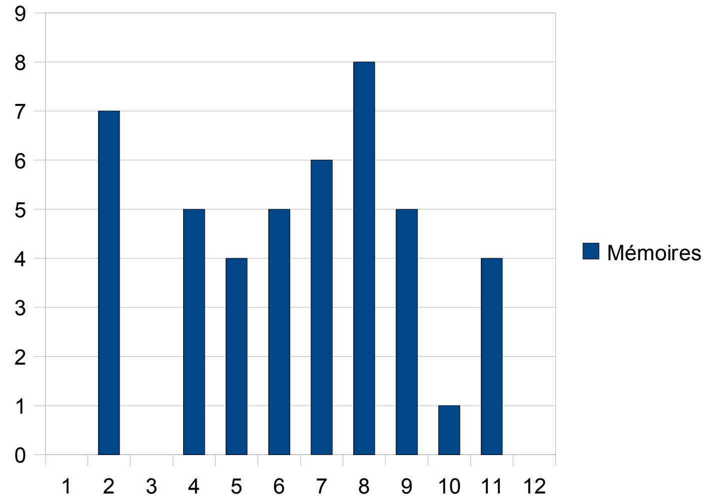
Médiane	13,5	13	15
1er quartile	12	11	12
3e quartile	15	16	16

NS	P	AB	B	TB		Médiane	Q1	Q3
5	8	14	15	3	Stages	AB	P	B
0	7	14	19	5	Mémoires	B	AB	B
0	9	16	9	8	Enseignements	AB	AB	B

La dispersion la plus grande est obtenue pour les stages, avec une réussite collective comparable à celle obtenue pour les enseignements mais « tirée vers le bas », la réussite collective la meilleure étant obtenue pour le mémoire.







2.2. Un bilan qualitatif

☞ Encore une vision parcellaire et fragmentée des OM.

☞ Sur le terrain, petite taille des AER et motivation insuffisante des OM.

☞ Le moment de l'évaluation n'est pas vu comme permettant d'évaluer l'OM et l'OD réalisées.

☞ L'institutionnalisation (fonction) est dans l'ensemble superposée à la synthèse (dispositif).

☞ Le topos des élèves est trop souvent lié à l'autonomie didactique dans laquelle on les place.

☞ Pour beaucoup, une correction formelle (orthotypographique notamment) des mémoires encore insuffisante.

3. Et après ?

1. Lorsque nous ne serons plus professeurs stagiaires, est-ce qu'on aura toujours accès aux séminaires des années précédentes ? (le mot de passe est-il toujours « ombilic ») (13)

2. Que faire l'année prochaine si on n'a pas validé tous les items du C2i2e ? (23)

3. Comment se déroule la suite de notre formation après la titularisation ? (23)

4. Comment s'organise l'année de T1 ? (21)

1. Normalement, rien ne changera. Si c'est le cas, un mel au responsable de la formation permettra d'obtenir les nouveaux paramètres.

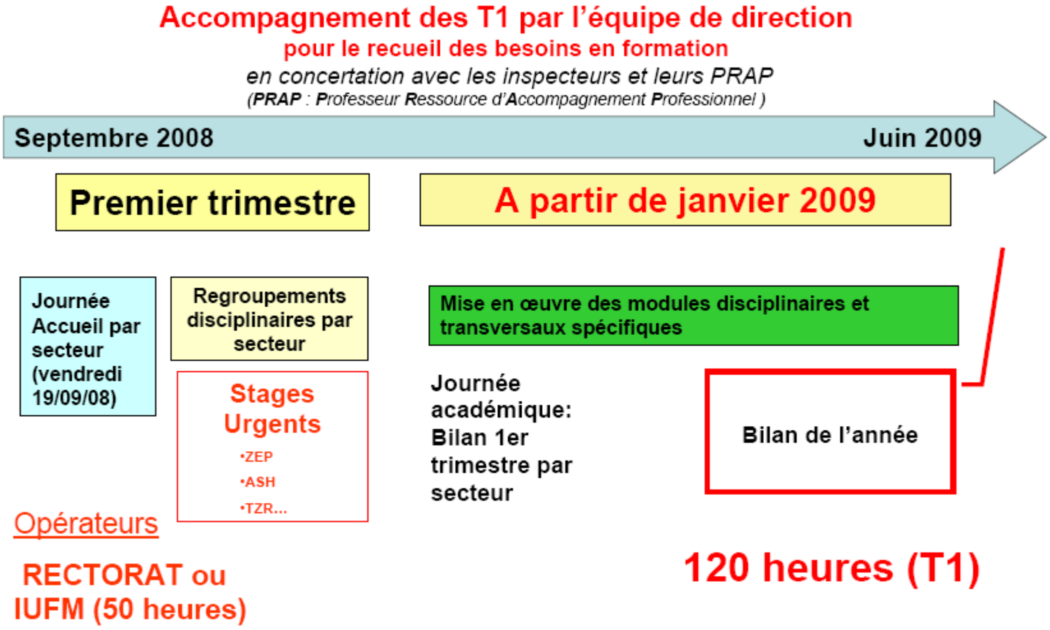
2.
Site de l'IUFM : page d'accueil
C2i2e : Edition du certificat ou des compétences acquises
Vous pouvez éditer à partir du 22 juin votre Certificat informatique et internet niveau 2 enseignant.

Il est délivré si les 18 compétences obligatoires et 5 compétences facultatives au moins sur 9 ont été validées.

Mot de passe : Celui qui vous permet d'accéder à l'espar où vous avez déclaré vos compétences
Editer le C2i2e
Si les conditions d'obtention ne sont pas remplies, la **liste des compétences acquises** vous est délivrée ; dans ce cas vous pourrez en 2009-2010 acquérir dans le cadre de formations les compétences qui vous manquent.

3. & 4.
http://www.ac-aix-marseille.fr/public/jsp/site/Portal.jsp?page_id=796

En 2008-2009



Le dispositif académique de l'Accompagnement de l'Entrée dans le Métier (AEM) - année 2008-2009
Mise en œuvre du dispositif 2008-2009
Nouveaux titulaires en première année d'exercice (T1) - 120h d'accompagnement

- **Les journées d'accueil des néotitulaires en première année d'exercice (T1)** Premier rassemblement académique : 19 septembre 2008
- Présentation des travaux de la journée [ppt 75 Ko]

- L'année du T1 [ppt 312 Ko]
- Division des personnels enseignants (DIPE) : accueil des T1 [ppt 85 Ko]
- La mise en oeuvre des stages urgents. Calendrier [xls 27 Ko]
    - Le stage TZR : L'accueil du TZR lors d'un remplacement de courte durée [pdf 16 Ko]
- Le bilan académique du 1er trimestre par secteur : 16 janvier 2009.
- Inscription aux modules transversaux, mise en oeuvre à partir de janvier 2009 S'inscrire en ligne
- La mise en œuvre des modules disciplinaires et transversaux spécifiques : mi-janvier 2009
- Bilan académique de fin d'année : 27 mai (site d'Aix), 5 juin (site de Marseille et de Vitrolles). Questionnaire destiné aux néotitulaires en première année d'exercice (à renseigner avant la journée de bilan)

Nouveaux titulaires en deuxième année d'exercice (T2) - titularisés à la rentrée 2007 : 60h d'accompagnement

Les T2 bénéficient du même type d'accompagnement que les T1, en fonction des demandes qu'il expriment ou des besoins identifiés par les corps d'inspection.

Le dispositif comprend :

- des modules disciplinaires spécifiques à public désigné dont le volume ne peut excéder trois jours ;
- des modules transversaux faisant suite au travail engagé en T1 et pour lesquels les T2 sont invités à s'inscrire selon leur choix. S'inscrire en ligne

Les T2 bénéficient également d'un accompagnement par un Personne Ressource d'Accompagnement Professionnel (PRAP)

Les modules urgents pour les T1 :
Autorité
Évaluation
ASH
TZR

Les modules transversaux (1 prioritaire) [ce sont les mêmes en T1 et T2]

Agir en fonctionnaire 12h
Acquérir C2i2e enseignant 18h
Diversité des cultures 12h
Éducation aux médias et citoyenneté 12h
Politique de la ville 6h

Par internet, où peut-on trouver tous les documents officiels liés à notre métier (pour l'orientation entre autres) ? (23)

En dehors du site académique et du site de l'IUFM (rubrique documents), nous avons largement utilisé dans l'année Eduscol. C'est le portail à consulter d'abord, via une recherche Google du type Eduscol < mots clés >. On peut également aller consulter le site du MEN, notamment les BO qui figurent en ligne, et le JO.

Quelles sont les démarches à faire pour enseigner les maths en anglais dans le cadre d'une section européenne (« programmes », critères de validation) ? (9)

Peut-on avoir des informations sur l'enseignement des mathématiques comme DNL dans le cadre des sections européennes ? (19)
Peut-on avoir plus d'informations sur les lycées français à l'étranger / lycée européen ? (23)
Quelle formation faut-il suivre et quel examen faut-il passer pour devenir professeur de DNL ? (22)

http://www.emilangues.education.fr/references/cadre-reglementaire/certifications-complementaires

http://www.emilangues.education.fr/formation/certification-complementaire/les-enjeux

Depuis février 2005, une certification complémentaire peut être accordée aux enseignants de disciplines non linguistiques pour enseigner leur discipline dans une langue autre que le français, dans le cadre des sections européennes ou de langues orientales (SELO) - Cliquez ici pour consulter le Bulletin Officiel du 12 février 2004.
Dans le même temps, la loi d'orientation du 23 avril 2005 affirme la volonté ministérielle d'augmenter de manière significative le nombre de ces sections et de promouvoir leur développement dans les filières technologiques et professionnelles. A terme, tous les lycées devraient avoir une ou plusieurs sections européennes.
Cette évolution est en parfaite cohérence avec la généralisation de l'apprentissage des langues à l'école primaire. Après quelques années d'apprentissage d'une langue, il apparaît indispensable que les élèves aient la possibilité d'utiliser leurs acquis linguistiques pour accéder à de nouveaux savoirs ; en effet, seuls les élèves qui ont le projet de devenir spécialistes de langues – que ce soit pour être enseignant, chercheur, traducteur, interprète... - conservent assez de motivation pour poursuivre l'étude des langues tout au long du cursus secondaire. Pour tous les autres, une finalité opérationnelle immédiate se révèle nécessaire si l'on veut empêcher, au mieux, fossilisation, au pire, régression. De plus, les sections européennes ou de langues orientales répondent à des objectifs éducatifs et professionnels qui correspondent aux attentes de la société : pratique des échanges internationaux et apprentissage de la mobilité, mise en œuvre de projets conjoints et travail en équipe, formation interculturelle et éducation du futur citoyen européen, préparation d'un projet professionnel…
Dans une section européenne ou de langues orientales, les modalités d'apprentissage répondent à des objectifs pédagogiques et didactiques spécifiques : les différents savoirs disciplinaires ne sont plus présentés uniquement sous l'angle des programmes nationaux ; ils sont à la fois mis en perspective et décloisonnés. Dans la classe, l'accent est mis sur les pratiques de travail coopératif et sur les activités orales interactives. La curiosité intellectuelle est stimulée et s'accompagne du plaisir de la découverte.
La formation à l'enseignement en sections européennes ou de langues orientales est un enjeu majeur pour les instituts universitaires de formation des maîtres (IUFM) et pour les universités. La certification complémentaire valorise ces formations initiales et permet aux enseignants titulaires de valider des parcours de formation continue et d'autoformation. Elle garantit également la qualité de l'enseignement dans ces sections en évaluant officiellement les compétences des enseignants.

Le BO du 12 février 2004

Article 1 - Les personnels enseignants des premier et second degrés, titulaires ou stagiaires, relevant du ministre chargé de l'éducation, peuvent se voir délivrer, dans les conditions prévues par le présent arrêté, une certification complémentaire dans les secteurs disciplinaires énumérés à l'article 2 ci-dessous.

Article 2 - Les secteurs disciplinaires prévus à l'article 1er ci-dessus, qui peuvent comprendre des options, sont fixés comme suit :
- arts : option cinéma et audiovisuel ou danse ou histoire des arts ou théâtre ;
- enseignement en langue étrangère dans une discipline non linguistique ;
- français langue seconde.

Article 3 - La certification complémentaire définie à l'article 1er ci-dessus est délivrée, à la suite d'un examen, par le recteur de l'académie dans le ressort de laquelle le candidat effectue le stage prévu à l'article 6 du décret n° 72-580 du 4 juillet 1972 susvisé, aux articles 6 et 11 du décret n° 72-581 du 4 juillet 1972 susvisé, aux articles 10 et 17-4 du décret du 1er août 1990 susvisé, à l'article 5-1 du décret du 4 août 1980 susvisé et à l'article 10 du décret du 6 novembre 1992 susvisé, et par le recteur de l'académie dans le ressort de laquelle le candidat exerce pour les enseignants titulaires.

Article 4 - L'examen est constitué d'une épreuve orale, jugée par un jury institué au niveau académique pour chacun des secteurs disciplinaires. Le jury, nommé par le recteur d'académie, comprend, outre au moins un inspecteur d'académie-inspecteur pédagogique régional, président, des membres choisis parmi les inspecteurs de l'éducation nationale, les corps de personnels enseignants et les enseignants-chercheurs. Des personnes n'appartenant pas aux corps précédemment cités peuvent, en tant que de besoin, être choisies en raison de leurs compétences particulières.

Article 5 - L'épreuve, d'une durée de trente minutes maximum, débute par un exposé du candidat, pendant une durée de dix minutes maximum, prenant appui sur sa formation universitaire ou professionnelle, reçue dans une université, dans un institut universitaire de formation des maîtres ou dans un autre lieu de formation dans le secteur disciplinaire et, le cas échéant, dans l'option correspondant à la certification complémentaire choisie. Le candidat peut également faire état de son expérience et de ses pratiques personnelles, dans le domaine de l'enseignement ou dans un autre domaine, notamment à l'occasion de stages, d'échanges, de travaux ou de réalisations effectués à titre professionnel ou personnel.

Cet exposé est suivi d'un entretien avec le jury, d'une durée de vingt minutes maximum, dont l'objet est d'apprécier les connaissances du candidat concernant les contenus d'enseignement, les programmes et les principes essentiels touchant à l'organisation du secteur disciplinaire et, le cas échéant, à l'option correspondant à la certification complémentaire choisie et d'estimer ses capacités de conception et d'implication dans la mise en œuvre, au sein d'une école ou d'un établissement scolaire du second degré, d'enseignements ou d'activités en rapport avec ce secteur.

Le jury tient compte du niveau d'enseignement (primaire ou secondaire) dans lequel le candidat a vocation à intervenir.

Article 6 - L'examen comporte une session annuelle dont la date est fixée par le recteur d'académie.

L'inscription est effectuée auprès du recteur d'académie habilité à délivrer la certification complémentaire dans les conditions fixées à l'article 3 du présent arrêté.

Plusieurs recteurs d'académie peuvent, s'ils le souhaitent, mettre en place une organisation commune de l'examen pour les académies considérées. Dans ce cas, l'organisation matérielle de l'épreuve et la nomination du jury font l'objet de décisions conjointes des recteurs concernés. Le jury établit pour chaque académie concernée la liste des candidats admis.

Article 7 - Sont déclarés admis les candidats ayant obtenu une note égale ou supérieure à 10 à l'épreuve, notée sur 20.

Le recteur d'académie compétent dans les conditions fixées à l'article 3 du présent arrêté délivre la certification complémentaire, qui fait mention du secteur disciplinaire et, le cas échéant, de l'option.

Toutefois, ne peuvent se voir délivrer la certification complémentaire les personnels enseignants stagiaires dont le stage n'a pas été jugé satisfaisant ou qui n'ont pas été admis à l'examen de qualification professionnelle ou au certificat d'aptitude au professorat de lycée professionnel ou qui n'ont pas obtenu le diplôme professionnel de professeur des écoles dans les conditions prévues par le statut du corps pour lequel ils ont été recrutés.

Les personnels enseignants stagiaires autorisés à accomplir une seconde année de stage conservent pendant cette année le bénéfice de l'admission à l'examen. À l'issue de cette période, la certification complémentaire leur est délivrée sous réserve des dispositions du précédent alinéa du présent article.
Article 8 - Le directeur des personnels enseignants est chargé de l'exécution du présent arrêté, qui sera publié au Journal officiel de la République française.

On trouvera sur le site Emile des possibilités de formation continue, de séjours courts à l'étranger, etc. par exemple sur cette page : http://www.emilangues.education.fr/actualites/2009/programme-de-mobilite-sejours-professionnels

L'APMEP a un groupe de travail à ce sujet, qui maintient un site : http://euromath.free.fr/. On peut accéder également à des documents divers sur le sujet, ainsi qu'à des forum de discussion quelquefois très instructifs, via une recherche Internet. On trouvera un document rédigé par les IPR de mathématiques et de langues vivantes dans la rubrique documents du site de l'IUFM.

On peut également, pour les formations, consulter le site : http://www.europe-education-formation.fr/comenius-bourses.php

Bonnes vacances !